物理学报 Acta Phys. Sin. Vol. 63, No. 13 (2014) 138701

基于全变分最小化和快速一阶方法的低剂量CT有序子集图像重建*

毛宝林[1)] 陈晓朝[1)] 孝大宇[1)] 范晟昱[1)] 滕月阳[1)] 康雁[1)2)†]

1) (东北大学中荷生物医学与信息工程学院, 沈阳 110819)

2) (东北大学医学影像计算教育部重点实验室, 沈阳 110819)

(2014 年 3 月 31 日收到; 2014 年 5 月 5 日收到修改稿)

低剂量计算机断层成像 (computed tomography, CT) 具有减少 X 射线对患者的伤害的优势. 本文主要针对从不完备投影数据重建出高质量低剂量 CT 图像的问题. 通常, 这个问题可以通过统计图像重建方法来实现, 而统计重建算法需要非常多的迭代次数, 导致了巨大的计算时间压力, 以至于很难应用在实践中. 为解决此问题, 本文提出一种有序子集重建算法, 该算法结合了全变分最小化和快速一阶方法以减少重建的迭代次数, 采用 Split Bregman 交替方向法求解上述优化问题, 利用投影到凸集合的方法加快迭代的收敛速率. 实验结果表明, 在同样的迭代次数下, 本文提出的方法与基于有序子集的一阶方法相比较, 相对重建误差的下降速度更快.

关键词: 全变分, 投影到凸集合, 交替方向法, 有序子集

PACS: 87.59.–e, 42.30.Wb, 81.70.Tx, 07.85.–m **DOI:** 10.7498/aps.63.138701

1 引 言

由于 CT 的广泛使用, 导致患者吸收的 X 射线辐射剂量越来越高, 这对身体健康造成极大的隐患 [1]. 在保证成像质量的前提下, 减少放射剂量具有非常重要的现实意义和应用价值. 低剂量 CT 通常采用脉冲调制的方式控制球管产生 X 射线, 同时减少探测器采集的投影数据, 以降低患者吸收的辐射剂量. 在减少探测器采集投影数的扫描方式下, 成像问题变为一个病态反问题. 滤波反投影方法重建出的图像有伪影严重、视觉质量差等问题, 无法满足诊断的基本要求. 对于这种待求解的图像数据远大于已获取的投影数据的病态反问题, 迭代重建方法可以获得更好的图像质量. 因此, 低剂量 CT 迭代重建算法成为近年的研究热点.

2006 年, Candes [2,3], Donoho [4] 等提出了压缩感知 (compressed sensing, CS) 理论. CS 理论利用信号在变换域稀疏的性质, 突破了奈奎斯特-香农采样定理, 可以用较低的频率采集信号并重构出非常好的原始信号. 受 CS 理论的启发, 基于稀疏表达或稀疏约束的 CT 重建算法, 可以利用不完备投影数据重建出高质量的 CT 图像 [5]. 2014 年, 杨富强等 [6] 对 CT 不完备投影数据重建算法做了综述性研究, 其中对压缩感知理论在 CT 重建中的应用进行了详细的讨论.

通常, 全变分 (total variation, TV) [7–9] 和 l_1 范数是 CT 重建中图像稀疏约束的两种常用方式. 对于带约束的稀疏最小化模型的求解, 出现很多新的方法, 最具典型的两类方法是交替方向法和一阶方法, 其中交替方向法可以分为乘子交替方向法 (alternating direction method of multipliers, ADMM) [10] 和 Split Bregman 法 [11]. ADMM 将原始问题转换为增广拉格朗日问题, 在每一步迭代中,

* 国家自然科学基金 (批准号: 61372014, 61201053, 61302013)、高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 20110042110036) 和东北大学基础研究计划 (批准号: N110619001) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: kangy@neusoft.

 http://wulixb.iphy.ac.cn

固定原始变量或对偶变量的值, 求得另一个变量的值. 交替方向法的子问题经常需要计算矩阵的逆, 这使得计算开销变得很大. 2013年, 王林元等[12]利用线性近似的方式, 通过快速傅里叶变换解决伪逆求解的速度问题, 结果表明近似计算的成像结果并没有明显的精度损失. 2012年, Ramani 等[13], Matakos等[14]采用快速傅里叶变换计算对称循环矩阵的逆, 在重建中只需要计算一次逆矩阵, 并将就算出的逆矩阵作为后续迭代的预条件. 2013年, Zhang等[15]采用交替方向法和全变分最小化结合的方式重建有限角度和不完备投影数据. 2013 年, Sidky等[16]利用一阶凸可行性算法对有限扫描角度的圆轨迹扇束CT进行重建, 其中原始对偶间隙可以是负值, 经过多次迭代得到的最优解能够保证间隙最终为零. 2010年, 受Nestorov一阶方法[17]的启发, Choi等[18]提出一阶方法和全变分相结合的CT重建方法, 取得了较好的效果. 2012年, 在一阶方法的基础上, Jensen 等[19]研究了最优的一阶方法, 该方法在每一次迭代中, 通过计算选择最优的数来替代Lipschitz常数. 通过三维CT图像重建, 最优的一阶方法比原始的一阶方法收敛速度更快.

