

一类非线性神经网络中噪声改善信息传输*

李欢[†] 王友国[‡]

(南京邮电大学理学院, 南京 210023)

(2013年6月11日收到; 2014年2月28日收到修改稿)

以互信息为测度, 通过数值计算和计算机仿真比较详细地讨论了在加性和乘性噪声共同作用下的一类非线性神经网络中噪声改善信息传输的(阈上)随机共振现象. 在一定的系统阈值和固定的乘性(或加性)噪声强度下, 互信息随着加性(或乘性)噪声强度的增加显示出上凸变化, (阈上)随机共振出现; 系统阈值单元数目的增加可增强信息传输的效果; 系统阈值的增加使得信号处在阈下的成分增多, (阈上)随机共振现象更容易发生. 另外, 改变加性噪声强度比改变乘性强度时(阈上)随机共振更容易发生. 以上结果说明(阈上)随机共振现象的存在性和噪声改善信息传输的效果与乘性或加性噪声强度、阈值单元数以及系统阈值水平密切相关.

关键词: 神经网络, 噪声, (阈上)随机共振, 互信息

PACS: 05.40.-a, 02.50.-r, 87.10.+e

DOI: 10.7498/aps.63.120506

1 引言

在非线性系统中, 噪声改善信号处理和信息传输的现象被称为随机共振(stochastic resonance, SR), 它是由Benzi等^[1]在1981年首次提出的. 目前, SR的研究成果相当丰硕^[1-19]. 人们研究随机共振的初期多是以周期变化的信号为输入信号, 通过系统内部或外部加入的噪声尽可能地增加系统输出信噪比^[7-9]. 1995年, Collins等^[17]提出了非周期共振的概念, 并将随机共振与信息论结合起来, 这为随机共振的研究开辟了更为广阔的天地.

经典的随机共振认为只有当信号处于阈下时, 噪声才可能对信息传输起到积极的作用, 随机共振现象发生. 直到2000年, Stocks^[18]在研究Collins等^[17]提出的神经网络模型时却发现信号大于阈值时也出现了噪声改善信息传输的现象, 这个过程类似于随机共振, 被称为阈上随机共振(suprathreshold stochastic resonance, SSR). SSR的提出丰富了SR理论, 而神经网络的研究也一度成为热

点^[19-21].

虽然阈上随机共振的研究结果目前也比较丰富^[18,19,22-29], 但这些研究往往考虑系统中只有加性噪声时的情形. 也有一些学者研究了系统中单独含有乘性噪声时的随机共振现象^[30-32], 然而在实际情况下, 系统往往同时受到加性和乘性噪声影响^[16,33,34]. 文献^[34]研究了加性和乘性噪声共同作用下的一类非线性神经网络系统中的超阈值随机共振现象. 本文在文献^[34]的基础上, 进一步详细地讨论加性噪声和乘性噪声强度、阈值单元数以及系统阈值对(阈上)随机共振现象的存在性及噪声改善信息传输效果的影响.

2 一类非线性神经网络模型

文献^[34]中所讨论的神经网络模型见图1. 在这个系统中, x 是一个输入信号, 本文同样取 x 是均值为零, 方差为 σ^2 的高斯信号, 其概率密度函数为

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right). \quad (1)$$

* 国家自然科学基金(批准号: 61179027)资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: leehuan2008@126.com

[‡] 通讯作者. E-mail: wyg@njupt.edu.cn

$S(x)$ 是一系统函数, 这里仍取 $S(x)$ 为分段函数:

$$S(x) = \begin{cases} x & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}. \quad (2)$$

α 为确定性信号在系统中的耦合强度, ε_i 和 θ_i , 各 ε_i, θ_i 之间均是相互独立的标准高斯噪声, 即

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle &= 0 \quad \langle \theta_i, \theta_j \rangle = 0 \quad (i \neq j), \\ \langle \varepsilon_i, \theta_j \rangle &= 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (3)$$

$U_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 是阈值, 为了便于计算, 同样取 $U_1 = U_2 = \dots = U_N = U$; y_i 是第 i 个阈值单元的输出信号, 它可由 Heaviside 函数表示:

$$y_i = \begin{cases} 1 & (v_i \geq U_i) \\ 0 & (v_i < U_i) \end{cases}, \quad (4)$$

其中

$$v_i = \alpha S(x) + D\varepsilon_i S(x) + R\theta_i. \quad (5)$$

(5) 式中 v_i 是经过乘性噪声和加性噪声共同作用下的一个输出, D, R 分别为乘性噪声强度和加性噪声强度.

