带有分数阶热流条件的时间分数阶热波方程及其参数估计问题*

范文萍 蒋晓芸†

(山东大学数学学院, 济南 250100)

(2014 年 1 月 12 日收到; 2014 年 4 月 2 日收到修改稿)

研究了 Caputo 导数定义下带有分数阶热流条件的一维时间分数阶热波方程及其参数估计问题. 首先, 对正问题给出了解析解; 其次, 基于参数敏感性分析, 利用最小二乘算法同时对分数阶阶数 α 和热松弛时间 τ 进行参数估计; 最后对不同的热流分布函数所构成的两个初边值问题, 分别进行参数估计仿真实验, 分析温度真实值和估计值的拟合程度. 实验结果表明, 最小二乘算法在求解时间分数阶热波方程的两参数估计问题中是有效的. 本文为分数阶热波模型的参数估计提供了一种有效的方法.

关键词: 分数阶热波方程, 分数阶热流, 参数估计, 最小二乘算法

PACS: 02.30.Zz, 44.10.+i, 05.30.Pr **DOI:** 10.7498/aps.63.140202

1 引 言

近年来, 作为分形几何和分数维动力学基础, 分数阶微积分理论已成为非线性科学发展的热点, 并在松弛、振荡、扩散和输运理论、生物组织、控制系统、混沌与湍流、随机游走、统计与随机过程、黏弹性力学及非牛顿流体力学、量子力学、电化学、金融等诸多领域得以应用[1−9]. 目前, 对于分数阶方程的研究已经屡见不鲜. Li 等[10] 研究了钙离子在细胞内扩散的时空分数阶反常扩散模型, 成功地解释了“钙火花峰宽”现象, 提出了钙离子在细胞内的反常扩散机制. Ahmadikia 等[11] 研究了带有热流边界条件的抛物型和双曲型生物传热问题, 分别求解了热流函数为常数函数和瞬时函数时的初边值问题. Povstenko[12] 研究了时间分数阶 Cattaneo 方程, 建立了相应的热应力理论, 并给出了一维和轴对称情形下非齐次 Cattaneo 方程的基本解. Jiang 和 Qi[13] 利用修正的 Riemann-Liouville 导数求解了生物传热热波模型, 得到了生物活体组织在有限介质中一维情形下的解析解. Qi 等[14] 考虑了固体表面的超短激光脉冲加热, 建立带有体积热源的时间分数阶 Cattaneo 热传导模型, 并利用积分变换求解问题. Murio[15] 建立了一类求解时间分数阶扩散方程的无条件稳定的隐式差分格式. Ghazizadeh 等[16] 给出了分数阶 Cattaneo 方程的显式和隐式两种格式的有限差分算法. Ge 和 Cheng[17] 利用基于滑动 Kriging 插值的无网格方法研究了二维时间分数阶扩散方程, 等等.

目前, 关于经典问题的反问题的研究已经相对成熟[18−29]. 伴随着分数阶理论在热传导问题中的广泛应用, 分数阶热传导反问题也越来越引起国内外学者的关注, 主要涉及源项反演、边值反演、参数反演等方面. Tian 等[30] 用两种正则化方法研究了空间分数阶扩散方程的源项反演问题, 建立了误差分析, 证明了 Fourier 正则化和小波对偶最小二乘正则化方法在解决不适定问题中的有效性. Murio[31] 考虑到分数阶反问题的不适定性, 提出了 δ-修正的正则化技术, 利用 δ-修正的空间推进算法给出了 Caputo 导数定义的时间分数阶热传导反

* 国家自然科学基金 (批准号: 11072134, 11102102, 91130017) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: wqjxyf@sdu.edu.cn

 http://wulixb.iphy.ac.cn

问题的稳定的数值解, 并估计了未知边界函数. 张瀛[32] 研究了一维分数阶扩散方程的源项反演问题和基于 Carleman 估计的分数阶扩散方程系数反演条件稳定性问题. 由于分数阶计算的复杂性, 目前关于分数阶阶数反演的文献较少. 本文针对一维时间分数阶热波方程, 考虑带有分数阶热流条件的初边值问题, 在解析求解正问题的基础上, 利用最小二乘算法研究分数阶阶数 α 和热松弛时间 τ 的参数估计问题.