尽管一阶方法及其改进方法可以得到很好的重建效果, 但需要通过系统矩阵计算Lipschitz常数, 而CT 重建的系统矩阵维数较高, 使得计算开销和计算机内存都受到限制. 为了解决迭代重建算法收敛速度和占用内存开销的问题, 受快速迭代收缩阈值算法[20−23]的启发, 本文提出一阶方法和全变分方法相结合的重建模型, 采用交替方向的Split Bregman法求解模型, 应用有序子集对重建进行加速[24−26], 并将该模型应用于低剂量的CT 图像重建, 利用快速一阶方法和投影到凸集合来加快迭代的收敛速率. 通过对比不同数量Shepp Logan投影数据重建和真实数据重建的实验结果, 与滤波反投影重建算法和未采用快速方法的一阶方法相比较, 本文提出的算法在重建图像视觉效果有明显改进, 并且在相对重建误差上收敛更快.

2 全变分最小化和快速一阶方法的有序子集图像重建

2.1 一阶方法

基于统计的CT图像重建方法可以表示为最小化由数据拟合项构成的代价函数和由稀疏表示构成的惩罚函数的组合, 统计的CT图像重建问题可表述为一类非限制的凸函数优化问题

$$\min_{\boldsymbol{u}}\{f(\boldsymbol{u})+g(\boldsymbol{u})\}, \tag{1}$$

式中, $\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n_+$ 为待重建图像, $g(\boldsymbol{u})$可以是连续非平滑凸函数, $f(\boldsymbol{u})$是一个平滑凸函数, 并且$f(\boldsymbol{u})$的梯度在Lipschitz 常数下连续, 即

$$\|\nabla f(\boldsymbol{u})-\nabla f(\boldsymbol{v})\|_2\leqslant L(f)\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|_2, \tag{2}$$

其中, $L(f)>0$是一个Lipschitz常数. 根据平滑凸函数的性质, 函数$f(\boldsymbol{u})$满足下面条件:

$$f(\boldsymbol{u})\geqslant f(\boldsymbol{v})+\langle\nabla f(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\rangle, \tag{3}$$

其中, 不等式右边是$f(\boldsymbol{u})$的下界, 即对应点$\boldsymbol{v}$的切线. 如果$f(\boldsymbol{u})$ 在Lipschitz梯度下是凸函数, 则$f(\boldsymbol{u})$有一族局部的凸的二次函数的上界, 即

$$\begin{aligned}&f(\boldsymbol{v})+\langle\nabla f(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\rangle\leqslant f(\boldsymbol{u})\\ \leqslant\ &f(\boldsymbol{v})+\langle\nabla f(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\rangle+\frac{L(f)}{2}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|_2^2.\end{aligned} \tag{4}$$

2.2 一阶方法的迭代形式

优化方法中的最速下降法, 与(3)式相似, 即

$$\boldsymbol{u}^{k+1}=\boldsymbol{u}^k-t^{k+1}\nabla f(\boldsymbol{u}^k), \tag{5}$$

其中$\boldsymbol{u}^{k+1}$为当前迭代所求值, $\boldsymbol{u}^k$是已知的上一次迭代所得数值, t^{k+1}为下降步长, 通过(4)式得出, (5)式可以被解释为下面二次优化问题的解:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}^{k+1}=\ &\arg\min_u\Big\{f(\boldsymbol{u}^k)+\langle(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^k),\nabla f(\boldsymbol{u}^k)\rangle\\ &+\frac{1}{2t^{k+1}}\big\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^k\big\|_2^2\Big\},\end{aligned} \tag{6}$$

通过凑平方, 并且忽略常数项, 上式变为如下形式:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}^{k+1}=\ &\arg\min_u\Big\{\frac{1}{2t^{k+1}}\\ &\times\big\|\boldsymbol{u}-\big(\boldsymbol{u}^k-t^{k+1}\nabla f(\boldsymbol{u}^k)\big)\big\|_2^2\Big\}.\end{aligned} \tag{7}$$

通过(7)式得出, (1)式的优化问题等价于下面的优化问题:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}^{k+1}=\ &\arg\min_u\Big\{\frac{1}{2t^{k+1}}\big\|\boldsymbol{u}-\big(\boldsymbol{u}^k\\ &-t^{k+1}\nabla f(\boldsymbol{u}^k)\big)\big\|_2^2+g(\boldsymbol{u})\Big\}.\end{aligned} \tag{8}$$