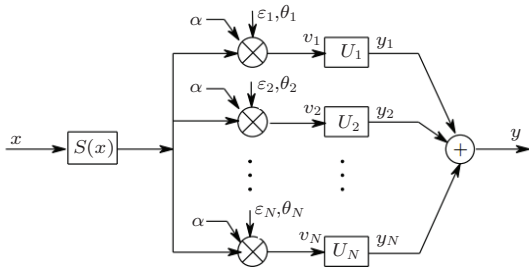


图1 具有 N 个阈值单元的神经网络模型

由 (3) 式知, 不同的 $v_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 也是相互独立的. 对事先给定的 x , 上述网络输出信号 $y = \sum_{i=0}^N y_i$ 服从二项分布, 可能取值集合为 $M = \{k | k = 0, 1, 2, \dots, N\}$, 且 $y = k (k \in M)$ 的概率为

$$\begin{aligned} P\left\{\sum_{i=1}^N y_i = k | x\right\} \\ = C_N^k q_x^k (1 - q_x)^{N-k} \quad (k = 0, 1, \dots, N), \end{aligned} \quad (6)$$

这里

$$C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}, \quad q_x = P\{y_i = 1 | x\}.$$

当输入信号 $x > 0$ 时, v_i 满足的条件概率密度函数是高斯型的:

$$P(v_i | x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(D^2x^2 + R^2)}}$$

$$\times \exp\left(-\frac{(v_i - \alpha x)^2}{2(D^2x^2 + R^2)}\right), \quad (7)$$

这时,

$$\begin{aligned} q_x = h_x &= P\{y_i = 1 | x > 0\} \\ &= P\{v_i > U | x > 0\} = \int_U^\infty P(v_i | x) dv_i \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{U - \alpha x}{\sqrt{2(D^2x^2 + R^2)}}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

当输入信号 $x \leq 0$ 时, v_i 满足的条件概率密度函数也是高斯型的:

$$P(v_i | x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R^2}} \exp\left(-\frac{v_i^2}{2R^2}\right), \quad (9)$$

此时得到 q_x 为

$$\begin{aligned} q_x = r_x &= P\{y_i = 1 | x \leq 0\} = P\{v_i > U | x \leq 0\} \\ &= \int_U^\infty P(v_i | x) dv_i \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{U}{\sqrt{2R^2}}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

3 噪声改善信息传输

3.1 Shannon 互信息

系统输入信号 x 与输出信号 y 之间的互信息可表示为^[19]

$$I = H(y) - H(y|x), \quad (11)$$

其中 $H(y)$ 为输出信息熵, $H(y|x)$ 表示输出条件熵. 在图 1 所示的系统中

$$H(y) = -\sum_{k=0}^N A_k \log_2 A_k, \quad (12)$$

$$H(y|x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) \cdot \sum_{k=0}^N B_k \log_2 B_k dx, \quad (13)$$

这里

$$\begin{aligned} B_k &= P\left\{\sum_{i=1}^N y_i = k | x\right\} \\ &= C_N^k q_x^k (1 - q_x)^{N-k}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} A_k &= P\left\{\sum_{i=1}^N y_i = k\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) B_k dx \\ &= C_N^k \int_{-\infty}^0 P(x) r_x^k (1 - r_x)^{N-k} dx \\ &\quad + C_N^k \int_0^{+\infty} P(x) h_x^k (1 - h_x)^{N-k} dx. \end{aligned} \quad (15)$$

