一类两自由度参激系统在常数激励下的响应研究^{*}

侯磊^{1)†} 陈予恕¹⁾ 李忠刚¹⁾²⁾

(哈尔滨工业大学航天学院,哈尔滨 150001)
 (哈尔滨工业大学机电工程学院,哈尔滨 150001)
 (2013年11月9日收到;2014年1月29日收到修改稿)

本文探讨常数激励对参激系统共振响应的影响.以机动飞行的裂纹转子系统为例,建立一个两自由度的 振动方程,其中裂纹的呼吸行为构成参数激励,机动飞行引起的机动载荷简化为常数激励,并假设转子为平衡 转子,不考虑偏心激励的影响.采用谐波平衡法求解振动方程,得到各次谐波响应与转速及常数激励的关系 式,从而分析系统的共振响应.结果表明,常数激励对系统的参激主共振及超谐共振响应起决定性作用,这符 合普通裂纹转子系统的重力占优理论,同时,系统各次谐波响应的幅值随常数激励的增加而增大,常数激励的 作用方向对参激主共振响应的幅值影响较大,但对参激超谐共振响应的幅值影响很小.这说明常数激励能起 到放大裂纹转子系统超谐共振响应的作用,不利于系统的平稳运行,但从另一角度考虑,常数激励可用于裂纹 故障的早期检测.

关键词:两自由度参激系统,常数激励,裂纹转子系统,机动载荷 PACS: 45.20.dc, 05.45.-a DOI: 10.7498/aps.63.134501

1引言

参激激励问题广泛存在于工程系统中,如屈 曲梁实验系统^[1],不对称转子系统^[2],斜拉索系 统^[3],变速度转动梁系统^[4],准周期参激系统^[5], 等等.在现有文献中,研究了参激系统中存在简谐 激励^[2]、随机激励^[6,7]及其联合作用^[8,9]时系统的 响应及共振行为,但对常数激励的关注不够.事实 上,常数激励在工程系统中也是普遍存在的,例如 转子-滚动轴承系统^[10–12]及裂纹转子系统^[13–15] 中的重力作用,以及转子系统在机动飞行环境中的 机动载荷^[16–22]等.

机动载荷是飞行器在机动飞行时作用在其发动机转子系统上的附加载荷,当飞行器以一定的速度在一个平面内做定角速度旋转运动时,机动载荷可以简化为常数激励^[17].此时,该机动载荷在形式上属于惯性力,其作用与重力相似,但由于载荷大

小可以达到重力的7—9倍,因此,与重力相比,机 动载荷对转子系统振动响应的影响要更为突出.在 机动载荷的有关研究中,魏海涛等^[18]首先给出了 飞机水平盘旋及俯冲拉起时机动载荷的表达式,随 后,多位学者^[19-22]研究了在这两种机动载荷下航 空发动机转子系统的振动特性,例如,杨永锋^[20], 于渊博^[21]等分别研究了刚性支承及弹性支承的裂 纹转子在机动载荷下的非线性特性.然而,在这些 研究中没有考虑载荷大小改变对系统幅频特性的 影响.Hou等^[22,23]将机动载荷作为控制参数,研 究了非线性转子系统在机动载荷下的动力学响应, 发现了一种由机动载荷引起转子系统碰摩故障的 非线性机理——亚谐共振,并从理论上分析了亚谐 共振产生的条件.

本文试图探讨常数激励在参激系统中的作用, 以一个机动飞行的带有横向裂纹的平衡转子为例, 建立两自由度动力学模型,采用半解析半数值方法 (谐波平衡法结合数值计算)对其振动响应进行分

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10632040, 11302058)资助的课题.

[†]通讯作者. E-mail: houlei@hit.edu.cn

^{© 2014} 中国物理学会 Chinese Physical Society

析,重点研究常数机动载荷大小及作用方向对参激 超谐共振响应的影响.该研究能代表一类两自由度 参激系统在常数激励下的非线性响应.

2 机动飞行的裂纹转子系统建模及 求解

2.1 系统的控制方程

带有横向裂纹的转子系统模型如图1所示,系 统方程可表达如下:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky - \frac{\Delta k}{2} (1 - \cos \omega t)$$

$$\times (y \cos^2 \omega t + z \sin \omega t \cos \omega t)$$

$$= Gmg \cos \varphi, \qquad (1a)$$

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz - \frac{\Delta k}{2} (1 - \cos \omega t)$$

$$\times (y \sin \omega t \cos \omega t + z \sin^2 \omega t)$$

$$= Gmq \sin \varphi, \qquad (1b)$$

其中, c为阻尼, 且 $c = 2\xi m\omega$, ω 为转速, Δk 为裂纹 刚度, 代表裂纹深度对转轴刚度的影响, G为常数 激励大小, 代表机动载荷相对重力的倍数, φ 代表 常数激励的作用方向, 如图 2 所示.



