完整系统Appell方程Lie对称性的共形不变性与Hojman守恒量*

孙现亭1) 张耀宇1) 张芳1) 贾利群2)†

1) (平顶山学院电气信息工程学院, 平顶山 467002)

2) (江南大学理学院, 无锡 214122)

(2014 年 2 月 25 日收到; 2014 年 3 月 21 日收到修改稿)

研究完整系统Appell方程Lie对称性的共形不变性与Hojman守恒量. 在时间不变的特殊无限小变换下, 定义完整系统动力学方程的Lie对称性和共形不变性, 给出该系统Lie对称性共形不变性的确定方程及系统的Hojman守恒量, 并举例说明结果的应用.

关键词: Appell方程, Lie对称性, 共形不变性, Hojman守恒量

PACS: 02.20.Sv, 11.30.–j, 45.20.Jj **DOI:** 10.7498/aps.63.140201

1 引 言

约束力学系统的对称性和守恒量的研究在物理、力学和现代数学上占有重要地位, 在国内外的学术期刊上可以看到不少这方面的研究成果[1−20]. Galiullin等[21]在1997年研究Birkhoff系统分析动力学时提出了Birkhoff方程的共形不变性和共形因子的概念, 并讨论了Pfaff 作用量在无限小变换下的不变性与共形不变性、Lie 对称性与共形不变性之间的关系. 近年来, 动力学系统中共形不变性的研究有了新的成果[22−26]. 1899年Appell[27]给出了约束力学系统的Appell方程, 此后Appell方程成为分析力学中一类非常重要的方程, 也成为分析力学理论中三大力学体系之一. 近二十多年来, 对Lagrange方程、Nielsen方程和Appell方程的研究、推广及应用等方面取得了丰硕的成果[28−39]. 但是, 利用Appell方程研究共形不变性目前尚在起步阶段. 本文研究完整系统Appell方程Lie对称性的共形不变性与Hojman守恒量; 建立完整系统的Appell方程; 引入时间不变的特殊无限小变换及其生成元向量, 定义完整系统动力学方程的Lie对称性和共形不变性, 给出该系统Lie对称性共形不变性的确定方程, 并导出系统相应的Hojman守恒量; 最后, 通过举例说明本文理论结果的应用.

2 完整系统的运动微分方程

假设完整力学系统的位形由n个广义坐标$q_s(s=1,2,\cdots,n)$来确定. 系统的Appell方程为

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}=Q_s \quad (s=1,2,\cdots,n), \tag{1}$$

其中S为Appell函数, $Q_s=Q_s(t,q,\dot{q})$为广义力, 假设系统非奇异, 从方程(1)可解出所有的广义加速度—系统的运动微分方程:

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,q,\dot{q}) \quad (s=1,2,\cdots,n). \tag{2}$$

3 完整系统Lie对称性的共形不变性

取时间不变的特殊无限小变换

$$t^*=t,$$
$$q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,q,\dot{q})$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 11142014) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: jlq0000@163.com

$$(s=1,2,\cdots,n), \tag{3}$$

其中, ε为无限小参数, ξ_s为无限小变换生成元. 根据微分方程在无限小变换下不变性的Lie理论, 方程(1)在无限小变换(3)下Lie对称性的确定方程为

$$\tilde{X}^{(2)}\left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}\right)=\tilde{X}^{(1)}(Q_s), \tag{4}$$

其中

$$\tilde{X}^{(1)}=\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_s}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \tag{5}$$

$$\tilde{X}^{(2)}=\tilde{X}^{(1)}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_s}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}, \tag{6}$$

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\alpha_s\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}. \tag{7}$$

在计算方程(4)时, 需将方程(2)代入. 这样, 方程(2)在变换(3)下的Lie对称性的确定方程为

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_s}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\alpha_s}{\partial q_k}\xi_k+\frac{\partial\alpha_s}{\partial \dot{q}_k}\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_k}{\mathrm{d}t}. \tag{8}$$

定义1 如果方程(2)在无限小变换(3)下的生成元ξ_s满足确定方程(8), 则相应的对称性称为完整系统的特殊Lie对称性.