2 带有分数阶热流条件的时间分数阶热波模型及其正问题

2.1 分数阶热波模型

基于 Compte 和 Metzler 在文献 [33] 中提出的分数阶 Cattaneo 方程理论, 分数阶传热本构方程为

$$q(x,t)+\tau^{\alpha}\frac{\partial^{\alpha}q(x,t)}{\partial t^{\alpha}}=-\kappa\nabla T(x,t). \tag{1}$$

(1) 式结合能量平衡方程

$$\rho c\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}=-div q(x,t), \tag{2}$$

便可得到相应的分数阶 Cattaneo 热传导方程:

$$\kappa\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}=\tau^{\alpha}\rho c\frac{\partial^{\alpha+1}T(x,t)}{\partial t^{\alpha+1}}+\rho c\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}, \tag{3}$$

其中, $T(x,t)$ 表示介质的温度函数; $q(x,t)$ 表示热流密度函数; κ, ρ, c 为常数, 分别表示介质的热传导速率､密度和常应变比热; τ 表示热松弛时间, 近似为 $\tau=\alpha_0/V^2$, 这里 α_0 表示导热系数, V 表示热波的传播速率;$0<\alpha\leqslant 1$ 是分数阶阶数; $\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}$ 是基于 Caputo 定义的时间分数阶导数[34], 满足 Caputo 定义式

$$\frac{\partial^{\alpha}f(t)}{\partial t^{\alpha}}=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\displaystyle\int_0^t\frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{1+\alpha-n}}\mathrm{d}\tau & n-1<\alpha<n\\ \dfrac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n} & \alpha=n\end{cases}.$$

当 $\alpha=1$ 时, (3) 式即为经典的热波方程.

本文考察热物性均为常数的有限介质 $0\leqslant x\leqslant L$, 假设介质在初始时刻温度为 T_0. $t>0$ 时, 在介质表面 $(x=0)$ 瞬间作用一个瞬时热流函数 $q(t)$, $q(t)$ 满足零初值条件, 并假设对 $t>0$, 介质 $x=L$ 处边界面保持绝热状态. 对应于如下初边值问题:

$$\kappa\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2}=\tau^{\alpha}\rho c\frac{\partial^{\alpha+1}\theta(x,t)}{\partial t^{\alpha+1}}+\rho c\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t}$$
$$(0<x<L,t>0,\quad 0<\alpha\leqslant 1), \tag{4}$$

$$-\kappa\frac{\partial\theta(0,t)}{\partial x}=q(0,t)+\tau^{\alpha}\frac{\partial^{\alpha}q(0,t)}{\partial t^{\alpha}}\quad x=0, \tag{5}$$

$$\theta(x,0)=0\quad t=0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial\theta(x,0)}{\partial t}=0\quad t=0, \tag{7}$$

$$q(x,0)=0\quad t=0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial\theta(L,t)}{\partial x}=0\quad x=L, \tag{9}$$

这里, $\theta(x,t)$ 定义为 $\theta(x,t)=T(x,t)-T_0$, T_0 为介质的初始温度.

2.2 正问题的解析解

引入无量纲参量:

$$\theta^*=\frac{\theta}{\theta_{\mathrm{r}}},\quad q^*=\frac{q}{q_{\mathrm{r}}},\quad t^*=\frac{\kappa t}{L^2\rho c},$$
$$x^*=\frac{x}{L},\quad F=\left(\frac{\kappa\tau}{L^2\rho c}\right)^{\alpha}, \tag{10}$$

