

# 二维 Sinai 台球系统的量子混沌研究

秦陈陈 杨双波<sup>†</sup>

(南京师范大学物理科学与技术学院, 南京 210023)

(2014年3月31日收到; 2014年4月11日收到修改稿)

研究了二维 Sinai 台球系统的经典与量子的对应关系, 运用定态展开法和 Gutzwiller 的周期轨道理论对 Sinai 台球系统的态密度经傅里叶变换得到的量子长度谱进行分析, 并把量子长度谱中峰的位置与其所对应的经典体系的周期轨道长度做对比, 发现两者之间存在很好的对应关系. 观察到了一些量子态局域在短周期轨道附近形成量子 scarred 态或量子 superscarred 态. 还研究了同心与非同心 Sinai 台球系统的能级最近邻间距分布, 发现同心 Sinai 台球系统是近可积的, 非同心 Sinai 台球系统在  $\theta = 3\pi/8$  下, 随两中心间距离的增加, 能级最近邻间距分布将由近可积向维格那分布过渡.

**关键词:** 量子台球, 周期轨道理论, 量子长度谱, 能级最近邻间距分布

**PACS:** 05.45.Mt

**DOI:** 10.7498/aps.63.140507

## 1 引言

二维经典台球系统是粒子在二维受限空间内的自由运动, 粒子改变它的运动方向只在与区域的边界发生碰撞时才可发生. 根据边界条件的不同, 二维台球系统可被划分为经典可积系统和经典混沌系统<sup>[1]</sup>两大类, 如二维圆形台球系统<sup>[2]</sup>、正方(矩)形台球系统<sup>[3]</sup>、椭圆台球系统<sup>[4]</sup>等是经典可积的, 相空间的运动是规则的; 而二维运动场台球系统<sup>[5]</sup>、有理多边形台球系统<sup>[6]</sup>等是经典不可积的, 内有散射杂质的正方形台球系统, 如正方形环台球系统<sup>[7]</sup>、Sinai 台球系统<sup>[8]</sup>等也是经典不可积的, 相空间的运动是不规则的, 或混沌的. 由于在圆上反射的高度去聚焦特点, Sinai 台球比正方形环台球系统经典上更混沌. 二维经典台球的不可积性在量子力学中的表现问题, 即量子混沌问题是普遍关心的理论问题, 从理论和实验<sup>[9-14]</sup>上已受到广泛的关注. 业已发现, 可积系统的能谱统计中能级最近邻间距分布为泊松型, 而硬混沌系统的能谱统计中最近邻间距分布为维格那<sup>[15]</sup>型. 对介于可积和硬混沌之间的近可积系统, 其能谱统计也介于泊松分布

和维格那分布之间.

本文研究 Sinai 台球系统的量子混沌. Sinai 台球系统因正方形内部的圆形垒的位置及半径可连续改变, 我们可细致地研究当经典不可积性从弱到强增加时, 能谱统计中最近邻间距分布如何从近泊松分布过渡到维格那分布. 在量子长度谱函数<sup>[16]</sup>中, 一些周期轨道的贡献如何从近可积的显著到不可积的逐渐减小直至最后消失等. 在数学方法上我们采用近期发展的定态展开法<sup>[17]</sup>计算体系的能量本征值和本征函数, 然后导出由态密度经傅里叶变换得到的量子长度谱函数  $\rho(L)$ , 以此研究经典轨道长度  $L$  与量子长度谱中峰值位置的对应关系, 即经典与量子的对应问题. 经典与量子的对应也表现在一些本征态局域在一些短的周期轨道上形成量子 scarred 或 superscarred<sup>[18-20]</sup>态, 这是量子混沌的典型特征.

