

一个全局耦合不连续映像格子中的奇异态*

程兴超¹⁾ 杨科利¹⁾²⁾ 屈世显^{1)†}

1) (陕西师范大学物理学与信息技术学院, 理论与计算物理研究所, 西安 710062)

2) (宝鸡文理学院物理与信息技术系, 非线性研究所, 宝鸡 721016)

(2014年1月13日收到; 2014年3月24日收到修改稿)

文章研究了一类由既不可逆又不连续映像构成的全局耦合映像格子系统中的奇异态行为, 计算了系统的同步序参量和空间振幅变化图. 结果表明, 在某些特定的参数区间内, 耦合映像格子系统会出现奇异态或团簇态, 并且敏感地依赖于耦合强度的选择. 上述丰富的动力学现象是由于单映像中不连续、不可逆性以及空间耦合相互作用的结果. 通过数值模拟找到了奇异态或团簇态出现的特定参数区域.

关键词: 不连续不可逆映像, 奇异态, 团簇态

PACS: 05.45.Ra, 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.63.140505

1 引言

自2002年Kuramoto和Battogtokh^[1]提出非局域耦合振子模型以来, 引发了研究者的广泛兴趣^[2-8]. 在该模型中发现了一种新的动力学现象——奇异态, 即一个系统中的一部分处于同步化状态, 另一部分处于去同步化状态, 表明一个全同的振子系统经过非局域耦合后不同频率区出现了同步的频率, 这也正是奇异态的“奇异”之处. 在神奇的自然界中, 同样也存在这种现象, 如一些鸟类、蜥蜴、海豚^[2,3]等及其他一些海洋生物, 它们在睡眠时大脑就处于“半睡眠状态”. 经脑电波检测得知, 它们为了保护自身安全, 大脑中醒着的一部分脑电波处于混沌状态, 而另一部分却是完全同步. 这些还可以解释一些其他自然现象, 如库艾特流(Couette flow)^[4]中连续与不连续共存区出现的层流和湍流等.

随着自然界中越来越多的奇异态现象的发现, 不少科学家都对其进行了卓有成效的研究^[5-11]. 如: Abrams等^[5,6]基于Kuramoto的研究, 分别给出一维非局域耦合相振子出现奇异态的精确解,

分析表明, 奇异态出现在一个连续分岔的空间滑移态中, 消失于鞍点与自身不稳定鞍点的碰撞处. Sethia小组^[7]在研究一维链中的全同相振子延迟耦合模型时, 在系统中添加与节点相关的延迟耦合项, 发现了多个同步区被不相干的区域分开的现象, 即多团簇奇异态. Omel' Chenko等^[8]对一维链中的全同相振子添加延迟反馈诱导出奇异态, 并理论系统地阐述了系统中相关态和非相关态的关系等. 最近几年, 人们在实验中陆续发现化学耦合振子中也能够出现奇异态和团簇态^[12,13], 非局域耦合系统中呈现出相位波和相位团簇^[14], 以及动物条纹^[15-17]和共存区域中显现的多重奇异态^[18]等. 其中最引人注目的发现是从Belousov-Zhabotinsky化学反应^[19]和水晶空间光调制器控制波阵面的偏振特性^[20], 在实验中观察到了丰富的奇异态现象. 研究发现, 奇异态的出现从本质上讲与系统的初始条件的选取存在很大的关系, 但Zhu等^[21]发现, 对于无标度网络和随机图网络, 奇异态的出现只与参数有关而与初值无关. 此外, 最值得一提的是Abrams等^[5,6]构建了一种由两个相互作用的子系统组成的耦合振子, 它们内部的耦合强度大于外部耦合, 并由此发现了呼吸式奇异态^[6]. 文献^[22, 23]

* 国家自然科学基金(批准号: 10875076)和陕西省自然科学基金(批准号: SJ08A23)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: sxqu@snnu.edu.cn

在多个子系统组成的系统中也发现了此类现象等, 以上这些研究大都是基于一维非局域耦合系统中出现的奇异态行为, 当系统推广到二维和三维系统中时, 还发现螺旋波奇异态等现象.