其中, θ_{r}, q_{r} 是参照温度和参照热流 (为简便起见, (10) 式中无量纲参量省略 $*$ 号, 即下文中所提到的参量均表示无量纲的量). 对方程 (4)—(9) 无量纲化得到分数阶热波模型的无量纲形式为

$$\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2}=F\frac{\partial^{\alpha+1}\theta(x,t)}{\partial t^{\alpha+1}}+\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t}$$
$$(0<x<L,\quad t>0,\quad 0<\alpha\leqslant 1), \tag{11}$$

$$-\frac{\kappa\theta_{\mathrm{r}}}{Lq_{\mathrm{r}}}\frac{\partial\theta(0,t)}{\partial x}=q(0,t)+F\frac{\partial^{\alpha}q(0,t)}{\partial t^{\alpha}}\quad x=0, \tag{12}$$

$$\theta(x,0)=0\quad t=0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial\theta(x,0)}{\partial t}=0\quad t=0, \tag{14}$$

$$q(x,0)=0\quad t=0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial\theta(L,t)}{\partial x}=0\quad x=L. \tag{16}$$

记 $q_w(t)=\frac{Lq_{\mathrm{r}}}{\kappa\theta_{\mathrm{r}}}\left(q(0,t)+F\frac{\partial^{\alpha}q(0,t)}{\partial t^{\alpha}}\right)$, 对方程 (11)—(16) 关于时间 t 做分数阶 Laplace 变换[34], 方程转化为

$$\frac{\mathrm{d}^2\bar{\theta}(x,s)}{\mathrm{d}x^2}=(Fs^{\alpha+1}+s)\bar{\theta}(x,s), \tag{17}$$

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\theta}(0,s)}{\mathrm{d}x} = -\bar{q_w}(s), \tag{18}$$

$$\bar{\theta}(x,0) = 0, \tag{19}$$

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\theta}(L,s)}{\mathrm{d}x} = 0, \tag{20}$$

其中, $\bar{\theta}(x,s)$, $\bar{q_w}(s)$ 分别表示 $\theta(x,t)$, $q_w(t)$ 的 Laplace 变换后的像函数. 然后, 对方程 (17) 做空间的有限 Fourier 余弦变换 [35], 得到

$$-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\tilde{\bar{\theta}}(n,s) + \bar{q_w}(s) = (Fs^{\alpha+1}+s)\tilde{\bar{\theta}}(n,s). \tag{21}$$

由 (21) 式,

$$\tilde{\bar{\theta}}(n,s) = \bar{q_w}(s)\cdot\tilde{\bar{G}}(n,s), \tag{22}$$

其中,

$$\tilde{\bar{G}}(n,s) = \frac{1}{Fs^{\alpha+1}+s+\left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2}.$$

先对 $\tilde{\bar{G}}(n,s)$ 逆 Laplace 变换. 记 $\lambda = \dfrac{n\pi}{L}$,

$$\begin{aligned}\tilde{\bar{G}}(n,s) &= \frac{1}{Fs^{\alpha+1}+s+\lambda^2}\\ &= \frac{1}{Fs^{\alpha+1}+s}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{\lambda^2}{Fs^{\alpha+1}+s}}\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\lambda^{2m}}{F^{m+1}}\cdot\frac{s^{-(m+1)}}{(s^\alpha+F^{-1})^{m+1}}.\end{aligned} \tag{23}$$

根据两参数 Mittag-Leffler 函数 [34] 的 Laplace 逆变换 (24) 式:

$$L^{-1}\left\{\frac{\kappa! s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha\mp c)^{\kappa+1}}\right\} = t^{\alpha\kappa+\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{(\kappa)}(\pm\, ct^\alpha), \tag{24}$$

得到

$$\begin{aligned}&L^{-1}\{\tilde{\bar{G}}(n,s)\}\\ =\ &\tilde{G}(n,t)\\ =\ &\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\cdot\frac{\lambda^{2m}}{F^{m+1}}\cdot t^{\alpha m+\alpha+m}\\ &\times E_{\alpha,\alpha+m+1}^{(m)}(-F^{-1}t^\alpha).\end{aligned} \tag{25}$$

显然, $\bar{q_w}(s)$ 的逆变换就是 $q_w(t)$, 因此

$$\tilde{\theta}(n,t) = q_w(t) * \tilde{G}(n,t). \tag{26}$$

最后做有限 Fourier 余弦逆变换,

$$\theta(x,t) = \frac{1}{L}\tilde{\theta}(0,t) + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\theta}(n,t)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \tag{27}$$