Appell方程Lie对称性的确定方程为

$$\tilde{X}^{(2)}\left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}\right)-\tilde{X}^{(1)}(Q_s)=0. \tag{9}$$

定义2 对于完整系统的Appell方程(1), 如果存在矩阵$\boldsymbol{L}_s^k$满足

$$\begin{aligned}&\left[\tilde{X}^{(2)}\left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}\right)\right]-\tilde{X}^{(1)}(Q_s)\\&=\boldsymbol{L}_s^k\left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_k}-Q_k\right)\quad(s,k=1,2,\cdots,n),\end{aligned} \tag{10}$$

则方程(1)在无限小变换(3)作用下具有Lie对称性的共形不变性. (10)式是满足Lie对称性共形不变性的确定方程, 其中$\boldsymbol{L}_s^k$为共形因子.

命题1 如果方程(1)在无限小变换(3)作用下是Lie对称性的, 且存在矩阵$\boldsymbol{\Gamma}_s^k$满足

$$\begin{aligned}&\left[\tilde{X}^{(2)}\left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}\right)\right]-\tilde{X}^{(1)}(Q_s)\\&-\left\{\left[\tilde{X}^{(2)}\left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}\right)\right]-\tilde{X}^{(1)}(Q_s)\right\}\Bigg|_{\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}=Q_s}\\&=\boldsymbol{\Gamma}_s^k\left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_k}-Q_k\right)\quad(s,k=1,2,\cdots,n),\end{aligned} \tag{11}$$

则方程(1)在无限小变换(3)式作用下具有共形不变性, 同时又具有Lie对称性的充分与必要条件为$\boldsymbol{L}_s^k=\boldsymbol{\Gamma}_s^k$.

证明 由于方程(1)的Lie对称性满足(10)式, 如果存在一个矩阵$\boldsymbol{\Gamma}_s^k$满足(11)式, 则(11)式成为

$$\left[\tilde{X}^{(2)}\left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}\right)\right]-\tilde{X}^{(1)}(Q_s)=\boldsymbol{\Gamma}_s^k\left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_k}-Q_k\right),$$

由定义(10)式, 系统的共形因子$\boldsymbol{L}_s^k=\boldsymbol{\Gamma}_s^k$.

反之亦然, 由定义(10)和(11)式, 容易验证

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{L}_s^k-\boldsymbol{\Gamma}_s^k)\left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_k}-Q_k\right)\\&=\left\{\left[\tilde{X}^{(2)}\left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}\right)\right]-\tilde{X}^{(1)}(Q_s)\right\}\Bigg|_{\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}=Q_s}\\&\quad(s,k=1,2,\cdots,n),\end{aligned} \tag{12}$$

若$\boldsymbol{L}_s^k=\boldsymbol{\Gamma}_s^k$, 则容易得到(9)式, 因而系统具有Lie对称性.

4 Lie对称性导致的Hojman守恒量

下面给出完整系统Appell方程特殊Lie对称性导致的Hojman守恒量.

命题2 对于满足Lie对称性的共形不变性的确定方程定(10)的无限小生成元ξ_s, 如果存在某函数$\mu=\mu(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$, 使得

$$\frac{\partial\alpha_s}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu=0, \tag{13}$$

则完整系统Appell方程Lie对称性的共形不变性导致Hojman守恒量为

$$I_{\mathrm{H}}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial q_s}(\mu\xi_s)+\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\left(\mu\frac{\bar{d}\xi_s}{\mathrm{d}t}\right)=\mathrm{const}. \tag{14}$$

5 举 例

下面给出一个例子来说明结果的应用. 完整系统的Appell函数和广义力分别为

$$S=\frac{1}{2}(\ddot{q}_1^2+\ddot{q}_2^2)+\left(2+\frac{4}{t}\dot{q}_1\right)\ddot{q}_1-q_1, \tag{15}$$

$$Q_1=1+\frac{2}{t}\dot{q}_1, \tag{16}$$

$$Q_2=-\left(1+\frac{2}{t}\dot{q}_1\right). \tag{17}$$

试研究系统的共形不变性和Lie对称性导致的Hojman守恒量.