然而, 以上的大部分实验和理论研究仅局限于研究连续动力学系统或热力学极限下耦合振子出现的奇异态. 事实上, 许多真实系统, 如神经元、心肌细胞^[24]、功率变化器^[25]等往往都表现出不连续的突变行为, 需要用不连续映像或系统来刻画. 不连续系统具有其内在丰富的动力学行为, 例如 V 型阵发^[26,27]、多重魔鬼阶梯^[28,29]、全局耦合不连续映像中的冻结化随机图案模式^[30]等. 因此, 我们预期在耦合不连续系统中应出现奇异态的新特征. 这类系统中奇异态的呈现和新特征的研究也应引起足够的重视. 本文是基于 Abrams 等^[6]提出的两个非局域耦合子系统(即 Abrams 模型)的启发, 建立两个具有相互作用的全局耦合子系统, 将不连续不可逆映像作为迭代函数, 由此而产生的奇异态行为, 并给出合理的解释和求出产生奇异态的参数区域. 由于不连续特性在实际系统中有着非常重要的作用, 特别是神经元放电特性, 我们期望借此研究更深入地了解实际系统的一些特定功能.

2 模型和映像

一个含有 $2N$ 个格点的系统被分为两个完全相同的子系统 σ 和 σ' , 其动力学行为满足下述方程:

$$\begin{aligned}
 x_{n+1}^{\sigma}(i) &= (1 - \varepsilon - \beta)x_n^{\sigma}(i) \\
 &+ \frac{\varepsilon}{N^{\sigma} - 1} \sum_{j=1, j \neq i}^{N^{\sigma}} x_n^{\sigma}(j) \\
 &+ \frac{\beta}{N^{\sigma'}} \sum_{i=1}^{N^{\sigma'}} x_n^{\sigma'}(i) \\
 x_{n+1}^{\sigma'}(i) &= (1 - \varepsilon - \beta)x_n^{\sigma'}(i) \\
 &+ \frac{\varepsilon}{N^{\sigma'} - 1} \sum_{j=1, j \neq i}^{N^{\sigma'}} x_n^{\sigma'}(j) \\
 &+ \frac{\beta}{N^{\sigma}} \sum_{i=1}^{N^{\sigma}} x_n^{\sigma}(i), \quad (1)
 \end{aligned}$$

其中, $x_n^{\sigma}(i)$ 和 $x_n^{\sigma'}(i)$ 分别为系统 σ 和 σ' 中第 i 个格点在离散时间 n 时刻的动力学状态; $\varepsilon(0 < \varepsilon < 0.5)$ 为系统 σ 或 σ' 内部格点间的耦合强度; $\beta(0 < \beta < 0.5)$ 为系统 σ 和 σ' 之间的耦合强度, 且 $\varepsilon > \beta > 0$

(即: 内部之间的耦合强度大于外部之间的耦合作用, 且不包含自耦合); N^{σ} 和 $N^{\sigma'}$ 分别为两个子系统的格点数, 取值均为 100; $f(x)$ 为每个格点的动力学方程, 我们取其为既不连续又不可逆映像^[31], 其定义为

$$x_{n+1} = f_m(x_n) = k_m \cdot x_n + b_m, \text{ mod } 1, \quad (2)$$

其中 $m=1, 2, 3, 4$, 同时

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \frac{y_b - y_A}{x_b - x_A}, \quad b_1 = y_A, \quad x \in [x_A, x_b]; \\
 k_2 &= \frac{y_C - y_B}{x_g - x_b}, \quad b_2 = y_b - k_2 x_b, \quad x \in [x_b, x_g]; \\
 k_3 &= \text{constant}, \quad b_3 = \text{constant}, \quad x \in [x_g, x_F]; \\
 k_4 &= \text{constant}, \quad b_4 = \text{constant}, \quad x \in [x_F, x_G];
 \end{aligned}$$

μ 为映像控制参数, 其余参数为: $k_3 = 0.07055$, $k_4 = 0.405507$, $b_3 = -0.530165$, $b_4 = -0.201586$, $y_b = b_1 - \mu$, $y_A = 0.203921$, $y_C = 0.460000$, $y_G = y_A$, $x_A = 0$, $x_b = 0.107663$, $x_G = 1.0$, $x_g = 0.350000$ 和 $x_F = 0.497121$. 该分段线性映像具有一个不连续引起的禁区和一个不可逆区, 不连续和不可逆的相互作用产生了极其丰富的动力学特性^[29], 例如: 周期 5 吸引子, 周期 5 与 11 带混沌共存, 周期 5 与 12 带混沌共存, 周期 5 与周期 6 吸引子共存等^[31].