量子混沌的研究经历了从 Gutzwiller<sup>[1]</sup>的周期轨道理论到 Du 和 Delos<sup>[21]</sup>的闭合轨道理论再到 Du 和 Lu<sup>[3]</sup>的开轨道理论的发展, 在二维圆环量子台球<sup>[22]</sup>及二维椭圆量子台球<sup>[23]</sup>谱的分析研究中取得了重要的成果.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: yangshuangbo@njnu.edu.cn

## 2 二维同心 Sinai 台球系统

### 2.1 二维 Sinai 台球系统的模型及其经典动力学

边长为  $a$  的正方形内有一半径为  $b$  的圆型垒, 粒子在正方形内及圆形垒外自由运动, 在边界上发生弹性碰撞, 由此构成 Sinai 台球, 如图 1 所示. 考虑一粒子的运动, 开始于点  $(x_0, y_0)$ , 做匀速直线运动, 斜率为  $k = V_y/V_x$ , 其中  $V_x, V_y$  为速度的  $x, y$  分量. 当粒子撞在边界(正方形或圆)上时被反射, 反射前后速度的切向分量不变, 法向分量改变符号. 以这种方式跟踪粒子的运动将得到粒子的经典运动轨道. 对同心 Sinai 台球系统, 我们发现运动轨道可分为三大类, 如图 2(a)–(f) 所示, 其中系统结构参数值取为  $a = 10, b = 1, d = 0, \theta = 0$ . 图 2(a)

表示一条各态历经轨道, 在 台球内是均匀分布的; 图 2(b)–(d) 中, 每一条轨道开始短时间内呈现各态历经状态, 随时间进展长时间后它们各将被规则结构所捕获, 所以相空间中是非均匀的; 图 2(e), (f) 是两个周期轨道, 它们是规则结构.

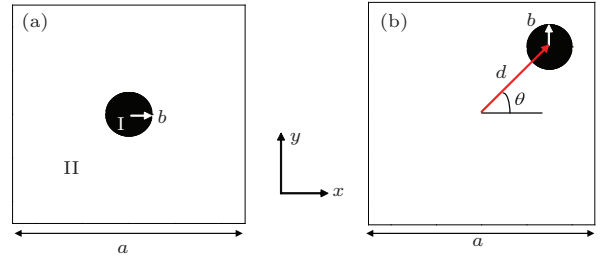


图 1 (a) 二维同心 Sinai 台球系统模型图,  $a$  为正方形边长,  $b$  为圆形半径; (b) 二维非同心 Sinai 台球系统模型图,  $a$  为正方形边长,  $b$  为圆形半径,  $d$  为正方形中心到圆心距离,  $\theta$  为偏离  $x$  轴的偏转角度