2.3 低剂量CT图像重建

本文主要解决圆轨迹扇束CT的不完备投影数据重建问题, 离散化的CT系统重建模型为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{p}, \tag{9}$$

其中,$\boldsymbol{u}$为待求解的CT图像向量, $\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n_+$, $n=n_x\times n_y$, n_x 为待求解图像的行数, n_y 为待求解图像的列数, $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 是系统矩阵,可以通过

计算射线穿过对应待求解图像像素的长度求得, $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^m$ 是投影数据. 在不完备采集投影数据的情况下,上述线性方程组个数小于未知数个数 $(m < n)$, $\boldsymbol{u}$ 有无穷多个解, 为了得到所需的目标解,通常将上述问题转换为最小二乘问题加上先验信息的无约束优化问题. 对于低剂量CT 图像重建问题, 本文采用一个数据拟合项和一个全变分正则化项相结合的方式进行优化计算, 即

$$\min_u \left\{ \frac{1}{2} \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{p}\|_2^2 + \mu \|\boldsymbol{u}\|_{\mathrm{TV}} \right\}, \tag{10}$$

其中

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathrm{TV}} = \sum_i \left((\nabla_x \boldsymbol{u})_i^2 + (\nabla_y \boldsymbol{u})_i^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$(\nabla_y \boldsymbol{u})_i = \boldsymbol{u}_{i+n_x} - \boldsymbol{u}_i,$$

$$(\nabla_x \boldsymbol{u})_i = \boldsymbol{u}_{i+1} - \boldsymbol{u}_i,$$

参数 $\mu > 0$ 作为数据拟合项和正则化项的加权折中. 通过 (8) 式可以看出, (10) 式的解与下面问题的解等价:

$$\boldsymbol{u}^{k+1} = \arg\min_u \left\{ \frac{1}{2t^{k+1}} \|\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u}^k - t^{k+1} \nabla f(\boldsymbol{u}^k))\|_2^2 + \mu \|\boldsymbol{u}\|_{\mathrm{TV}} \right\}, \tag{11}$$

上式等价于

$$\boldsymbol{u}^{k+1} = \arg\min_u \left\{ \frac{1}{2t^{k+1}} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{c}^{k+1}\|_2^2 + \mu \sum_i \left((\nabla_x \boldsymbol{u})_i^2 + (\nabla_y \boldsymbol{u})_i^2 \right)^{1/2} \right\}, \tag{12}$$

其中,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}^{k+1} &= \boldsymbol{u}^k - t^{k+1} \nabla f(\boldsymbol{u}^k) \\ &= \boldsymbol{u}^k - 2t^{k+1} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{p}). \end{aligned}$$

本文采用Split Bregman 方法求解 (12) 式. 首先设置 $\boldsymbol{d}_x \approx \nabla_x \boldsymbol{u}$, 以及 $\boldsymbol{d}_y \approx \nabla_y \boldsymbol{u}$. 则, (12) 式与下面的Split Bregman 形式等价:

$$\min_{u, d_x, d_y} \left\{ \|(\boldsymbol{d}_x, \boldsymbol{d}_y)\|_2 + \frac{1}{2\mu t^{k+1}} \times \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{c}^{k+1}\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|\boldsymbol{d}_x - \nabla_x \boldsymbol{u} - \boldsymbol{b}_x\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|\boldsymbol{d}_y - \nabla_y \boldsymbol{u} - \boldsymbol{b}_y\|_2^2 \right\}, \tag{13}$$

其中

$$\|(\boldsymbol{d}_x, \boldsymbol{d}_y)\|_2 = \sum_i (d_{x,i}^2 + d_{y,i}^2)^{1/2}.$$

(13) 式的 $\boldsymbol{b}_x$ 和 $\boldsymbol{b}_y$ 起到了增强限制的作用, 可以通过Bregman 迭代得到合适的值. 通常, (13) 式的问题使用交替优化方法分解成更小的问题进行求解. 本文算法的具体步骤如下:

步骤1 初始化 $\boldsymbol{z}^{0,0} = \boldsymbol{u}^{0,0} = 0$, $w^{0,0} = 1$, ($\boldsymbol{z}^{0,0}$ 和 $w^{0,0}$ 为快速算法的中间变量);

步骤2 总迭代: $k = 0, 1, 2, \cdots, K$;

步骤3 有序子集迭代: $h = 0, 1, 2, \cdots, H-1$, (H 为子集个数);

步骤4 计算

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{u}^{k,h} - \frac{2}{L_h} \boldsymbol{A}_h^{\mathrm{T}} (A_h \boldsymbol{u}^{k,h} - \boldsymbol{p}_h),$$