3 数值模拟与分析

本文主要研究两个全局耦合子系统在一些特定参数下表现出来的独特动力学行为. 我们分别用同步序参量 R_n 和空间振幅变化图描述系统的集体动力学行为, 同步序参量的定义^[32]如下:

$$z_n = R_n \exp(i\varphi_n) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \exp(2\pi i x_n^{(j)}), \quad (3)$$

其中 R_n 和 φ_n 分别表示 n 时刻的振幅和平均相位, 如果系统的每个状态都完全相同, 即: $x_n(1) = x_n(2) = \dots = x_n(N)$, 则 $R_n = 1$. 我们选取两个子系统内、外部的耦合强度大小分别为 $\varepsilon = 0.11$, $\beta = 0.038$ 和 $\beta = 0.04$, 同时保持单映像控制参数 $\mu = 0.07$ 位于两带混沌区, 通过数值模拟并绘制它们的空间振幅变化图, 发现两个子系统随时间的演化展现出一系列丰富的动力学特征, 如图 1 所示.

从图 1(a)–(e) 可以看到, 相同耦合参数下, 系统随时间演化依次展示出五种不同的动力学行为.

如图 1(a) 所示, 子系统 σ (前 100 个格点) 全部处于非同步的混沌状态 (此参数下它们的李雅谱诺夫指数均大于 0), 而另一个子系统 σ' (后 100 个格点) 处于混沌同步轨道, 整个系统的这种状态被称为奇异态 (用 $c-1$ 标记^[19]). 当时间步 n 分别等于 26, 109, 121 和 140 时, 子系统 σ' 仍处于混沌同步轨道, 而子系统 σ 的状态却呈现出几个不同的集团, 即团簇态 (标记为 p , 其中 $p = 1, 2, 3, 4$, p 表示团簇的状态数), 图 1(b)–(e) 分别对应 1-1, 2-1, 3-1, 4-1 的团簇态, 其中第一个数字代表子系统 σ 的状态, 第二个数字代表另一个子系统 σ' 的状态. 为了表明系统动力学行为敏感地依赖于耦合强度的大小, 我们将 β 增至 0.04, 其他参量保持不变. 模拟表明, 子系统 σ 和 σ' 全部处于动态的混沌同步, 如图 1(f) 所示. 且当外部耦合强度大于 0.04 时, 子系统均处

于混沌同步, 这表明在相同的内部耦合参数下, 系统的状态严格地依赖于外耦合强度的大小. 此外, 我们可以用同步序参量 R_n 来刻画图 1 参数下系统的集体动力学行为, 如图 2 所示.

从图 2 中可见, 系统 σ' 的同步序参量始终是 1, 即完全同步. 计算得知其最大李雅普诺夫指数始终大于 0, 这表明系统处于同步化混沌状态, 系统 σ 未达到同步, 其状态值随着时间的演化呈现一张一弛的呼吸状态, 它的形成原因与映像的不可逆区有关. 当两个子系统的控制参数取在两带混沌区的弱耦合情况下, 如 $\varepsilon = 0.11$ 和 $\beta = 0.038$, 系统的状态值是处于奇异态或团簇态, 主要由系统的状态值与不可逆区 x_b 端点的距离决定; 当耦合参数较大时, 系统是否会出现奇异态、团簇态或混沌同步, 主要是由其内外耦合强度的大小共同决定. 为了证明这