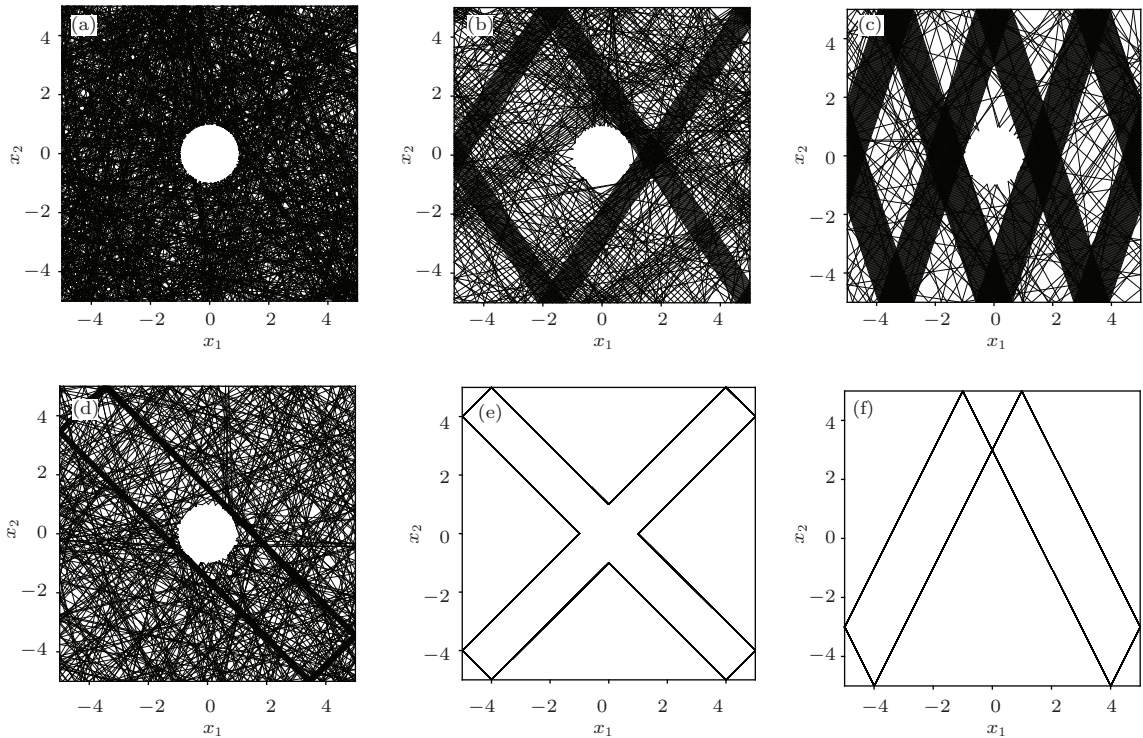


图 2 同心 Sinai 台球系统的经典运动轨道, 已知中心垒的半径  $b = a/10$ , 其中  $a$  为外面正方形的边长 (a) 各态历经轨道; (b)–(d) 捕获轨道; (e), (f) 周期轨道.

### 2.2 量子长度谱函数的表达式

考虑质量为  $M$  的自由粒子在二维无限深势井中运动, 势能表示形式为

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & \mathbf{r} \in \Pi \\ \infty & \text{其他} \end{cases}, \quad (1)$$

代入与时间无关的自由粒子的薛定谔方程得

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi_n(\mathbf{r}) &= \left[ -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \psi_n(\mathbf{r}) \\ &= E_n\psi_n(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $E_n$  为本征能量,  $\psi_n(\mathbf{r})$  为本征波函数,  $n$  为量子数,  $\hbar$  为约化普朗克常量, 波矢为

$$k_n = \sqrt{\frac{2ME_n}{\hbar^2}}. \quad (3)$$

这里, 我们采用定态展开法<sup>[17]</sup>进行近似处理, 取包围圆形体系的正方形作为势能从零到无穷大的过渡区域, 其势为

$$\tilde{V}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & \mathbf{r} \in \text{II} \\ V_0 & \mathbf{r} \in \text{I} \\ \infty & \text{其他} \end{cases}, \quad (4)$$

$$\lim_{V_0 \rightarrow \infty} \tilde{V}(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}), \quad (5)$$

其中,  $V_0$  是一个足够大的常数, 一般取本征值最大值的 10 倍, 即  $V_0 = 10E_{\max}$ . 波函数可以按定态展开为

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_m c_m \phi_m(\mathbf{r}), \quad (6)$$

其中,  $c_m$  为展开系数,  $\phi_m(\mathbf{r})$  为二维矩形无限深势阱的本征函数, 即

$$\begin{aligned} \phi_m(\mathbf{r}) &= \phi_{m_1, m_2}(x_1, x_2) \\ &= \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a} m_1 x_1\right) \\ &\quad \times \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a} m_2 x_2\right). \end{aligned} \quad (7)$$

将 (6) 式代入薛定谔方程 (2) 中得

$$\sum_m (H_{nm} - E_n \delta_{nm}) c_m = 0, \quad (8)$$

$$\int d^2\mathbf{r} \phi_n(\mathbf{r}) \phi_m(\mathbf{r}) = \delta_{nm}. \quad (9)$$

这里 Hamiltonian 矩阵元为

$$H_{nm} = \int d^2\mathbf{r} \phi_n(\mathbf{r}) H \phi_m(\mathbf{r}), \quad (10)$$

利用  $\hat{H} = -(\hbar^2/2M)\nabla^2 + \tilde{V}(\mathbf{r})$ , 可以计算出矩阵元为

$$\begin{aligned} H_{nm} &= \frac{\pi^2 \hbar^2}{2M} \left[ \left(\frac{m_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{a}\right)^2 \right] \delta_{nm} \\ &\quad + V_0 v_{nm}, \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$v_{nm} = \int_I d^2\mathbf{r} \phi_n(\mathbf{r}) \phi_m(\mathbf{r}). \quad (12)$$