对方程(1)作如下变换:

$$Y = \frac{y}{\delta}, \quad Z = \frac{z}{\delta}, \quad \tau = \omega t$$
$$s = \frac{\omega}{\omega_{\rm c0}}, \quad K = \frac{\Delta k}{k},$$

其中

$$\delta = \frac{mg}{k}, \ \omega_{\rm c0} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

可得系统的无量纲形式的运动微分方程如下:

$$Y'' + 2\xi Y' + \frac{1}{s^2}Y - \frac{K}{2s^2}(1 - \cos\tau)$$

$$\times \left(Y\cos^2\tau + Z\sin\tau\cos\tau\right)$$

$$= \frac{G}{s^2}\cos\varphi, \qquad (2a)$$

$$Z'' + 2\xi Z' + \frac{1}{s^2}Z - \frac{K}{2s^2}(1 - \cos\tau)$$

$$\times \left(Y\sin\tau\cos\tau + Z\sin^2\tau\right)$$

$$= \frac{G}{s^2}\sin\varphi. \qquad (2b)$$

2.2 谐波平衡法求解

设方程(2)的解为

$$Y = A_0 + A_1 \cos(\tau) + B_1 \sin(\tau) + A_2 \cos(2\tau) + B_2 \sin(2\tau) + A_3 \cos(3\tau) + B_3 \sin(3\tau) + A_4 \cos(4\tau) + B_4 \sin(4\tau),$$
(3a)
$$Z = C_0 + C_1 \cos(\tau) + D_1 \sin(\tau) + C_2 \cos(2\tau) + D_2 \sin(2\tau) + C_3 \cos(3\tau) + D_3 \sin(3\tau) + C_4 \cos(4\tau) + D_4 \sin(4\tau),$$
(3b)

其中, A_i, B_i, C_i, D_i为待定系数.

将(3)式代入方程(2), 令各次谐波的系数之和 等于零, 可得18个关于*A_i*, *B_i*, *C_i*, *D_i*的代数方程, 解该方程即可得到18个待定系数, 写成矩阵形式 如下.

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}^{-1} * \boldsymbol{F}, \tag{4}$$

其中,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & C_0 & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$
(5)
$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 16G\cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16G\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$
(6)

$$134501-2$$

																			_
	α_1	3K	-2K	K	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	K	-2K	K	0	
	6K	α_2	4K	-2K	K	β_1	0	0	0	0	0	0	0	0	-2K	2K	-2K	K	
R =	-4K	K	α_3	3K	-2K	0	β_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	K	-2K	, (7)
	2K	-2K	3K	$lpha_4$	3K	0	0	β_3	0	0	0	0	0	0	2K	-K	0	K	
	0	K	-2K	3K	α_5	0	0	0	β_4	0	0	0	0	0	-K	2K	-K	0	
	0	β_5	0	0	0	$lpha_6$	2K	-2K	K	2K	-2K	0	2K	-K	0	0	0	0	
	0	0	β_6	0	0	2K	α_7	3K	-2K	-4K	2K	0	-K	2K	0	0	0	0	
	0	0	0	β_7	0	-2K	3K	α_8	3K	2K	-2K	K	0	-K	0	0	0	0	
	0	0	0	0	β_8	K	-2K	3K	$lpha_9$	0	K	-2K	K	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	K	-2K	K	0	α_{10}	K	2K	-K	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	-2K	2K	-2K	K	2K	α_{11}	0	2K	-K	β_9	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	K	-2K	4K	0	α_{12}	K	2K	0	β_{10}	0	0	
	0	0	0	0	0	2K	-K	0	K	-2K	2K	K	α_{13}	K	0	0	β_{11}	0	
	0	0	0	0	0	-K	2K	-K	0	0	-K	2K	K	α_{14}	0	0	0	β_{12}	
	2K	-2K	0	2K	-K	0	0	0	0	0	β_{13}	0	0	0	α_{15}	2K	2K	-K	
	-4K	2K	0	-K	2K	0	0	0	0	0	0	β_{14}	0	0	2K	α_{16}	K	2K	
	2K	-2K	K	0	-K	0	0	0	0	0	0	0	β_{15}	0	2K	K	α_{17}	K	
	0	K	-2K	K	0	0	0	0	0	0	0	0	0	β_{16}	-K	2K	K	α_{18}	