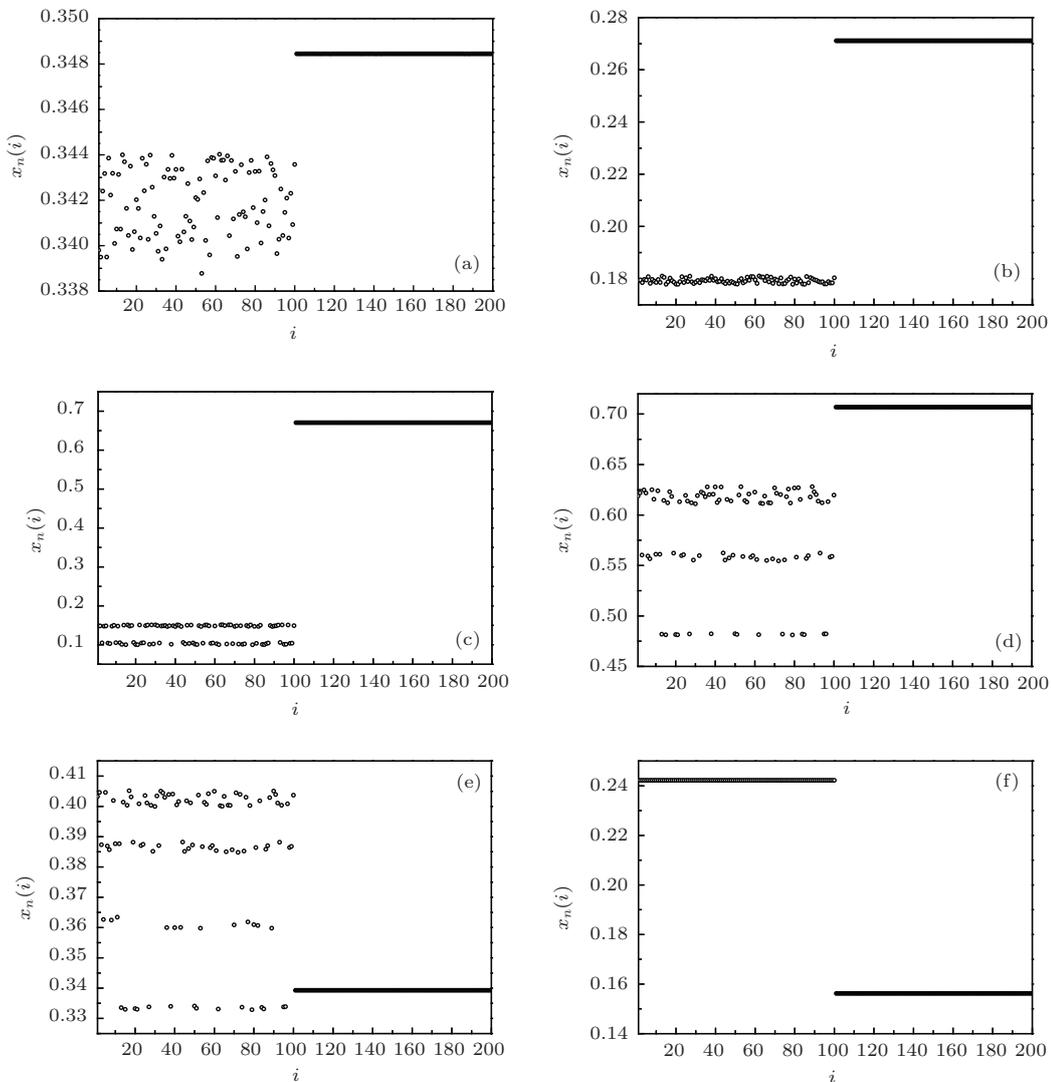


图 1 格点的空间振幅变化图 丢掉 8×10^6 瞬态, 采用随机初始条件和周期性边界, \circ 和 \bullet 分别表示子系统 σ 和 σ' ; (a), (b), (c), (d) 和 (e) 分别是 $n = 1, n = 26, n = 109, n = 121$ 和 $n = 140$ 时刻的空间振幅变化图, 参数分别为 $\varepsilon = 0.11, \beta = 0.038$ 和 $\mu = 0.07$; (f) 的参数为 $\varepsilon = 0.11, \beta = 0.04$ 和 $\mu = 0.07$

种解释, 我们定义系统状态值到不可逆区 x_b 边界的距离为: $\delta x_b = \min(|x_n - x_b|)$, 若其值为0, 此公式即表明随时间的演化该值位于不可逆区 x_b 端点上, 如图3所示.

结合不连续不可逆映像的特点我们可知, 系统的混沌状态中存在多个混沌吸引子轨道, 在较弱的耦合强度下, 图3(a)中的子系统 σ 和 σ' 在耦合的过程中形成竞争, 系统 σ' 的值被调制到混沌吸引子轨道形成混沌同步, 而系统 σ 经过一段时间的迭代, δx_b 等于0, 这表明它掉到不可逆 x_b 的边界上. 经3至4次迭代后, 它们的值在不连续区发生跃变, 若跃变值距混沌吸引子轨道较远, 演化后就很难达到同步, 即出现图1(a)中所示的奇异态; 若其状态值距混沌吸引子较近, 该值会被吸引到不同的混沌轨道上, 从而形成团簇态. 图2子系统 σ 中的同步序参量呈现呼吸状也很好理解: 在特定区间内, 耦合强度使得系统的值在不连续映像的四支迭代, 经过一段时间将要达到同步时, 突然掉到不可逆区, 再经不连续区发生突变而出现偏离同步, 继而呈现出类似呼吸的特点. 当耦合强度增加到超过某些临界值时, 如图3(b)所示, 图中的两个子系统 σ 和 σ'

的 δx_b 始终不为0, 即在较强的耦合强度调制下, 系统的状态值几乎没有碰到 x_b 点, 不存在突变的行为, 这样经过多次的耦合(连续渐变), 其值便能很快趋于混沌同步, 出现图1(f)所示的动力学行为.