则(12)和(13)式可分别表示为

$$\begin{aligned}
 & H(y) \\
 &= - \sum_{k=0}^N A_k \log_2 A_k \\
 &= - \sum_{k=0}^N C_N^k \left(\int_{-\infty}^0 P(x) r_x^k (1-r_x)^{N-k} dx \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^{+\infty} P(x) h_x^k (1-h_x)^{N-k} dx \right) \\
 &\quad \times \log_2 \left[C_N^k \int_{-\infty}^0 P(x) r_x^k (1-r_x)^{N-k} dx \right. \\
 &\quad \left. + C_N^k \int_0^{+\infty} P(x) h_x^k (1-h_x)^{N-k} dx \right], \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & H(y|x) \\
 &= - \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) \cdot \sum_{k=0}^N B_k \log_2 B_k dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \int_{-\infty}^0 P(x) \sum_{k=0}^N C_N^k r_x^k (1-r_x)^{N-k} \\
 &\quad \times [\log_2 C_N^k + k \log_2 r_x \\
 &\quad + (N-k) \log_2 (1-r_x)] dx \\
 &\quad - \int_0^{+\infty} P(x) \sum_{k=0}^N C_N^k h_x^k (1-h_x)^{N-k} \\
 &\quad \times [\log_2 C_N^k + k \log_2 h_x \\
 &\quad + (N-k) \log_2 (1-h_x)] dx. \quad (17)
 \end{aligned}$$

3.2 数值计算与仿真结果分析

取(5)式中 $\alpha = 1$, 输入的高斯信号 x 的方差 $\sigma^2 = 1$. 图2—7给出了在不同的阈值水平和乘性噪声强度(或加性噪声强度)下, 对于不同的阈值单元数 N , 互信息 I 随加性噪声强度 R (或乘性噪声强度 D)的变化情况(图中数据点是仿真结果).

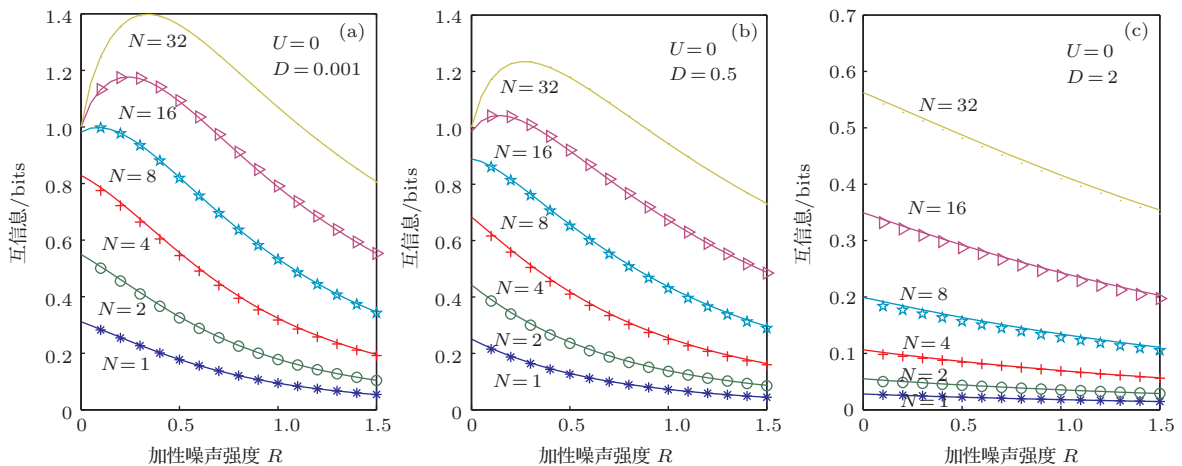


图2 $U = 0$ 及不同的乘性噪声强度 D 时 (a) $D = 0.001$, (b) $D = 0.5$, (c) $D = 2$, 互信息 I 作为 R 的函数随不同 N 的变化