 $\begin{aligned} \vec{\mathbf{x}} \stackrel{\text{$\ensuremath{\pi}}}{=} & - 16 - 4K, \ \alpha_2 = -16s^2 + 16 - 3K, \\ \alpha_3 = -64s^2 + 16 - 4K, \ \alpha_4 = -144s^2 + 16 - 4K, \\ \alpha_5 = -256s^2 + 16 - 4K, \ \alpha_6 = -16s^2 + 16 - 2K, \\ \alpha_7 = -64s^2 + 16 - 4K, \ \alpha_8 = -144s^2 + 16 - 4K, \\ \alpha_{10} = 16 - 4K, \\ \alpha_{11} = -16s^2 + 16 - 2K, \ \alpha_{12} = -64s^2 + 16 - 4K, \\ \alpha_{13} = -144s^2 + 16 - 4K, \ \alpha_{14} = -256s^2 + 16 - 4K, \\ \alpha_{15} = -16s^2 + 16 - 6K, \ \alpha_{16} = -64s^2 + 16 - 4K, \\ \alpha_{17} = -144s^2 + 16 - 4K, \ \alpha_{18} = -256s^2 + 16 - 4K, \\ \alpha_{17} = -144s^2 + 16 - 4K, \ \alpha_{18} = -256s^2 + 16 - 4K, \\ \beta_1 = 32s^2\xi, \ \beta_2 = 64s^2\xi, \ \beta_3 = 96s^2\xi, \ \beta_4 = 128s^2\xi, \\ \beta_5 = -32s^2\xi, \ \beta_6 = -64s^2\xi, \ \beta_7 = -96s^2\xi, \ \beta_8 = -128s^2\xi, \ \beta_{13} = -32s^2\xi, \ \beta_{14} = -64s^2\xi, \\ \beta_{15} = -96s^2\xi, \ \beta_{16} = -128s^2\xi. \end{aligned}$

根据(4)式即可求得特定常数激励下系统的 振动响应,并可分析常数激励对各次谐波响应的 影响.

3 谐波响应分析

以下用 $\sqrt{A_i^2 + B_i^2}$ 和 $\sqrt{C_i^2 + D_i^2}$ 分别表示系 统在垂直方向和水平方向的各次谐波响应分量, 用响应-转速-常数激励三维图表达系统响应与转 速及常数激励的关系,所用系统结构参数如下式 所示:

$$m = 32.1 \text{ kg}, \quad k = 5 \times 10^7 \text{ Nm}^{-1},$$

 $\xi = 0.01, \qquad K = 0.1.$ (8)

3.1 常数激励大小对系统振动响应的影响

系统振动响应的各次谐波分量与转速及常数 激励大小的关系图如图3至图7所示,其中常数激 励作用方向取 $\varphi = 0$. 总体上, 各次谐波分量随常 数激励的增大而增加,且常数激励为0时,各次谐 波分量几乎为零,表明常数激励对系统参激响应起 决定性作用. 在零次谐波分量(图3)中, 垂直方向 幅值与常数激励的大小成近似线性关系,且几乎不 受转速影响,而水平方向幅值几乎保持为零,只有 在1/3,1/2和1 倍临界转速附近出现较小峰值. 在 一次谐波分量(图4)中,垂直方向幅值和水平方向 幅值在临界转速处出现幅值,且幅值随常数激励的 增大而增加,但两方向上幅值并不相等,这是由于 裂纹对转轴刚度的影响在两方向上不对称造成的. 在二次谐波分量(图5),三次谐波分量(图6)以及 四次谐波分量(图7)中,垂直方向幅值和水平方向 幅值与转速及常数激励大小的关系几乎相同,且分











图 5 (网刊彩色) 二次谐波分量与转速及常数激励大小的关系图 (a) 垂直方向; (b) 水平方向



图 6 (网刊彩色) 三次谐波分量与转速及常数激励大小的关系图 (a) 垂直方向; (b) 水平方向







图 8 (网刊彩色) 振幅与转速及常数激励大小的关系图 (a) 垂直方向; (b) 水平方向

别在1/4,1/3,1/2临界转速处出现幅值,并且幅值 随常数激励的增大而增加.从数量级上看,二次谐 波分量和三次谐波分量与一次谐波分量的量级接 近,但四次谐波分量与一次谐波分量相比要小一个 量级,表明在系统的参激超谐响应中,二次谐波和 三次谐波为主要频率成分,这和系统振幅与转速及 常数激励大小的关系图一致,如图8所示.