综上所述, 系统 σ 和 σ' 的状态值是否会出现奇异态、团簇态和完全混沌同步, 主要是取决于其特定的耦合强度. 接下来的问题是: 在全参数空间内哪些参数区域会出现奇异态呢? 我们知道, 一旦系统的状态值出现奇异态, 它们的一个子系统状态比较有序而另一个比较混乱, 故我们用同步序参量来展示它们的动力学特性. 格点的初值随机且均匀地分布在0和1之间, 模拟中丢掉 8×10^6 步瞬态, 后5000步作系统平均, 计算平均同步序参量. 在全参数区间中, 我们分别得到了两个子系统的 $\langle R_n \rangle$, 如图4所示.

从图4可以看到, (a)和(b)两幅图几乎是一致的, 这正是两个子系统完全对称的结果. 图中红色区域表示系统近似处于混沌同步状态, 橙色及其他颜色区表示处于去同步状态, 模拟表明, 当参数 ε 和 β 位于红色与橙色的边附近时, 可以出现奇异态或团簇态, 其中颜色区域的分布几乎关于 $\varepsilon = \beta$ 对

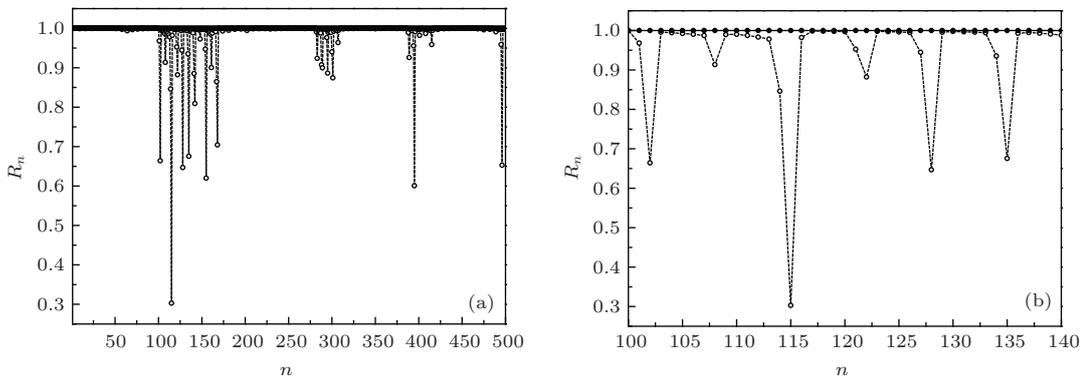


图2 系统 σ 和 σ' 的同步时间序列 瞬态为 8×10^6 , 采用随机初始条件和周期性边界, 其中图2(a)与图1中的空间振幅变化图(a)—(e)相对应, \circ 和 \bullet 分别表示子系统 σ 和 σ' ; (a) $\varepsilon = 0.11, \beta = 0.038$ 和 $\mu = 0.07$; (b) 图为(a)图同步序参量的部分放大图