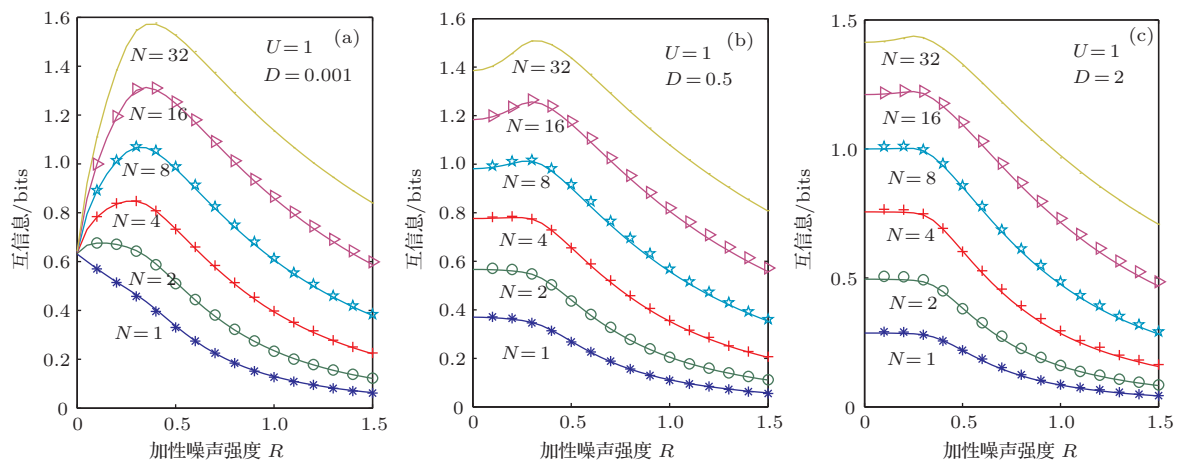


图3 $U = 1$ 及不同的乘性噪声强度 D 时 (a) $D = 0.001$, (b) $D = 0.5$, (c) $D = 2$, 互信息 I 作为 R 的函数随不同 N 的变化

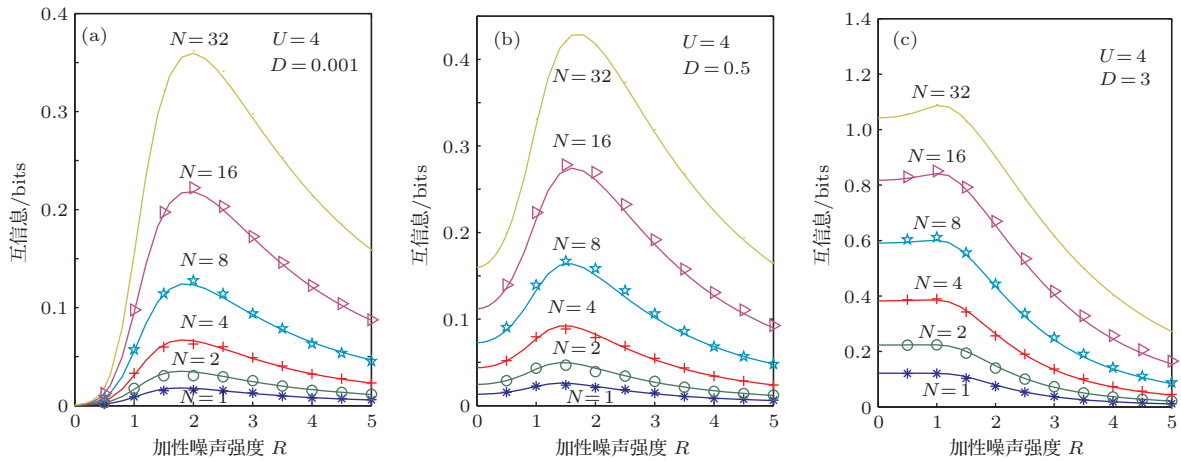


图4 $U = 4$ 及不同的乘性噪声强度 D 时 (a) $D = 0.001$, (b) $D = 0.5$, (c) $D = 2$ 互信息 I 作为 R 的函数随不同 N 的变化