其中 $\boldsymbol{A}_h$ 为第 h 子集的系统矩阵, $\boldsymbol{p}_h$ 为第 h 子集的投影数据, L_h 为第 h 子集的Lipschitz 常数, $L_h = 2\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}_h \boldsymbol{A}_h^{\mathrm{T}})$, λ 为特征值;

步骤5 将 $\boldsymbol{c}$ 投影到凸集, $\boldsymbol{c} = \max(\boldsymbol{c}, 0)$;

步骤6 初始化 $\boldsymbol{u}^{k,h,0} = \boldsymbol{c}$, 以及 $\boldsymbol{d}_x^0 = \boldsymbol{d}_y^0 = \boldsymbol{b}_x^0 = \boldsymbol{b}_y^0 = 0$;

步骤7 将 $\boldsymbol{u}^{k,h,0}$ 位于重建视野外的像素设为0;

步骤8 交替求解迭代: $q = 0, 1, 2, \cdots$;

步骤9 计算

$$\boldsymbol{u}^{k,h,q+1} = \arg\min_u \left\{ \frac{L_h}{2\mu} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{c}\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|\boldsymbol{d}_x^q - \nabla_x \boldsymbol{u} - \boldsymbol{b}_x^q\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|\boldsymbol{d}_y^q - \nabla_y \boldsymbol{u} - \boldsymbol{b}_y^q\|_2^2 \right\},$$

本文使用Gauss-Seidel 方法可以得到 $\boldsymbol{u}^{k,h,q+1}$ 的值, 即

$$\begin{aligned} & u_i^{k,h,q+1} \\ &= \frac{\lambda\mu}{L_h + 4\lambda\mu} \big(u_{i+1}^{k,h,q} + u_{i-1}^{k,h,q} + u_{i+n_x}^{k,h,q} + u_{i-n_x}^{k,h,q} \\ &\quad + d_{x,i-1}^q - d_{x,i}^q + d_{y,i-n_x}^q - d_{y,i}^q \big) \\ &\quad + \frac{\lambda\mu}{L_h + 4\lambda\mu} \big(-b_{x,i-1}^q + b_{x,i}^q - b_{y,i-n_x}^q + b_{y,i}^q \big) \\ &\quad + \frac{L_h}{L_h + 4\lambda\mu} c_i; \end{aligned}$$

步骤10 计算 $\boldsymbol{d}_x^{q+1}$ 和 $\boldsymbol{d}_y^{q+1}$,

$$\begin{aligned} & \left(\boldsymbol{d}_x^{q+1}, \boldsymbol{d}_y^{q+1} \right) \\ &= \arg\min_{d_x, d_y} \left\{ \|(\boldsymbol{d}_x, \boldsymbol{d}_y)\|_2 + \frac{\lambda}{2} \|\boldsymbol{d}_x - \nabla_x \boldsymbol{u}^{k,h,q} - \boldsymbol{b}_x^q\|_2^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda}{2} \|\boldsymbol{d}_y - \nabla_y \boldsymbol{u}^{k,h,q} - \boldsymbol{b}_y^q\|_2^2 \right\}; \end{aligned}$$

应用收缩算法, 解为

$$\boldsymbol{d}_x^{q+1} = \max(s^q - 1/\lambda, 0) \frac{\nabla_x \boldsymbol{u}^{k,h,q} + \boldsymbol{b}_x^q}{s^q},$$

$$\boldsymbol{d}_y^{q+1} = \max(s^q - 1/\lambda, 0) \frac{\nabla_y \boldsymbol{u}^{k,h,q} + \boldsymbol{b}_y^q}{s^q},$$

$$s^q = \left(|\nabla_x \boldsymbol{u}^{k,h,q} + \boldsymbol{b}_x^q|^2 + |\nabla_y \boldsymbol{u}^{k,h,q} + \boldsymbol{b}_y^q|^2 \right)^{1/2};$$

步骤 11　计算 $\boldsymbol{b}_x^{q+1}$ 和 $\boldsymbol{b}_y^{q+1}$,

$$\boldsymbol{b}_x^{q+1} = \boldsymbol{b}_x^{q} + (\nabla_x \boldsymbol{u}^{k,h,q+1} - \boldsymbol{d}_x^{q+1}),$$

$$\boldsymbol{b}_y^{q+1} = \boldsymbol{b}_y^{q} + (\nabla_y \boldsymbol{u}^{k,h,q+1} - \boldsymbol{d}_y^{q+1});$$

步骤 12　当 $\|\boldsymbol{u}^{k,h,q+1} - \boldsymbol{u}^{k,h,q}\|_2 >$ 某一给定值, 返回步骤 8; 否则, $\boldsymbol{z}^{k,h+1} = \boldsymbol{u}^{k,h,q+1}$;

步骤 13　计算

$$w^{k,h+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\left(w^{k,h}\right)^2}}{2},$$

$$\boldsymbol{u}^{k,h+1} = \boldsymbol{z}^{k,h+1} + \left(\frac{w^{k,h-1}}{w^{k,h+1}}\right)(\boldsymbol{z}^{k,h+1} - \boldsymbol{z}^{k,h}),$$

返回步骤 3;

步骤 14　$\boldsymbol{u}^{k+1,0} = \boldsymbol{u}^{k,H}$, $w^{k+1,0} = w^{k,H}$, 返回步骤 2.