初边值问题 (4)—(9) 的解析解即为

$$\begin{aligned}\theta(x,t) =\ &\frac{1}{LF}\int_0^t q_w(t-t')t'^\alpha\\ &\times E_{\alpha,\alpha+1}(-F^{-1}t'^\alpha)\mathrm{d}t'\\ &+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\\ &\times\frac{(n\pi)^{2m}}{F^{m+1}L^{2m}}\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\\ &\times\int_0^t q_w(t-t')t'^{\alpha m+\alpha+m}\\ &\times E_{\alpha,\alpha+m+1}^{(m)}(-F^{-1}t'^\alpha)\mathrm{d}t',\end{aligned} \tag{28}$$

其中,

$$F = \left(\frac{\kappa\tau}{L^2\rho c}\right)^\alpha,$$

$$q_w(t) = \frac{Lq_{\mathrm{r}}}{\kappa\theta_{\mathrm{r}}}\left(q(0,t)+F\frac{\partial^\alpha q(0,t)}{\partial t^\alpha}\right).$$

特别地, $\tau = 0$ 时, 模型简化为经典的非齐次热传导方程, 其解析解为:

$$\begin{aligned}\theta(x,t) =\ &\frac{q_{\mathrm{r}}}{\kappa\theta_{\mathrm{r}}}\int_0^t q(t')\mathrm{d}t'\\ &+\frac{2q_{\mathrm{r}}}{\kappa\theta_{\mathrm{r}}}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t q(t-t')\\ &\times \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t'}\mathrm{d}t'\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right).\end{aligned} \tag{29}$$

这与文献 [36] 中给出的解的形式是一致的.

3 参数估计

在本文所研究的参数估计问题中, 分数阶热波方程 (4) 中的分数阶阶数 α, 以及热松弛时间 τ 被视为待估计参数, 本文采用最小二乘算法进行两参数的仿真实验.

记 θ_{mea}, θ_{est} 分别表示有限时间范围 $0\leqslant t\leqslant t_{\mathrm{f}}$ 内, 在介质内部 $x = x_m$ $(0\leqslant x_m\leqslant L)$ 处的温度测量值和估计值相对于初始温度 T_0 的温度变化量, 其中 t_{f} 是最大测量时间. 记 $\theta^j = \theta(x_m,t_j)$, $j = 0,1,2,\cdots,M$ 是时间节点. 则传统意义下的最小二乘范数 [37] 为

$$S(\alpha,\tau) = \sum_{j=0}^{M}(\theta_{\mathrm{est}}^j(\alpha,\tau)-\theta_{\mathrm{mea}}^j)^2, \tag{30}$$

根据极小化原理, 估计值 $\hat{\alpha}$, $\hat{\tau}$ 即是方程组 (31) 和 (32) 的解.

$$2\sum_{j=0}^{M}\frac{\partial\theta_{\text{est}}^{j}(\alpha,\tau)}{\partial\alpha}(\theta_{\text{est}}^{j}(\alpha,\tau)-\theta_{\text{mea}}^{j})=0, \qquad (31)$$

$$2\sum_{j=0}^{M}\frac{\partial\theta_{\text{est}}^{j}(\alpha,\tau)}{\partial\tau}(\theta_{\text{est}}^{j}(\alpha,\tau)-\theta_{\text{mea}}^{j})=0, \qquad (32)$$

利用最小二乘算法, 估计值 $\hat{\alpha}$, $\hat{\tau}$ 满足

$$S(\hat{\alpha},\hat{\tau})=\min\left(\sum_{j=0}^{M}(\theta_{\text{est}}^{j}(\alpha,\tau)-\theta_{\text{mea}}^{j})^{2}\right), \qquad (33)$$

参数估计问题即转化为目标函数 (33) 式的最优化问题.