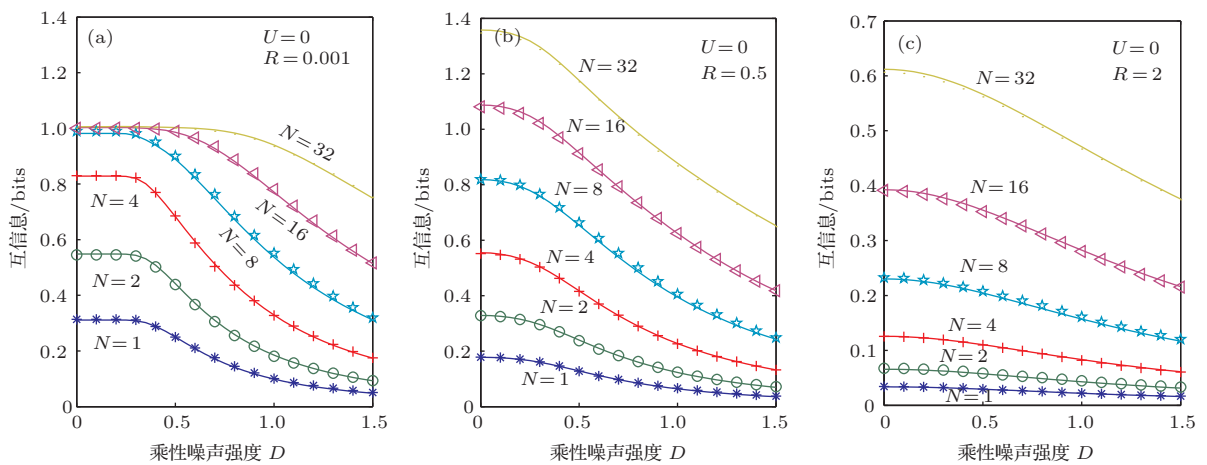


图5 $U = 0$ 及不同的加性噪声强度 (a) $R = 0.001$, (b) $R = 0.5$, (c) $R = 2$ 时互信息 I 作为 D 的函数随不同 N 的变化

图2是 $U = 0$, D 分别为0.001, 0.5, 2时, 对于不同的 N , 互信息 I 作为 R 的函数的变化情况. 对较小强度的固定乘性噪声 ($D = 0.001, 0.5$), 较小的阈值单元数时互信息曲线随着 R 的增加总是单调递减的, 此时SSR不存在; 但对较大的 N 值, 互信息曲线出现上凸的形式, 出现了SSR现象, 信息传输得到改善, 并且随着 N 的增大, 互信息的最大值也在增加, 信息传输的效果在提高. 相对于文献[18]中没有乘性噪声的情况, 这里当 N 较小时, $R = 0$ 时的互信息并不为1, 且互信息的峰值均下降, 其原因可能是系统函数的非线性及系统中加入的少量乘性噪声影响了信息的传输; 对比图2(b)中 $D = 0.5$ 时与图2(a)中 $D = 0.001$ 时的情况, 前者在 $N = 8$ 时SSR现象没有出现, 并且在较大 N 时 ($N > 8$) 互信息峰值在减小, 这说明较强的乘性噪声对系统的信息传输产生了消极的影响; 进一步增加乘性噪声强度 ($D = 2$), 图2(c)中显示了互信息随 R 增加而单调递减, SSR不存在, 其原因可能

是过强的乘性噪声诱导了线性化的结果[18].

图3给出的是 $U = 1$, D 分别为0.001, 0.5, 2时, 对于不同的 N , 互信息 I 作为 R 的函数的变化情况. 对于较小强度的乘性噪声 ($D = 0.001$), 图3(a)显示了标准的SSR现象[18], 即当 $N = 1$ 时互信息单调下降, 当 $N > 1$ 时, 噪声能改善信息传输, 且随着 N 的增加, 峰值上移, 阈上随机共振的功效在增强. 增加乘性噪声强度 ($D = 0.5, 2$), 图3(b), (c)两子图显示, 只有当 N 较大时, 才能出现噪声能改善信息传输的SSR现象, 这说明SSR现象的存在性与乘性噪声强度有较大关系, 乘性噪声越强, SSR越不易出现.