将(15), (16)和(17)式代入方程(1), 可得

$$\ddot{q}_1=\alpha_1=-1-\frac{2}{t}\dot{q}_1, \tag{18}$$

$$\ddot{q}_2=\alpha_2=-1-\frac{2}{t}\dot{q}_1, \tag{19}$$

或

$$F_1 = \ddot{q}_1 + 1 + \frac{2}{t}\dot{q}_1,$$
$$F_2 = \ddot{q}_2 + 1 + \frac{2}{t}\dot{q}_1. \qquad (20)$$

做计算

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_1} = \ddot{q}_1 + \left(2 + \frac{4}{t}\dot{q}_1\right),$$
$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_2} = \ddot{q}_2, \qquad (21)$$
$$\tilde{X}^{(2)}\left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_1}\right) = \dot{\xi}_1\frac{4}{t} - \dot{\xi}_1\frac{2}{t} = \dot{\xi}_1\frac{2}{t},$$
$$\tilde{X}^{(2)}\left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_2}\right) = 0, \qquad (22)$$
$$\tilde{X}^{(1)}(Q_1) = \dot{\xi}_1\frac{2}{t}.$$
$$\tilde{X}^{(1)}(Q_2) = 0. \qquad (23)$$

由 (22),(23) 式得

$$\tilde{X}^{(2)}\left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_1}\right) - \tilde{X}^{(1)}(Q_1) = 0, \qquad (24)$$
$$\tilde{X}^{(2)}\left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_2}\right) - \tilde{X}^{(1)}(Q_2) = 0. \qquad (25)$$

由 (15), (16) 和 (17) 式得

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_1} - Q_1 = 0,$$
$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_2} - Q_2 = 0. \qquad (26)$$

(24), (25) 和 (26) 式满足Lie对称性共形不变性的确定方程(10), 且得共形因子

$$\boldsymbol{L}_s^{\mathrm{k}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (27)$$

所以系统既是共形不变性的, 又是Lie对称性的.

下面研究Lie对称性对应的Hojman守恒量. 由方程(18)和(13)式得

$$-\frac{2}{t} + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu = 0, \qquad (28)$$

上式有如下解:

$$\mu = t^2\left(\dot{q}_2 t - q_2 + \frac{1}{2}t^2 + 2q_1\right), \qquad (29)$$
$$\mu = t^2. \qquad (30)$$

将 (29) 式代入 (14) 式并使生成元 $\xi_1 = \xi_2 = 1$, 得

$$I_{\mathrm{H}1} = \left(\dot{q}_2 t - q_2 + \frac{1}{2}t^2 + 2q_1\right)^{-1} = \mathrm{const}, \qquad (31)$$

将方程(30)代入方程(14)且使生成元

$$\xi_1 = \xi_2 = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1 t + q_1 + \frac{1}{2}t^2\right)^2,$$

得

$$I_{\mathrm{H}2} = \dot{q}_1 t + q_1 + \frac{1}{2}t^2 = \mathrm{const}. \qquad (32)$$

6 结 论

本文得到了完整系统Appell方程Lie对称性的共形不变性的确定方程, 并导出系统的Hojman守恒量. 本文的结论不仅丰富了Appell方程的对称性和守恒量理论, 而且丰富了Appell方程的共形不变性理论.

参考文献

[1] Mei F X, Wu H B 2010 *Chin. Phys. B* **19** 050301

[2] Xie Y L, Yang X F, Jia L Q 2011 *Commun. Theor. Phys.* **55** 111

[3] Wang X X, Sun X T, Zhang M L, Xie Y L, Jia L Q 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 064501 (in Chinese) [王肖肖, 孙现亭, 张美玲, 解银丽, 贾利群 2012 物理学报 **61** 064501]

[4] Zhang Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5374 (in Chinese) [张毅 2008 物理学报 **57** 5374]

[5] Jia L Q, Wang X X, Zhang M L, Han Y L 2012 *Nonlinear Dyn.* **69** 1807

[6] Luo S K 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5580 (in Chinese) [罗绍凯 2007 物理学报 **56** 5580]

[7] Zhang M L, Wang X X, Han Y L, Jia L Q 2012 *J. Yunnan Univ. (Natural Sciences Edition)* **34** 664 (in Chinese) [张美玲, 王肖肖, 韩月林, 贾利群 2012 云南大学学报(自然科学版) **34** 664]

[8] Han Y L, Wang X X, Zhang M L, Jia L Q 2013 *Nonlinear Dyn.* **73** 357

[9] Ge W K 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6714 (in Chinese) [葛伟宽 2008 物理学报 **57** 6714]

[10] Han Y L, Wang X X, Zhang M L, Jia L Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 110201 (in Chinese) [韩月林, 王肖肖, 张美玲, 贾利群 2013 物理学报 **62** 110201]

[11] Fang J H 2010 *Chin. Phys. B* **19** 040301

[12] Zheng S W, Xie J F, Chen X W, Du X L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5209 (in Chinese) [郑世旺, 解加芳, 陈向炜, 杜雪莲 2010 物理学报 **59** 5209]