3.2 常数激励作用方向的影响

系统振动响应的各次谐波分量与转速及常数 激励作用方向的关系图如图 9 至图 13 所示,其中常 数激励大小取G = 5. 零次谐波分量(图9)受常数 激励作用方向的影响很大,在垂直方向及水平方向 上其分量大小与常数激励在该方向上的投影成正 比.在一次谐波分量(图10)中,垂直方向幅值和水 平方向幅值在临界转速处出现幅值,且幅值随常数 激励作用方向的变化而改变,并且两方向上幅值变 化趋势相同,表明常数激励的作用方向对一次谐波 响应的影响很大.在二次谐波分量(图11),三次谐 波分量(图12)以及四次谐波分量(图13)中,垂直 方向幅值和水平方向幅值与转速及常数激励作用 方向的关系几乎相同,且分别在1/4,1/3,1/2临界



图 9 (网刊彩色)零次谐波分量与转速及常数激励作用方向的关系图 (a) 垂直方向; (b) 水平方向







图 11 (网刊彩色) 二次谐波分量与转速及常数激励作用方向的关系图 (a) 垂直方向; (b) 水平方向







图 13 (网刊彩色)四次谐波分量与转速及常数激励作用方向的关系图 (a) 垂直方向; (b) 水平方向



图 14 (网刊彩色) 振幅与转速及常数激励作用方向的关系图 (a) 垂直方向; (b) 水平方向

转速处出现幅值,然而,随着常数激励作用方向的 变化,幅值改变并不明显,表明系统参激超谐响应 对常数激励作用方向并不敏感.系统振幅与转速及 常数激励作用方向的关系图如图14所示,图中,常 数激励作用方向对参激主共振响应的影响较大,但 对参激超谐共振响应影响很小,这与各次谐波分量 与转速及常数激励作用方向的关系图一致.

4 结 论

本文以一个简单的机动飞行裂纹转子模型为 例,研究了常数激励对该类两自由度参激系统振动 响应的影响.为突显常数激励的作用,未考虑转子 的偏心激励. 采用谐波平衡法分析了常数激励的大 小及作用方向对系统各次谐波响应的影响,并用振 幅-转速-常数激励三维图从宏观上反映常数激励 对系统振动响应的影响.结果表明,在该两自由度 参激系统中,常数激励对系统的参激主共振及超谐 共振起决定性作用,且所有共振响应的幅值随常数 激励的增大而增加,常数激励的作用方向对参激主 共振响应的幅值影响较大,但对参激超谐共振响应 的幅值影响很小,可见,常数激励在系统中起到放 大超谐共振响应的作用.本文的研究结果从理论上 揭示了常数激励对参激系统的作用,同时,在工程 上为转轴裂纹故障的早期检测提供新的策略: 对转 子系统加常数激励,放大由裂纹引起的超谐响应信 号,这就能够检测到浅裂纹情况下不明显的超谐响 应信号.

参考文献

Ji J C, Chen Y S 1997 J. Vib. Eng. 10 491 (in Chinese)[季进臣, 陈予恕 1997 振动工程学报 10 491]