这个积分是对整个区域 I 积分, 得出二维同心 Sinai 台球系统中

$$\begin{aligned} v_{nm} &= \left(\frac{2}{a}\right)^2 \left[ \int_{-b}^b \sin\left(\frac{m_1 \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m_2 \pi x}{a}\right) dx \right] \\ &\quad \times \left[ \int_{-\sqrt{b^2-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}} \sin\left(\frac{n_1 \pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi y}{a}\right) dy \right] \end{aligned}$$

$$\times dy]. \quad (13)$$

(13) 式有解析解, 但对于非同心 Sinai 台球, 矩阵元  $v_{nm}$  只能通过数值计算得到. 二维台球系统的能量本征值及本征函数可通过对角化哈密顿矩阵  $H_{mn}$  得到. 我们利用周期轨道理论<sup>[1,24]</sup>分析计算得到的能谱, 周期轨道的特征可通过对量子态密度的表达式作傅里叶变换<sup>[16]</sup>得到, 其结果称为量子长度谱函数表示为

$$\begin{aligned} \rho_{FT}(L) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(k - k_n) e^{ikL} dk \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{ik_n L} \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu} \rho_{\nu, \mu} \delta(L - \nu L_{\mu}). \end{aligned} \quad (14)$$

这里,  $L$  是轨道的长度,  $\mu$  标志周期轨道,  $\nu$  指示重复数,  $\rho_{\nu, \mu}$  的大小与轨道的长度, 结构及稳定性有关, 当  $L = \nu L_{\mu}$ ,  $\nu = 1, 2, 3, \dots$  时,  $\rho_{FT}(L)$  给出一系列峰值. 设能级总数为  $N$ , 则有

$$\rho_N(L) = \sum_{n=1}^N e^{ik_n L}. \quad (15)$$

此时, 我们可以做出二维 Sinai 台球系统在同心情况下的量子长度谱与经典轨道长度的对应关系图, 如图 3 所示. 可以看出, 经傅里叶变换得出的量子长度谱峰的位置与其经典轨道长度有很好的对应关系. 对一些短周期轨道, 在它们的倍周期长度处也有峰出现, 只是峰的幅度减小了, 如长度  $L/a = 2$  的周期轨道, 在  $L = 4a, 6a, 8a$  等处也有对应的峰出现; 长度为  $L/a = 2.154$  的周期轨道在  $L = 4.308a, 6.462a$  等处也有峰; 长度为  $L/a = 2.828$  的周期轨道在  $L = 5.656a$  处也有峰出现等.

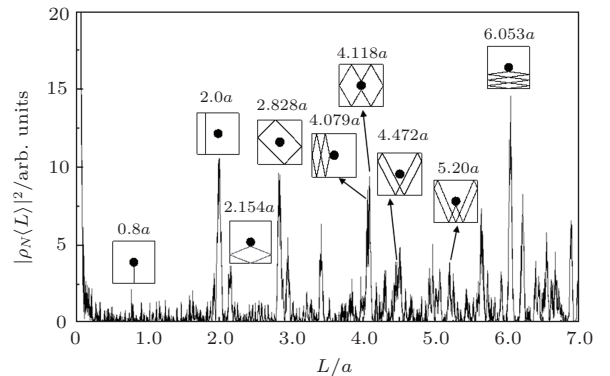


图 3  $b = a/10$ , 同心 Sinai 台球系统量子长度谱与经典轨道长度的对应图

### 2.3 能级最近邻间距分布

#### 2.3.1 能谱的展平<sup>[25]</sup>

设原始能级积累密度为  $N(E_i)$ , 表示能量  $E \leq E_i$  的能级数目. 对原始能谱的能级积累密度数据作最小二乘拟合, 令  $N_f(E_i) = c_1\sqrt{E_i} + c_2E_i$ , 确定系数  $c_1, c_2$ , 并令新的能谱(展平后的)为  $\varepsilon_i = N_f(E_i)$ . 展平后的能谱平均最近邻间距近似为1, 如图4(a)所示, 以下对展平后的能谱进行统计.

#### 2.3.2 能级最近邻间距分布 $p(s) \sim s$

在展平后的能谱序列中任选一组最近邻能级  $x_{i+1}, x_i$ , 二者之间的距离  $dx_i = x_{i+1} - x_i$  处在  $(s, s + ds)$  内的概率为  $P(s)ds$ , 则  $P(s)$  称为能级最近邻间距分布, 数值计算上我们可以取  $p(s) = \Delta N/Nds$ , 这里  $\Delta N$  为能级对的数目,  $N$  为能级总数. 对  $b = a/10$  的系统, 其能级最近邻间距分布如图4(b)所示, 虚线为维格那分布  $p(s) = (\pi s/2) \exp(-\pi s^2/4)$ , 光滑实线为泊松分布  $p(s) = e^{-s}$ . 结果显示, 在二维同心 Sinai 台球系统中其  $P(s)$  在  $s > 2$  范围内接近于泊松分布, 在  $0 < s < 2$  的范围内偏离泊松分布和维格那分布, 这与同心 Sinai 台球系统的经典动力学是一致的, 那里由于捕获轨道的存在, 使得相空间的分布不均匀, 表明还没有达到硬混沌.