4 仿真实验结果与分析

本文中的仿真实验数据由求解相应的正问题获得的真实温度场和随机误差合成[38], 测量值 θ_{mea} 表示为

$$\theta_{\text{mea}}=\theta_{\text{exa}}+\varpi\sigma, \qquad (34)$$

其中, θ_{exa} 是通过求解初边值正问题得到的真实值; ϖ 是满足高斯分布的随机变量, 取其 99% 置信区间 $-2.576\leqslant\varpi\leqslant 2.576$; σ 是测量误差的标准差.

对于多参数估计的情形, 参数之间的相关性对预测结果的准确性起着关键性作用. 考察参数相关性的一种方法是绘制各参数的敏感性系数趋势图, 如果它们接近线性相关, 则表明相应的参数是关联的, 不能同时预测. 针对本文中所考察的参数 α,τ, 考察相对敏感性系数[39]

$$J_p=P\frac{\partial\theta}{\partial P}, \qquad (35)$$

其中, $P=[\alpha,\tau]$ 是未知参数向量. 取常数

$$L=1,\quad x_m=0.8,$$
$$\frac{\kappa}{\rho c}=1,\quad \kappa=1,\quad \frac{q_{\text{r}}}{\theta_{\text{r}}}=1.5.$$

假设实验中参数 α, τ 的真实值为 $\alpha=0.8$, $\tau=0.1$.

4.1 仿真实验 1

热流函数取为

$$q(t)=\sin t. \qquad (36)$$

图 1 和图 2 分别给出了在 $x_m=0.8$, $x_m=1$ 两个观测位置处 α, τ 的敏感性系数趋势图. 由图可以看出, 两个参数线性不相关.

当扰动项 $\sigma=0$ 时, 参数估计结果为 $\hat{\alpha}=0.8000003$, $\hat{\tau}=0.1000002$, 温度真实值 θ_{exa} 和估计值 θ_{est} 的数值比较如图 3 所示. 图 3 显示出温度真实值与估计值在所考察的时间范围内非常符合. 说明在测量数据无误差的情况下, 最小二乘算法得到的参数估计结果是准确的.