图4是 $U = 4$, D 分别为0.001, 0.5, 2时, 对于不同的 N , 互信息 I 作为 R 的函数的变化情况. 在较小的乘性噪声强度 ($D = 0.001, 0.5$) 时, 对所有的 N 均出现SSR现象 (这是由于信号主要成分在阈下, 经典的SR影响存在), 且随着 N 的增大, 互信息最大值在增加, 信息传输的效果在增强. 进一步

增大 D , 图 4(c) 显示对于较小的阈值单元数, SSR 现象不存在, 但随着 N 的增大, 信息传输的效果还是有所改善的. 通过比较, 从图 2 到图 3 再到图 4, 阈值的增加使得信号处在阈下的成分增多 (经典的 SR 影响逐渐增加), SSR 现象更容易发生.

R 分别为 0.001, 0.5, 2 时, 对不同的 N , 图 5—7 分别给出了 $U = 0, 1, 4$ 时的互信息 I 随 D 的变化情况. 图 5 ($U = 0$) 显示无论 R 取何值 SSR 现象均未出现, 但随着 N 的增大, 信息传输的效果在改善. 图 6(a) ($U = 1$) 的加性噪声强度 ($R = 0.001$) 很小,

其结果与文献 [19] 中的纯乘性时图 5 的上子图一致, 标准的 SSR 现象出现 [18], 说明弱的加性噪声作用几乎可以忽略; 随着 R 的增加 ($R = 0.5, 2$), 对所有的 N 均未出现 SSR 现象. 同图 4 一样, 图 7 中阈值比较大 ($U = 4$), 信号主要成分在阈下, 无论 R 取何值, 对所有的 N 均出现 SSR 现象. 从图 5 到图 6 再到图 7 同样说明阈值的增加使得信号处在阈下成分增多, SSR 现象更容易发生. 对比图 2 与图 5、图 3 与图 6, 说明改变加性噪声强度比改变乘性噪声强度更容易使得阈上随机共振发生.

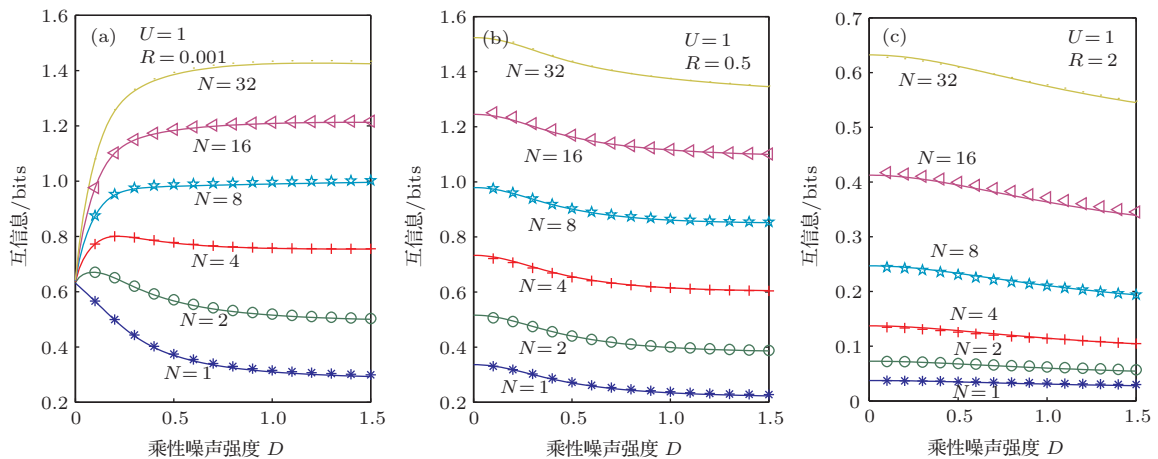


图 6 $U = 1$ 及不同的加性噪声强度 (a) $R = 0.001$, (b) $R = 0.5$, (c) $R = 2$ 时互信息 I 作为 D 的函数随不同 N 的变化