3　实验结果

为了评估算法的性能, 选取 Matlab 中修正后的 Shepp Logan 体模作为仿真数据, 投影数据采取均匀扫描 360° 范围内所需的投影个数, 仿真数据扫描与重建参数列在表 1 中. 本文采用相对重建误差 (relative reconstruction error, RRE) 比较各个重建算法的收敛速度, 其表达式为

$$\mathrm{RRE} = \frac{\|\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}^*\|_2^2}{\|\boldsymbol{u}^*\|_2^2},$$

其中, $\boldsymbol{u}^*$ 为最优的原始体模数据. 相对重建误差越小, 表明重建图像的整体质量越好.

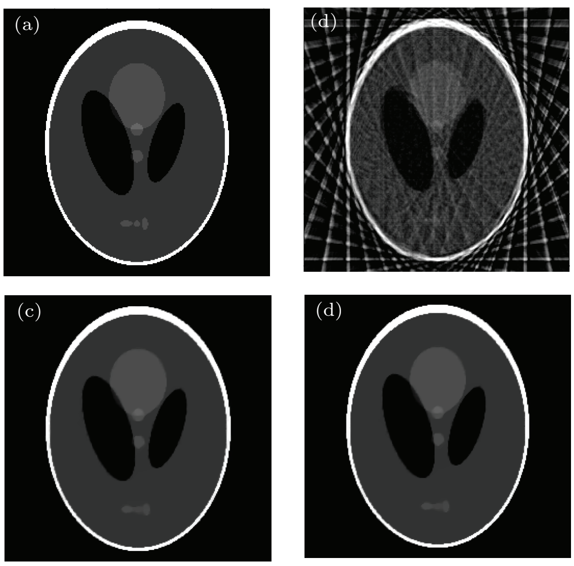

图 1　36 个投影数据未分有序子集的重建图像　(a) 原始模体数据; (b) FBP 方法; (c) 一阶方法; (d) 快速一阶方法

图 1 显示了 36 个投影数据未分有序子集经过 1000 次迭代的重建结果, 可以看出两种迭代重建算法明显比滤波反投影方法的成像效果好. 图 2 (a) 比较不同重建算法重建后的图像在第 128 行部分数据的剖线, 图 2 (b) 比较不同重建算法重建后的图像在第 128 列部分数据的剖线, 可以看出快速一阶方法的重建结果比一阶方法和滤波反投影 (Filtered Back Projection,FBP) 方法的重建结果更接近于原始体模数据. 图 3 显示了两种迭代重建算法的收敛速率, 可以看出本文提出的快速一阶方法比一阶方法的收敛速度更快. 从表 2 可以看出, 经过 1000 次迭代, 一阶方法和快速一阶方法的相对重建误差分别为 0.0923 和 0.0837.

表 1　仿真数据扫描与重建参数

扫描参数	值
探测器单元数量	369
探测器单元尺寸/mm	2
球管到探测器距离/mm	400
球管到旋转中心距离/mm	200
重建图像大小	256 × 256
像素尺寸/mm	1

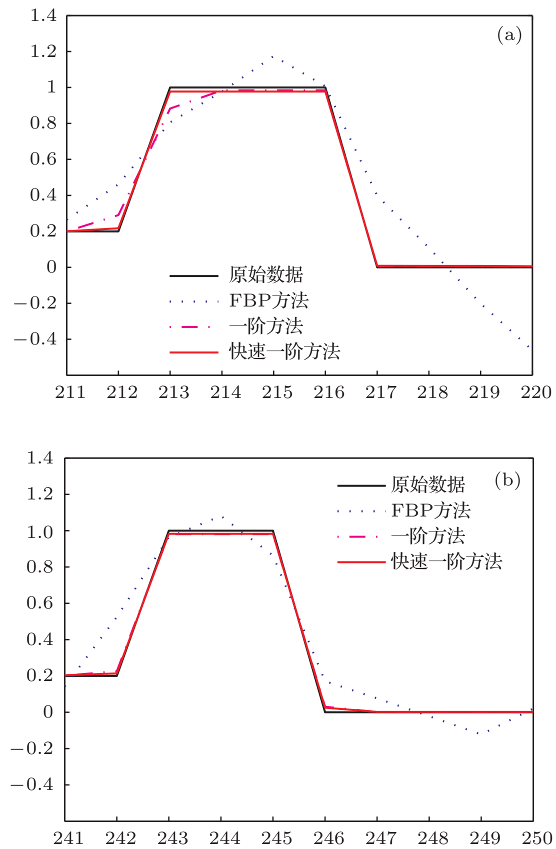

图 2　36 个投影数据重建图像的剖线比较　(a) $\boldsymbol{u}(128, 211:220)$; (b) $\boldsymbol{u}(241:250, 128)$