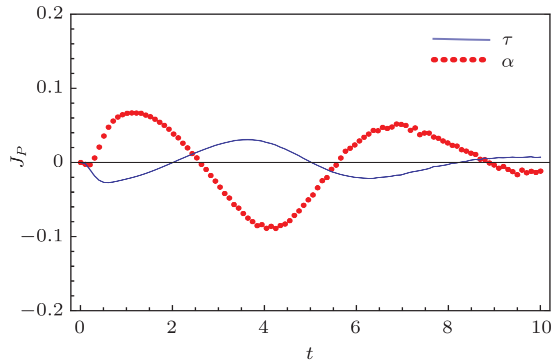

图 1 $x_m=0.8$ 处, 仿真实验 1 的参数敏感性系数走势

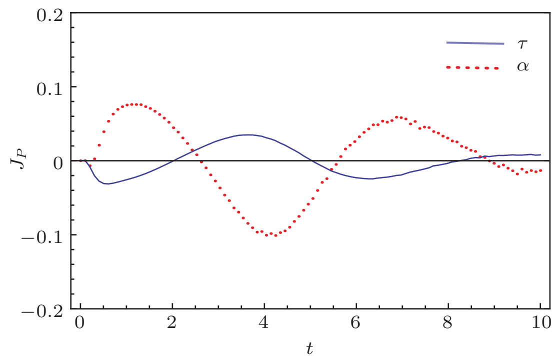

图 2 $x_m=1$ 处, 仿真实验 1 的参数敏感性系数走势

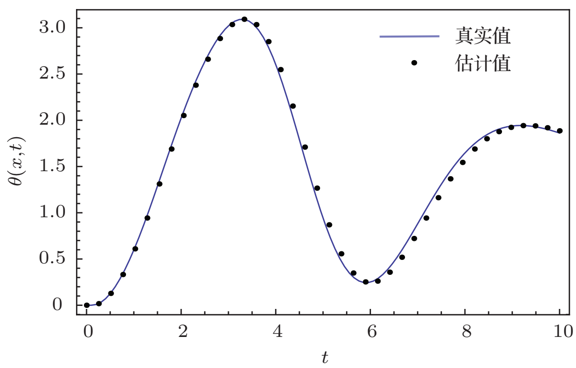

图 3 (网刊彩色) $\sigma=0$ 时, 仿真实验 1 的 θ 曲线

增加扰动 $\sigma=0.01$ 时, 参数估计结果为 $\hat{\alpha}=0.75139$, $\hat{\tau}=0.0904616$, 温度真实值 θ_{exa} 和估计值 θ_{est} 的数值比较如图 4 所示. 由图 4 可以看出, 即便在一定测量误差的影响下, 温度真实值和估计值也很好地拟合在一起, 说明了该最小二乘算法在估计 α 和 τ 的过程中是有效的.

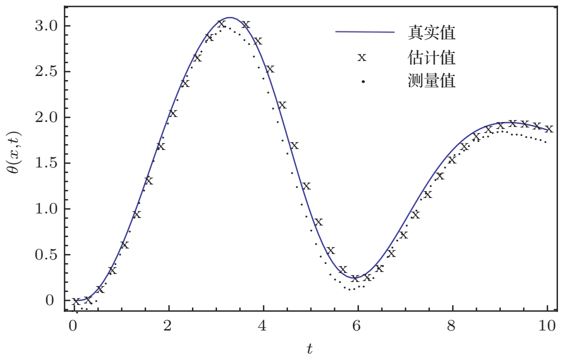

图 4 (网刊彩色) $\sigma = 0.01$ 时, 仿真实验 1 的 θ 曲线

4.2 仿真实验 2

热流函数取为

$$q(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin(\pi t). \tag{37}$$

参数敏感性系数趋势如图 5 和图 6 所示.

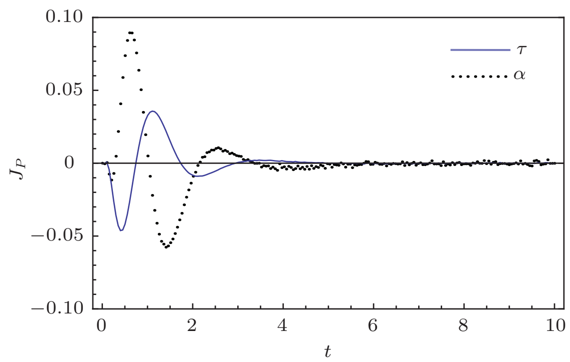

图 5 (网刊彩色) $x_m = 0.8$ 处, 仿真实验 2 的参数敏感性系数走势

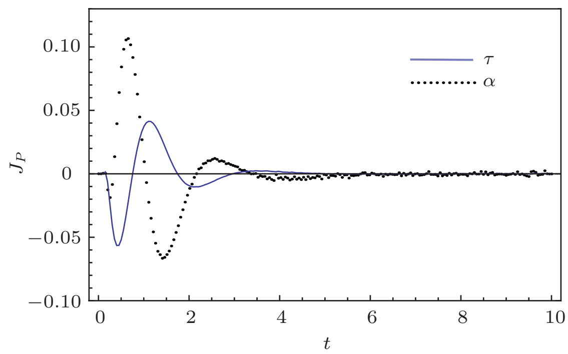

图 6 (网刊彩色) $x_m = 1$ 处, 仿真实验 2 的参数敏感性系数走势

由图 5 和图 6 可见两个参数线性不相关, 同样采用最小二乘算法同时进行估计. 测量无误差时, 参数估计结果 $\hat{\alpha} = 0.8000002$, $\hat{\tau} = 0.0999999$, 温度真实值 θ_{exa} 和估计值 θ_{est} 的数值比较如图 7 所示, 两条曲线吻合效果很好. 当增加扰动 $\sigma = 0.01$ 时, 参数估计值 $\hat{\alpha} = 0.77375$, $\hat{\tau} = 0.0946592$, 温度真实值 θ_{exa} 和估计值 θ_{est} 的数值比较如图 8 所示.

同样, 图 8 给出的曲线拟合效果也很好. 两个实验的仿真结果均表明, 最小二乘算法在求解时间分数阶热波方程的两参数估计问题中是有效的.