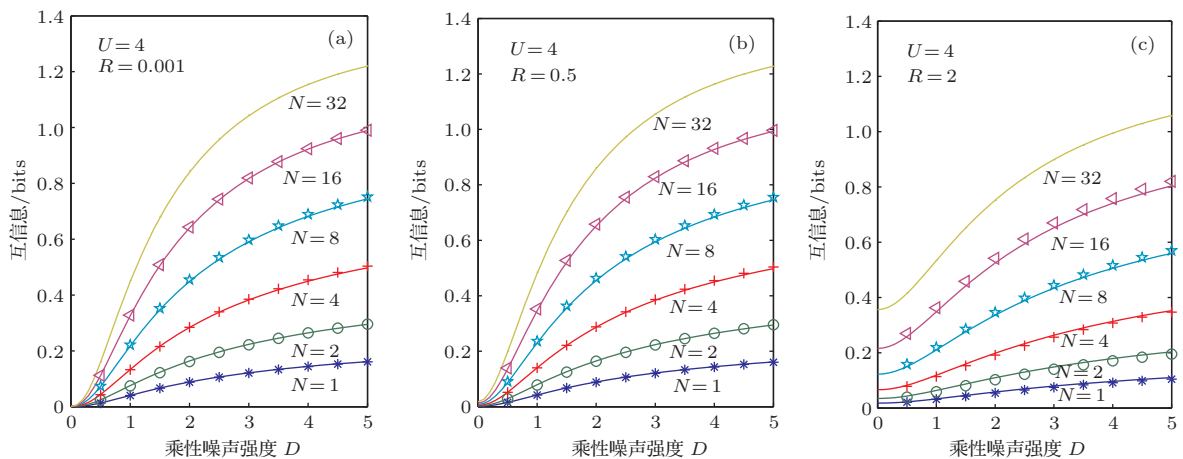


图 7 $U = 4$ 及不同的加性噪声强度 (a) $R = 0.001$, (b) $R = 0.5$, (c) $R = 2$ 时互信息 I 作为 D 的函数随不同 N 的变化

4 结 论

本文以互信息为测度, 比较详细地讨论了在加性和乘性噪声共同作用下的一类非线性神经网络中噪声改善信息传输的 (阈上) 随机共振现象, 通过数值计算和计算机仿真对结果进行分析讨论, 发

现 (阈上) 随机共振现象的存在性及噪声改善信息传输的效果与乘性或加性噪声强度、阈值单元数以及系统阈值的选择有较大关系. 在适当的系统阈值和固定的乘性或加性噪声强度下, 互信息随着加性或乘性噪声强度的增加显示出上凸变化, (阈上) 随机共振出现, 信息的传输得到改善; 系统阈值单元数目的增加可增强信息传输的效果; 阈值水平

的增加使得信号处在阈下成分增多, SSR 现象更容易发生. 此外, 改变加性噪声强度比改变乘性强度时, 阈上随机共振现象更容易发生, 这也为人们往往仅研究加性噪声下的随机共振现象提供了一定的依据.