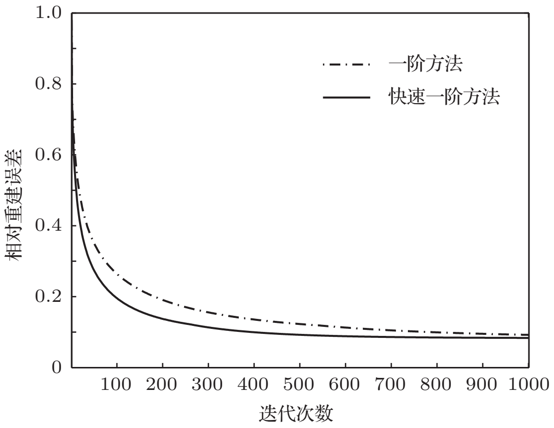

图3 36个投影数据的RRE随迭代次数下降曲线图

表2 36个投影数据相对重建误差比较

迭代次数	相对重建误差 (RRE)	
	一阶方法	快速一阶方法
200	0.1905	0.1372
400	0.1355	0.0997
600	0.1129	0.0885
800	0.0994	0.0849
1000	0.0923	0.0837

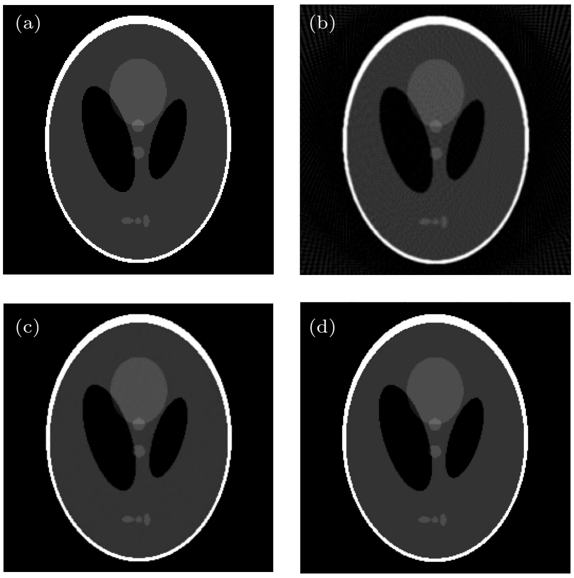

图4 180个投影数据分为5个有序子集的重建图像 (a)原始模体数据; (b) FBP方法; (c)一阶方法; (d)快速一阶方法

图4显示了180个投影数据分为5个有序子集经过100次迭代的重建结果, 图5 (a)和(b)分别比较了180个投影数据分为5个有序子集的不同重建算法重建后的图像在第128行和第128列部分数据的剖线, 可以看出, 相比较基于有序子集的一阶方法, 基于有序子集的快速一阶方法的剖线和原始体模的剖线更加相近. 图6显示了两种迭代重建算法的收敛速度. 从表3 可以看出, 经过100次迭代, 一阶方法和快速一阶方法的相对重建误差分别为0.0826和0.0553, 在相同的迭代次数下, 快速一阶方法的收敛速度明显更快.

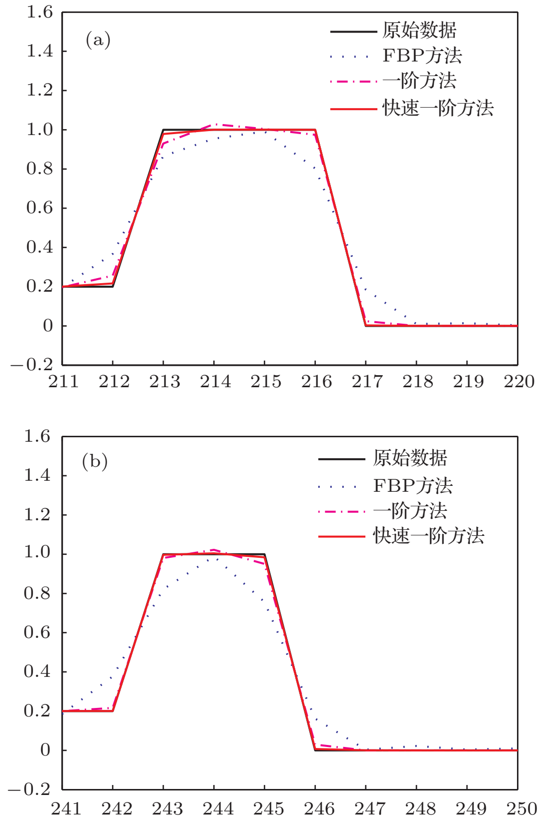

图5 180个投影数据分为5个有序子集重建图像的剖线比较 (a) $\boldsymbol{u}(128, 211:220)$; (b) $\boldsymbol{u}(241:250, 128)$