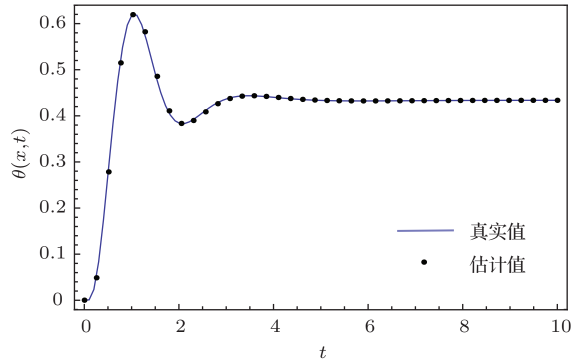

图 7 (网刊彩色) $\sigma = 0$ 时, 仿真实验 2 的 θ 曲线

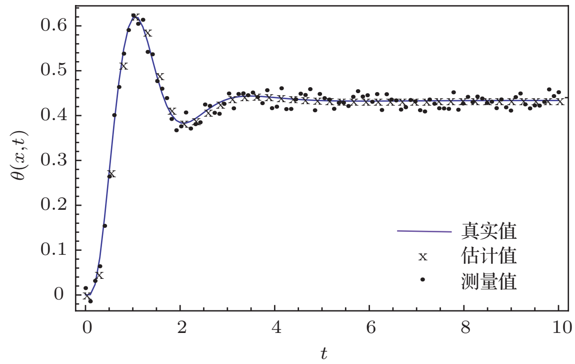

图 8 (网刊彩色) $\sigma = 0.01$ 时, 仿真实验 2 的 θ 曲线

5 结 论

针对方程 (4)—(9) 所表述的带有分数阶热流条件的时间分数阶热波方程及其初边值问题, 首先利用分数阶 Laplace 变换、有限 Fourier 余弦变换等方法给出了正问题的解析解. 用通过求解正问题获得的真实温度场和随机误差合成仿真实验数据, 即介质内部温度的测量值, 来研究分数阶阶数 α 和热松弛时间 τ 的两参数估计问题. 通过参数的敏感性分析, 证明两个参数的线性不相关性, 并对不同的热流分布函数所构成的两个初边值问题分别进行实验, 两个仿真实验结果均表明最小二乘算法在求解时间分数阶热波方程的两参数估计问题中是有效的. 本文为时间分数阶热波模型的参数估计提供了一种有效的方法, 该方法同样适用于空间分数阶情形.

参考文献

[1] Xin B G, Chen T, Liu Y Q 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 048901 (in Chinese) [辛宝贵, 陈通, 刘艳芹 2011 物理学报 **60** 048901]

[2] Wei T, Luo M K, Hua Y 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 210503 (in Chinese) [蔚涛, 罗懋康, 华云 2013 物理学报 **62** 210503]

[3] Rajneesh K, Vandana G 2013 *Chin. Phys. B* **22** 074601

[4] Metzler R, Klafter J 2004 *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** R161

[5] Liu K C, Wang Y N, Chen Y S 2012 *Int. J. Therm. Sci.* **58** 29

[6] Mainardi F 2010 *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models* (London: Imperial College Press) pp57–77

[7] Dong J P 2011 *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** 215204

[8] Yu Y J, Wang Z H 2013 *Chin. Phys. Lett.* **30** 110201

[9] Yang Y Q, Chen Y 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 100501

[10] Li K T, Zhang W R, Fang H Q, Xie W J, Liu J, Zheng M, Wang X H, Wang W, Tan W C, Cheng H P 2012 *Biophys. J.* **102** 1011

[11] Ahmadikia H, Fazlali R, Moradi A 2012 *Int. Commun. Heat Mass Transfer* **39** 121