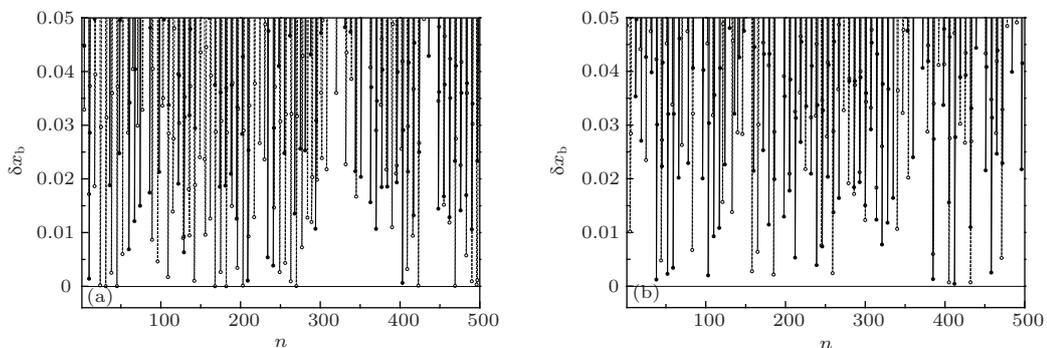


图3 子系统 σ 和 σ' 的位移差 δx_b 随时间演化图 瞬态为 8×10^6 , 采用随机初始条件和周期性边界, \circ 和 \bullet 分别为子系统 σ 和 σ' ; (a) $\varepsilon = 0.11, \beta = 0.038$ 和 $\mu = 0.07$; (b) $\varepsilon = 0.11, \beta = 0.04$ 和 $\mu = 0.07$

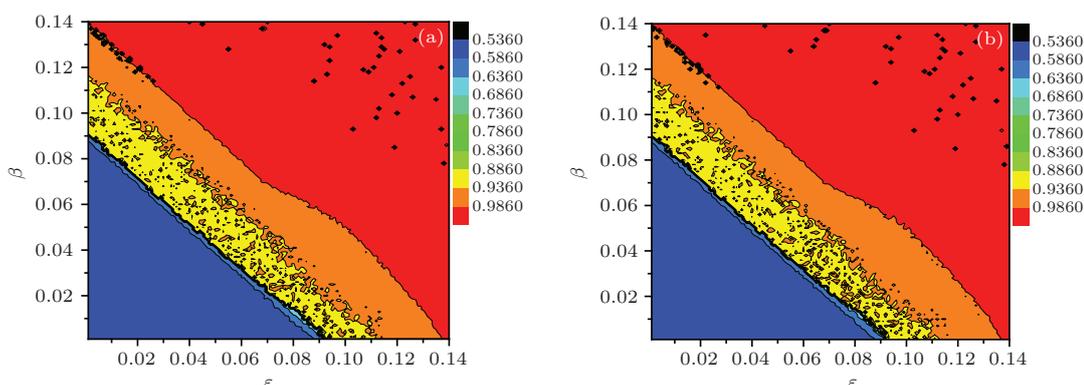


图4 (网刊彩色) 取 $\mu = 0.07$ 时, 扫描内、外耦合参数空间 $\varepsilon \in (0, 0.14)$ 和 $\beta \in (0, 0.14)$, 丢掉 8×10^6 步瞬态 5000 步系统平均后的平均同步序参量值 (a) 系统 σ ; (b) 系统 σ'

称. 我们可以这样理解: 当 $\beta > \varepsilon$ 时, 认为 ε 和 β 的地位发生了互换, 即内部耦合强度充当了外部耦合强度的角色, 外部耦合取代了内部耦合的地位, 显然, 它们的参数区间应该是对称的. 同时, 我们发现这些区域并不是连续的, 而是一些分立的区间, 这主要是由于耦合强度的影响导致的, 当耦合强度增大时, 可以有效地调制系统的状态值与 x_b 的距离, 最终导致系统状态值在不连续点发生跃变产生了这些丰富的动力学行为.

4 结 论

本文用数值模拟的方法研究了一类既不连续又不可逆映像构成的两个相互耦合的子系统的集体动力学行为, 即出现的奇异态和团簇态, 分别计算了系统的空间振幅变化图和同步序参量等, 并给出合理的解释, 最后主要得出了奇异态或团簇态出现的参数区间. 结果表明, 在混沌状态中存在多个混沌吸引子轨道, 两个子系统的状态值是否会演化到混沌同步轨道, 其值不仅严格地依赖于不连续不可逆映像中不可逆区造成迭代后发生的跃变, 更重要的是取决于它们之间特定的耦合强度, 在较强的耦合作用下, 很容易将其状态值调制到同步轨道. 正因为其内在独特的性质, 耦合后才演化出如此丰富的动力学现象, 而较强耦合强度区域的求出有利于我们对系统达到混沌同步的控制. 本文仅讨论了控制参数处于不连续不可逆映像中的两带混沌区, 该映像还存在着其他特殊的混沌区域, 比如周期 5 和 11 带混沌共存区、周期 5 和 12 带混沌共存区、6 带混沌区等, 这些区域有待于进一步的研究和探索. 此外, 本文中只局限于一种网络拓扑结构和特定的不连续模型, 后续工作我们将研究不同的网络拓扑结构和不同的不连续模型对奇异态的影响.