[13] Xie Y L, Jia L Q 2010 *Chin Phys. Lett.* **27** 120201

[14] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 712 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 712]

[15] Cai J L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 22 (in Chinese) [蔡建乐 2009 物理学报 **58** 22]

[16] Wu H B, Mei F X 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3145

[17] Cai J L 2009 *Acta. Phys. Pol. A* **115** 854

[18] Cai J L 2010 *Acta. Phys. Pol. A* **117** 445

[19] Jiang W A, Luo S K 2012 *Nonlinear Dyn.* **67** 475

[20] Jiang W A, Li Z J, Luo S K 2011 *Chin. Phys. B* **20** 030202

[21] Galiullin A S, Gafarov G G, Malaishka R P, Khwan A M 1997 *Analytical Dynamics of Helmholtz Birkhoff and Nambu Systems* (Moscow: UFN) p183 (in Russian)

[22] Zhang Y, Xue Y 2009 *Chin. Q. Mech.* **30** 216 (in Chinese) [张毅, 薛纭 2009 力学季刊 **30** 216]

[23] Cai J L, Shi S S, Fang H J 2012 *Meccanica* **47** 63

[24] Han Y L, Sun X T, Zhang Y Y, Jia L Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 160201 (in Chinese) [韩月林, 孙现亭, 张耀宇, 贾利群 2013 物理学报 **62** 160201]

[25] Chen X W, Zhao Y H, Li Y M 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3139

[26] Cai J L, Shi S S 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 030201 (in Chinese) [蔡建乐, 史生水 2012 物理学报 **61** 030201]

[27] Appell P 1953 *Traité de Mécanique Rationnelle* II (Paris: Gauthier-Villars) p335

[28] Xue W X 1987 *Acta Mech. Sin.* **3** 354

[29] Cai J L 2012 *Nonlinear Dyn.* **69** 487

[30] Cui J C, Zhang Y Y, Yang X F, Jia L Q 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030304

[31] Li Y C, Xia L L, Wang X M, Liu X W 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3639 (in Chinese) [李元成, 夏丽莉, 王小明, 刘晓巍 2010 物理学报 **59** 3639]

[32] Jia L Q, Sun X T, Zhang M L, Zhang Y Y, Han Y L 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 010201 (in Chinese) [贾利群, 孙现亭, 张美玲, 张耀宇, 韩月林 2014 物理学报 **63** 010201]

[33] Jiang W A, Luo S K 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 060201 (in Chinese) [姜文安, 罗绍凯 2011 物理学报 **60** 060201]

[34] Han Y L, Wang X X, Zhang M L, Jia L Q 2013 *Nonlinear Dyn.* **71** 401

[35] Mei F X, Chen X W 2000 *Chin. Phys.* **9** 721

[36] Wang X X, Han Y L, Zhang M L, Jia L Q 2013 *Chin. Phys. B* **22** 020201

[37] Cai J L 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 1523

[38] Han Y L, Wang X X, Zhang M L, Jia L Q 2014 *J. Mech.* **30** 21

[39] Fang J H 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3617 (in Chinese) [方建会 2009 物理学报 **58** 3617]

Conformal invariance and Hojman conserved quantity of Lie symmetry for Appell equations in a holonomic system*

Sun Xian-Ting[1)]　Zhang Yao-Yu[1)]　Zhang Fang[1)]　Jia Li-Qun[2)†]

1) (*Electric and Information Engineering College, Pingdingshan University, Pingdingshan 467002, China*)

2) (*School of Science, Jiangnan University, Wuxi 214122, China*)

(Received 25 February 2014; revised manuscript received 21 March 2014)

Abstract

The conformal invariance and Hojman conserved quantity of Lie symmetry for Appell equations in a holonomic system are studied. Under the special infinitesimal transformations in which the time is not variable, the Lie symmetry and conformal invariance of differential equations of motion for a holonomic system are defined, and the determining equations of the conformal invariance of Lie symmetry and the Hojman conserved quantity for the system are given. Finally, an example is presented to illustrate the application of the results.

Keywords: Appell equation, Lie symmetry, conformal invariance, Hojman conserved quantity

PACS: 02.20.Sv, 11.30.–j, 45.20.Jj　　**DOI:** 10.7498/aps.63.140201

∗ Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11142014)

† Corresponding author. E-mail: jlq0000@163.com