[12] Povstenko Y Z 2011 *J. Therm. Stresses* **34** 97

[13] Jiang X Y, Qi H T 2012 *J. Phys. A: Math. Theor.* **45** 485101

[14] Qi H T, Xu H Y, Guo X W 2013 *Comput. Math. Appl.* **66** 824

[15] Murio D A 2008 *Comput. Math. Appl.* **56** 1138

[16] Ghazizadeh H R, Maerefat M, Azimi A 2010 *J. Comput. Phys.* **229** 7042

[17] Ge H X, Cheng R J 2014 *Chin. Phys. B* **23** 040203

[18] Xia L L 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 120202

[19] Yang G W, Cui K 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22** 2738

[20] Chen Z J, Zhang S Y 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 026502

[21] Guo Y X, Yu Y, Huang H J 2001 *Chin. Phys. B* **10** 1

[22] Mei F X, Chen X W 2000 *Chin. Phys. B* **9** 721

[23] Zhang H B 2002 *Chin. Phys. B* **11** 1

[24] Jiang L Y, Yu Y, Guo Y X 2001 *Chin. Phys. B* **10** 181

[25] Chen Z Y, Huang N N, Li Z G 1994 *Chin. Phys. B* **3** 1

[26] Zeng Y C, Fu Z J, Chen Z 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 46 (in Chinese) [曾以成, 付志坚, 陈争 2008 物理学报 **57** 46]

[27] Tong H Q, Gao F 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 577 (in Chinese) [童恒庆, 高飞 2006 物理学报 **55** 577]

[28] You Y, Dai D, Ma X K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2459 (in Chinese) [尤勇, 戴栋, 马西奎 2002 物理学报 **51** 2459]

[29] Peng H P, Li L X, Yang Y X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 51 (in Chinese) [彭海朋, 李丽香, 杨义先 2007 物理学报 **56** 51]

[30] Tian W Y, Li C, Deng W H, Wu Y J 2012 *Math. Comput. Simulat.* **85** 45

[31] Murio D A 2008 *Comput. Math. Appl.* **56** 2371

[32] Zhang Y 2012 *Ph. D. Dissertation* (Shanghai: Fudan University) (in Chinese) [张瀛 2012 博士学位论文 (上海: 复旦大学)]

[33] Compte A, Metzler R 1997 *J. Phys. A: Math. Gen.* **30** 7277

[34] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* (London: Academic Press) pp78–106

[35] Debnathand L, Bhatta D 2007 *Integral Transforms and Their Applications* (2nd Ed.) (London: CRC Press) pp407–425

[36] Frankel J I 1996 *Computers Math. Applic* **32** 117

[37] Chen Y N, Xu Z, Zhao S L, Sun Q J, Yin F F, Dong Y H 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 8113 (in Chinese) [陈跃宁, 徐征, 赵谡玲, 孙钦军, 尹飞飞, 董宇航 2010 物理学报 **59** 8113]

[38] Lee H L, Lai T H, Chen W L, Yang Y C 2013 *Appl. Math. Model.* **37** 2630

[39] Ghazizadeh H R, Azimi A, Maerefat M 2012 *Int. J. Heat Mass Transfer* **55** 2095

Parameters estimation for a one-dimensional time fractional thermal wave equation with fractional heat flux conditions*

Fan Wen-Ping Jiang Xiao-Yun†

(School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100)

(Received 12 January 2014; revised manuscript received 2 April 2014)

Abstract

An inversion problem of estimating parameters for a one-dimensional time fractional thermal wave equation with fractional heat flux conditions and Caputo fractional derivatives is investigated. To begin with, the analytical solution of the direct problem is obtained. Then, based on the parameter sensitivity analysis, the least-squares method is used to estimate both the fractional order α and the relaxation time τ simultaneously. Finally, two different heat flux distributions are given as different boundary conditions to perform the simulation experiments, respectively. By analyzing the degree of fitting curves, results show that the least-squares method performs well in parameter estimation for this fractional thermal wave equation. This study provides an effective method of estimating the parameters of fractional thermal wave equations.

Keywords: fractional thermal wave equation, fractional heat flux, parameter estimation, least-squares method

PACS: 02.30.Zz, 44.10.+i, 05.30.Pr **DOI:** 10.7498/aps.63.140202

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11072134, 11102102, 91130017).

† Corresponding author. E-mail: wqjxyf@sdu.edu.cn