表3 180个投影数据相对重建误差比较

迭代次数	相对重建误差 (RRE)	
	一阶方法	快速一阶方法
20	0.2122	0.1471
40	0.1436	0.0962
60	0.1138	0.0756
80	0.0947	0.0641
100	0.0826	0.0553

为了更好地验证提出的算法, 本文采用真实数据进行重建. 被扫描物体为一个核桃, 放射电压为60 kV, 放射电流为2 mA, 扫描几何为圆轨迹锥束扫描. 扫描一周均匀采集180个投影数据, 取不同角度的投影中心层, 分为5个有序子集进行二维重建. 表4列出了具体扫描几何及重建参数. 图7显

示了经过100次迭代后的重建结果, 可以看出, 经过有序子集重建后, 快速一阶方法比一阶方法的重建图像噪声更小、结果更好.

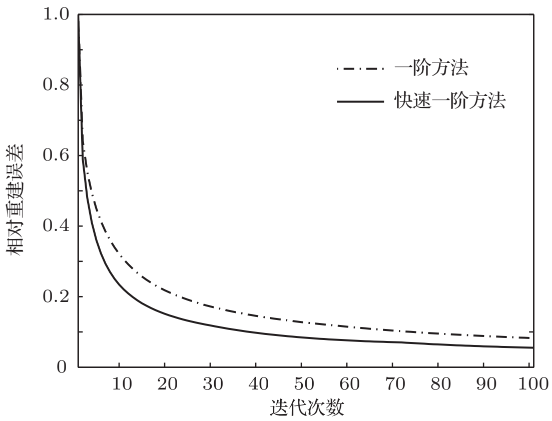

图6 180个投影数据的RRE随迭代次数下降曲线图

表4 真实数据扫描与重建参数

扫描参数	值
探测器单元数量	512
探测器单元尺寸/mm	0.254
球管到探测器距离/mm	673.5
球管到旋转中心距离/mm	421.8
重建图像大小	512 × 512
像素尺寸/mm	0.125

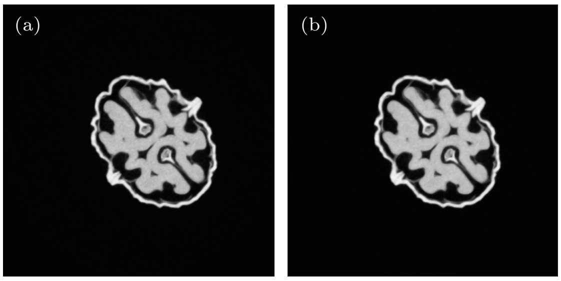

图7 180个投影数据分为5个有序子集真实数据重建图像结果 (a) 一阶方法; (b) 快速一阶方法

4 结 论

本文针对低剂量CT迭代重建算法在收敛速度慢和内存占用大的问题, 提出了基于快速一阶方法的有序子集图像重建算法. 实验结果表明, 相对于有序子集的一阶方法, 本文提出的方法收敛速度更快, 仿真重建结果更接近于原始体模数据, 真实数据的重建结果噪声更少. 对比两种算法的计算复杂度, 可以看出快速一阶方法仅在一阶方法的基础上增加了关键的步骤13, 而这一步相对于每次迭代的计算时间而言非常小. 本文最多采用180个投影数据, 并将其分为5个有序子集进行重建, 而商用螺旋CT多采用1000幅左右的投影数据, 在投影数据增加的情况下, 达到同样的相对重建误差需要的迭代次数会减少很多. 同时, 一次迭代的计算时间长是迭代算法与生俱来的缺点, 有效的GPU加速方法得到了越来越多的研究, 迭代重建的时间得到极大的改善. 从本文提出的重建算法的具体步骤可以看出, 提出的快速一阶方法很容易采用GPU进行加速, 这也使得本文提出的方法具有一定的实用价值.