- [2] Xiao X W, Xiao G H, Yang S Z 2002 J. Vib. Eng. 15 315 (in Chinese) [肖锡武, 肖光华, 杨叔子 2002 振动工程 学报 15 315]
- [3] Ying Z G, Chen Z H, Ni Y Q, Gao Z M 2007 Chinese J. Comput. Mech. 24 678 (in Chinese) [应祖光, 陈昭晖, 倪 一清, 高赞明 2007 计算力学学报 24 678]
- [4] Wei K X, Meng G 2008 Chinese J. Theor. Appl. Mech.
 40 273 (in Chinese) [魏克湘, 孟光 2008 力学学报 40 273]
- [5] Shi P M, Li J Z, Liu B, Han D Y 2011 Acta Phys. Sin.
 60 094501 (in Chinese) [时培明, 李纪召, 刘彬, 韩东颖 2011 物理学报 60 094501]
- [6] Zhu W Q 1990 Appl. Math. Mech. 11 155 (in Chinese)
 [朱位秋 1990 应用数学和力学 11 155]
- [7] Xie W X, Xu W, Lei Y M, Cai L 2005 Acta Phys. Sin.
 54 1105 (in Chinese)[谢文贤, 徐伟, 雷佑铭, 蔡力 2005 物 理学报 54 1105]
- [8] Niu Y J, Xu W, Rong H W, Wang L, Feng J Q 2009 *Acta Phys. Sin.* 58 2983 (in Chinese) [牛玉俊, 徐伟, 戎 海武, 王亮, 冯进钤 2009 物理学报 58 2983]
- [9] Tu Z, Peng H, Wang F, Ma H 2013 Acta Phys. Sin. 62
 030502 (in Chinese) [屠浙, 彭皓, 王飞, 马洪 2013 物理学报 62 030502]
- [10] Zhang Y Q, Chen J J, Tang L D, Lin L G 2009 J. Mech. Strength 31 871 (in Chinese) [张耀强, 陈建军, 唐六丁, 林 立广 2009 机械强度 31 871]
- [11] Chen G 2007 China Mech. Eng. 18 2773 (in Chinese)[陈 果 2007 中国机械工程 18 2773]
- [12] Bai C Q, Xu Q Y, Zhang X L 2006 Appl. Math. Mech.
 27 159 (in Chinese)[白长青, 许庆余, 张小龙 2006 应用数 学和力学 27 159]
- [13] Yang J D, Xu P M, Wen B C 2002 Acta Mech. Solida Sin. 23 115 (in Chinese)[杨积东, 徐培民, 闻邦椿 2002 固 体力学学报 23 115]
- [14] Yang J D, Xu P M, Wen B C 2002 Chinese J. Appl. Mech. 19 10 (in Chinese)[杨积东, 徐培民, 闻邦椿 2002 应 用力学学报 19 10]
- [15] Leng X L, Meng G, Zhang T, Fang T 2006 J. Vib. Eng.
 19 212 (in Chinese)[冷小磊, 孟光, 张韬, 方同 2006 振动 工程学报 19 212]
- [16] Lin F S, Meng G 2002 J. Mech. Strength 24 320 (in Chinese)[林富生, 孟光 2002 机械强度 24 320]

- [17] Zhu C S, Chen Y J 2006 Acta Aeronaut. Astronaut. Sin.
 27 835 (in Chinese) [祝长生, 陈拥军 2006 航空学报 27 835]
- [18] Wei H T, Fan X M 2001 Tenth Conference of the structural strength and vibration of aero-engine Anhui, China, October 1, 2000 p315 (in Chinese) [魏海涛, 范晓明 2001 中国航空学会第十届航空发动机结构强度与振动会议 论文集 2000 p315]
- [19] Xu M, Liao M F, Liu Q Z 2002 J. Aerospace Power 17
 105 (in Chinese) [徐敏, 廖明夫, 刘启洲 2002 航空动力学

报 **17** 105]

- [20] Yang Y F, Ren X M, Qin W Y 2007 J. Aerospace Power
 22 1007 (in Chinese) [杨永锋, 任兴民, 秦卫阳 2007 航空 动力学报 22 1007]
- [21] Yu Y B 2009 Master Thesis (Xi'an: Xi'an Technological University) (in Chinese) [于渊博 2009 硕士学位论文(西 安:西安工业大学)]
- [22] Hou L, Chen Y S, Cao Q J 2014 Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 19 286
- [23] Hou L, Chen Y S 2014 Sci. China Technol. Sc. 57 203

Constant-excitation caused response in a class of parametrically excited systems with two degrees of freedom^{*}

Hou Lei^{1)†} Chen Yu-Shu¹⁾ Li Zhong-Gang¹⁾²⁾

(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)
 (School of Mechatronics Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

 (Received 9 November 2013; revised manuscript received 29 January 2014)

Abstract

This paper focuses on the response in parametrically excited systems caused by constant excitation. Taking a maneuvering cracked rotor system as an example, we formulate the vibration equations with two degrees of freedom, in which the breathing of the crack constitutes parametric excitation, and the maneuver load of the maneuvering rotor is simplified as a constant excitation, and it is supposed that the rotor system is balanced without the consideration of eccentricity. By solving the equations with harmonic balance method, each order of harmonic components related with the rotating speed and the constant excitation is derived to analyze the corresponding resonance of the system. Results show that the constant excitation plays a decisive role in the parametrically excited primary and super-harmonic resonances of the system that agrees with the gravity dominance in common cracked rotor systems without maneuver load. And the stronger the constant excitation, the greater the resonances. Moreover, the orientation of the constant effect on the parametrically excited super-harmonic resonances. Results implies that constant excitation may increase the parametrically excited super-harmonic resonances of the cracked rotor systems, which is disadvantageous to the operating of the system. From another point of view, however, constant excitation can be used for early detection of crack faults in rotor systems.

Keywords: parametrically excited system with two degrees of freedom, constant excitation, cracked rotor system, maneuver load

PACS: 45.20.dc, 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.63.134501

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10632040, 11302058).

[†] Corresponding author. E-mail: houlei@hit.edu.cn