参考文献

- [1] Benzi R, Stuera A, Vulpiani A 1981 *J. Phys. A: Math. Gen.* **14** L453
- [2] McNamara B, Wiesenfeld K 1998 *Phys. Rev. A* **39** 4854
- [3] Gammaitoni L, Hanggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
- [4] Mitaim S, Kosko B 1998 *Proc. IEEE* **86** 2152
- [5] Chen H, Varshney P K, Kay S, Michels J H 2007 *IEEE Trans. Sign. Process.* **55** 3172
- [6] Chapeau-Blondeau F, Godivier X 1997 *Phys. Rev. E* **55** 1478
- [7] Fauve S, Heslot F 1983 *Phys. Lett. A* **97** 5
- [8] McNamara B, Wiesenfeld K, Roy R 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 2626
- [9] Zhou T, Moss F, Jung P 1990 *Phys. Rev. A* **42** 3161
- [10] Chialvo D R, Longtin A, Muller-Gerking J 1997 *Phys. Rev. E* **55** 1798
- [11] Kay S 2000 *IEEE Sign. Process. Lett.* **7** 8
- [12] Wang Y G, Wu L N 2007 *Fluct. Noise Lett.* **7** L449
- [13] Wang Y G, Wu L N 2005 *Fluct. Noise Lett.* **5** L435
- [14] Kosko B, Mitaim S 2003 *Neural Networks* **16** 755
- [15] Bulsara A R, Zador A 1996 *Phys. Rev. E* **54** R2185
- [16] Guo F, Zhou Y R, Zhang Y 2010 *Chin. Phys. B* **19** 070504
- [17] Collins J J, Chow C C, Capela A C, Imhoff T T 1995 *Phys. Rev. E* **52** 3321
- [18] Stocks N G 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2310
- [19] Nikitin A, Stocks N G, Morse R P 2007 *Phys. Rev. E* **75** 021121
- [20] Cao J, Wang Z, Sun Y 2007 *Physica A* **385** 718
- [21] Cao J, Daniel W C Ho, Huang X 2007 *Nonlin. Anal.* **66** 1558
- [22] Stocks N G 2001 *Phys. Rev. E* **63** 041114
- [23] Stocks N G, Mannella R 2001 *Phys. Rev. E* **64** 030902
- [24] McDonnell M D, Stocks N G, Pearce C E M, Abbott D 2005 *Fluct. Noise Lett.* **5** L457
- [25] McDonnell M D, Abbott D, Pearce C E M 2002 *Microelectr. J.* **33** 1079
- [26] Stocks N G, Allingham D, Morse R P 2002 *Fluct. Noise Lett.* **2** L169
- [27] Rousseau D, Duan F, Chapeau-Blondeau F 2003 *Phys. Rev. E* **68** 031107
- [28] Rousseau D, Chapeau-Blondeau F 2004 *Phys. Lett. A* **321** 280
- [29] Stocks N G 2001 *Phys. Lett. A* **279** 308
- [30] Gammaitoni L, Marchesoni F, Menichella-Saetta E, Santucci S 1994 *Phys. Rev. E* **49** 4878
- [31] Barzykin A V, Seki K 1997 *Europhys. Lett.* **40** 117
- [32] Barzykin A V, Seki K, Shibata F 1998 *Phys. Rev. E* **57** 6555
- [33] Zhang J J, Jin Y F 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 130502 (in Chinese) [张静静, 靳艳飞 2012 物理学报 **61** 130502]
- [34] Guo Y F, Tan J G 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 170502 (in Chinese) [郭永峰, 谭建国 2012 物理学报 **61** 170502]

Noise-enhanced information transmission of a non-linear multilevel threshold neural networks system^{*}

Li Huan[†] Wang You-Guo[‡]

(College of Science, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023, China)

(Received 11 June 2013; revised manuscript received 28 February 2014)

Abstract

In this paper, (supra-threshold) stochastic resonance phenomenon of noise-enhanced information transmission is studied in detail through the numerical calculation and the computer simulation in a non-linear multilevel threshold neural networks system, which is affected by both additive noise and multiplicative noise, then the mutual information is used to characterize the phenomenon. The mutual information as a function of additive noise intensity or multiplicative noise intensity brings on convex changes under a suitable system threshold and a fixed multiplicative noise intensity or additive noise intensity, which shows that the (supra-threshold) stochastic resonance phenomenon occurs. The increases in the number of the system threshold units can enhance the effectiveness of information transmission; the increase of the system threshold can increase the signal components that are under the threshold, and thus the supra-threshold stochastic resonance takes place more easily. In addition, by changing the additive noise intensity the supra-threshold stochastic resonance occurs more easily than by changing the multiplicative noise intensity. The above results show that both the existence of the supra-threshold stochastic resonance and the effectiveness of noise-improved the signal transmission are closely related to multiplicative or additive noise intensity, the number of threshold units, and the system threshold level.

Keywords: neural networks system, noises, (supra-threshold) stochastic resonance, mutual information

PACS: 05.40.-a, 02.50.-r, 87.10.+e

DOI: 10.7498/aps.63.120506

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61179027).

† Corresponding author. E-mail: leehuan2008@126.com

‡ Corresponding author. E-mail: wyg@njupt.edu.cn