参考文献

[1] Brenner D J, Hall E J 2007 *New Engl. J. Med.* **357** 2277

[2] Candès E J, Romberg J, Tao T 2006 *IEEE Trans. Info. Theory* **52** 489

[3] Candès E J, Tao T 2006 *IEEE Trans. Info. Theory* **52** 5406

[4] Donoho D 2006 *IEEE Trans. Info. Theory* **52** 1289

[5] Wang L Y, Li L, Yan B, Jiang C S, Wang H Y, Bao S L 2010 *Chin. Phys.B* **19** 088106

[6] Yang F Q, Zhang D H, Huang K D, Wang K, Xu Z 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 058701 (in Chinese)[杨富强, 张定华, 黄魁东, 王鹍, 徐哲 2014 物理学报 **63** 058701]

[7] Rudin L, Osher S, Fatemi E 1992 *Physica D* **60** 259

[8] Li S P, Wang L Y, Yan B, Li L, Liu Y J 2012 *Chin. Phys. B* **21** 108703

[9] Gu Y F, Yan B, Li L, Wei F, Han Yu, Chen J 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 018701 (in Chinese)[古宇飞, 闫镔, 李磊, 魏峰, 韩玉, 陈健 2014 物理学报 **63** 018701]

[10] Boyd S, Parikh N, Chu E, Peleato B, Eckstein J 2010 *Foundations and Trends®in Machine Learning* **3** 1

[11] Goldstein T, Osher S 2009 *SIAM J. Imaging Sci.* **2** 323

[12] Wang L Y, Zhang H M, Cai A L, Yan B, Li L, Hu G E 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 198701 (in Chinese)[王林元, 张瀚铭, 蔡爱龙, 闫镔, 李磊, 胡国恩 2013 物理学报 **62** 198701]

[13] Ramani S, Fessler J A 2012 *IEEE Trans. Med. Imag.* **31** 677

[14] Matakos A, Ramani S, Fessler J A 2013 *IEEE Trans. Image Process.* **22** 2019

[15] Zhang H M, Wang L Y, Yan B, Li L, Xi X Q, Lu L Z 2013 *Chin. Phys.B* **22** 078701

[16] Sidky E Y, Jørgensen J S, Pan X 2013 *Med. Phys.* **40** 031115

[17] Nesterov Y E 1983 *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **269** 543 (in Russian)

[18] Choi K, Wang J, Zhu L, Suh T S, Boyd S, Xing L 2010 *Med. Phys.* **37** 5113

[19] Jensen T L, Jørgensen J S, Hansen P C, Jensen S H 2012 *BIT Numer. Math.* **52** 329

[20] Beck A, Teboulle M 2009 *SIAM J. Imaging Sci.* **2** 183

[21] Daubechies I, Fornasier M, Loris I 2008 *J. Fourier Anal. Appl.* **14** 764

[22] Daubechies I, Defrise M, Mol C D 2004 *Comm. Pure Appl. Math.* **57** 1413

[23] Beck A, Teboulle M 2009 *IEEE Trans. Image Process.* **18** 2419

[24] Erdogan H, Fessler J A 1999 *Phys. Med. Biol.* **44** 2835

[25] Hudson H M, Larkin R S 1994 *IEEE Trans. Med. Imag.* **13** 601

[26] Kim D, Ramani S, Fessler J A 2013 *The 12th International Meeting on Fully Three-Dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine California*, USA, June 16–21, 2013 p22

Ordered subset image reconstruction studied by means of total variation minimization and fast first-order method in low dose computed tomograhpy*

Mao Bao-Lin[1)] Chen Xiao-Zhao[1)] Xiao Da-Yu[1)] Fan Sheng-Yu[1)]
Teng Yue-Yang[1)] Kang Yan[1)2)†]

1) (*Sino-Dutch Biomedical and Information Engineering School, Northeastern University, Shenyang 110819, China*)

2) (*Key Laboratory of Medical Image Computing of Ministry of Education, Northeastern University, Shenyang 110819, China*)

(Received 31 March 2014; revised manuscript received 5 May 2014)

Abstract

Low-dose computed tomography(CT) has an advantage to reduce X-rays that are harmful to the body. This paper considers the issue of reconstructing high-quality low-dose CT images from incomplete projection data. Generally, this can be done by statistical image reconstruction methods. However, the huge number of iterations of the statistical reconstruction algorithms leads to long computing time, making them difficult to be of practical value. To solve this problem, we propose a method to alleviate the issue by using total variation minimization and fast first-order method for the ordered subsets. We use Split Bregman alternating direction method to solve the optimization problem. Then, the projection onto convex sets method is used to speed up the convergence rate of the iterative method. Numerical experiments show that the relative reconstruction error of the proposed method can decrease faster than the first-order method of ordered subsets with the same iterative number.

Keywords: total variation, projection onto convex sets, alternating direction method, ordered subsets

PACS: 87.59.–e, 42.30.Wb, 81.70.Tx, 07.85.–m **DOI:** 10.7498/aps.63.138701

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61372014, 61201053, 61302013), the Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20110042110036), and the Fundamental Research Project of Northeastern University, China (Grant No. 110619001).

† Corresponding author. E-mail: kangy@neusoft.