参考文献

- [1] Kuramoto Y, Battogtokh D 2002 *Non. Phen. Complex Syst.* **5** 380
- [2] Rattenborg N C, Amlaner C J, Lima S L 2000 *Neurosci. Biobehav. R* **24** 817
- [3] Mathews C G, Lesku J A, Lima S L, Amlaner C J 2006 *Ethology* **112** 286
- [4] Dwight B, Laurette S, Tuckerman 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 014502
- [5] Abrams D M, Strogatz S H 2006 *Int. J. Bifurc. Chaos* **16** 21
- [6] Abrams D M, Mirollo R, Strogatz S H, Wiley D A 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 084103
- [7] Sethia G C, Sen A, Atay F M 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 144102
- [8] Omel'chenko O E, Maistrenko Y L, Tass P A 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 044105
- [9] Laing C R 2010 *Phys. Rev. E* **81** 066221
- [10] Wolfrum M, Omel'chenko O 2011 *Phys. Rev. E* **84** 015201
- [11] Omel'chenko I, Maistrenko Y, Hovel P, Schull E 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 234102
- [12] Beta C, Moula M G, Mikhailov A S, Rotermund H H, Ertl G 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 188302
- [13] Alexander S M, Kenneth S 2006 *Phys. Rep.* **425** 79
- [14] Simbarashe N, Mark R T, Kenneth S 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 244102
- [15] Swindale N V 1980 *Proc. R. Soc. Lond. B* **208** 243
- [16] Bard E, John C, George O 1986 *The Veliger* **28** 369
- [17] Murray J D, Myerscough M R 1991 *J. Theor. Biol.* **149** 339
- [18] Sangeeta R U, Ramakrishna R 2013 *Phys. Rev. E* **88** 032902
- [19] Mark R T, Simbarashe N, Kenneth S 2012 *Nat. Phys.* **10** 1038
- [20] Aaron M H, Thomas E M, Rajarshi R, Philipp H, Iryna O, Eckehard S 2012 *Nat. Phys.* **10** 1038
- [21] Zhu Y, Zheng Z G, Yang J Z 2014 *Phys. Rev. E* **89** 022914
- [22] Martens E A, Laing C R 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 044101

- [23] Chad G, Ghislain S Y, Jorn D 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 134101
- [24] Grudzinski K, Zebrowski J J 2004 *Physica A* **336** 153
- [25] Ren H P, Liu D 2005 *Chin. Phys.* **14** 1352
- [26] He D R, Wang B H, Bauer M, Habip S, Krueger U, Martienssen W, Christiansen B 1994 *Physica D* **79** 335
- [27] He D R, Bauer M, Habip S, Krueger U, Martienssen W, Christiansen B, Wang B H 1992 *Phys. Lett. A* **171** 61
- [28] Qu S X, Wu S G, He D R 1997 *Phys. Lett. A* **231** 152
- [29] Qu S X, Wu S G, He D R 1998 *Phys. Rev. E* **57** 402
- [30] Tan H F, Jin T, Qu S X 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 040507 (in Chinese) [谭红芳, 金涛, 屈世显 2012 物理学报 **61** 040507]
- [31] Qu S X, Lu Y Z, Zhang L, He D R 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4418
- [32] Santos A M, Viann R L, Lopes S R 2002 *Phys. Rev. E* **65** 056209

Chimera states in a globally coupled discontinuous map lattices*

Cheng Xing-Chao¹⁾ Yang Ke-Li¹⁾²⁾ Qu Shi-Xian^{1)†}

1) (*Institute of Theoretical and Computational Physics, School of Physics and Information Technology, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China*)

2) (*Institute of Nonlinear research, Department of Physics and Information Technology, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji 721016, China*)

(Received 13 January 2014; revised manuscript received 24 March 2014)

Abstract

The chimera states and cluster chimera states in a globally coupled both discontinuous-and-non-invertible-map lattices are studied using the order parameters and spatial-time-amplitude patterns. The result show that chimera states and cluster chimera states are sensitive depends on the choice of the coupling strength, and they are induced by the interaction between the discontinuity and the non-invertibility in coupled system. We also discuss the conditions for the chimera states existing in this system.

Keywords: discontinuous map, chimera state, cluster states

PACS: 05.45.Ra, 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.63.140505

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10875076) and the Nutural Science Foundation of Shaanxi Province, China (Grant No. SJ08A23).

† Corresponding author. E-mail: sxqu@snnu.edu.cn