### 3 二维非同心 Sinai 台球系统

二维非同心 Sinai 台球系统的量子长度谱计算及能级最近邻间距分布的理论方法与同心 Sinai 台球的情况相同, 在  $b = a/10, \theta = 3\pi/8, d$  取不同值时得出的结论如图5所示. 图5(a1)—(a5)中, 虚

线为维格那分布, 光滑实线为泊松分布. 结果显示, 随着  $d$  的值逐渐增大到  $0.2a$  时, 其  $p(s)$  分布很快趋于维格那分布, 这与经典相空间充满了混沌有关. 图5(b1)—(b5)显示, 在二维非同心 Sinai 台球系统中, 随着  $d$  值的增大, 量子长度谱峰其大小逐渐减小直至消失, 最后剩下的是那些在圆形垒移动时未受到影响的周期轨道及它们的倍周期. 如周期  $L/a = 2$  的轨道及倍周期  $L = 4a, 6a, 8a$ ; 周期  $L/a = 2.828$  的轨道及倍周期  $L = 5.656a$  等, 与它们对应的峰在  $d = 0.2a$  时依然存在; 非同心下新周期轨道由于其稳定性差对量子谱的贡献甚微.

### 4 波函数与周期轨道的关系

量子与经典对应不仅仅表现在量子长度谱中峰值的位置与周期轨道的长度相同上, 还表现在几率密度沿周期轨道的形状分布上. 人们把波函数的强度沿周期轨道局域分布的现象称为量子 scars. 除量子 scars<sup>[18]</sup> 外, 人们还发现了量子 super-scars<sup>[19,20]</sup>, 疤痕现象是 Heller<sup>[18]</sup> 首先发现的. 我们对同心 Sinai 台球系统, 在图6(a)—(f)中给出了几个 scarred 或 superscarred 量子态, 其中图6(a)中的量子态与图2中的长为  $0.8a$  的弹球周期轨道相对应; 图6(b)的量子态与图2中长为  $2.828a$  的正方形周期轨道相对应; 图6(c)—(f)对应几种周期轨道的叠加态, 如图6(c)对应于对角周期轨道和弹球周期轨道的叠加态, 图6(d)和图6(f)对应于两个矩形周期轨道的叠加态; 图6(e)对应于两个对角周期轨道的叠加态, 但它对量子长度谱的贡献很小, 叠加性是由于系统的对称性引起的.

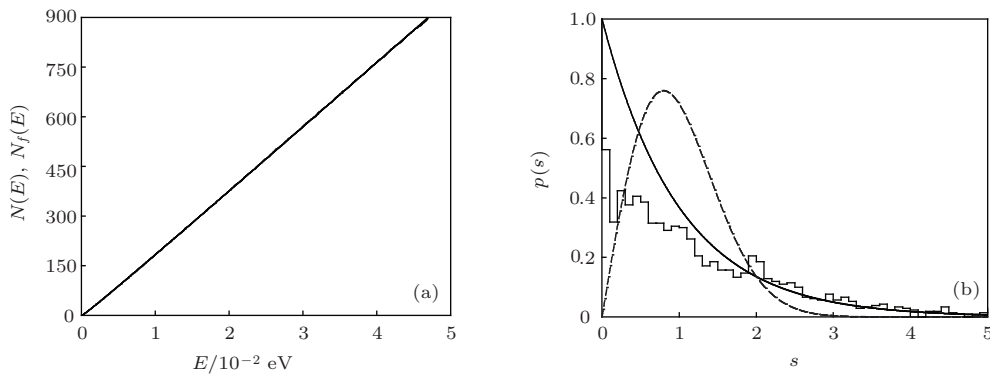


图4  $b = a/10$  同心 Sinai 台球系统 (a) 能级积累密度  $N(E)$  及最小二乘拟合  $N_f(E)$ ; (b) 能级最近邻间距分布

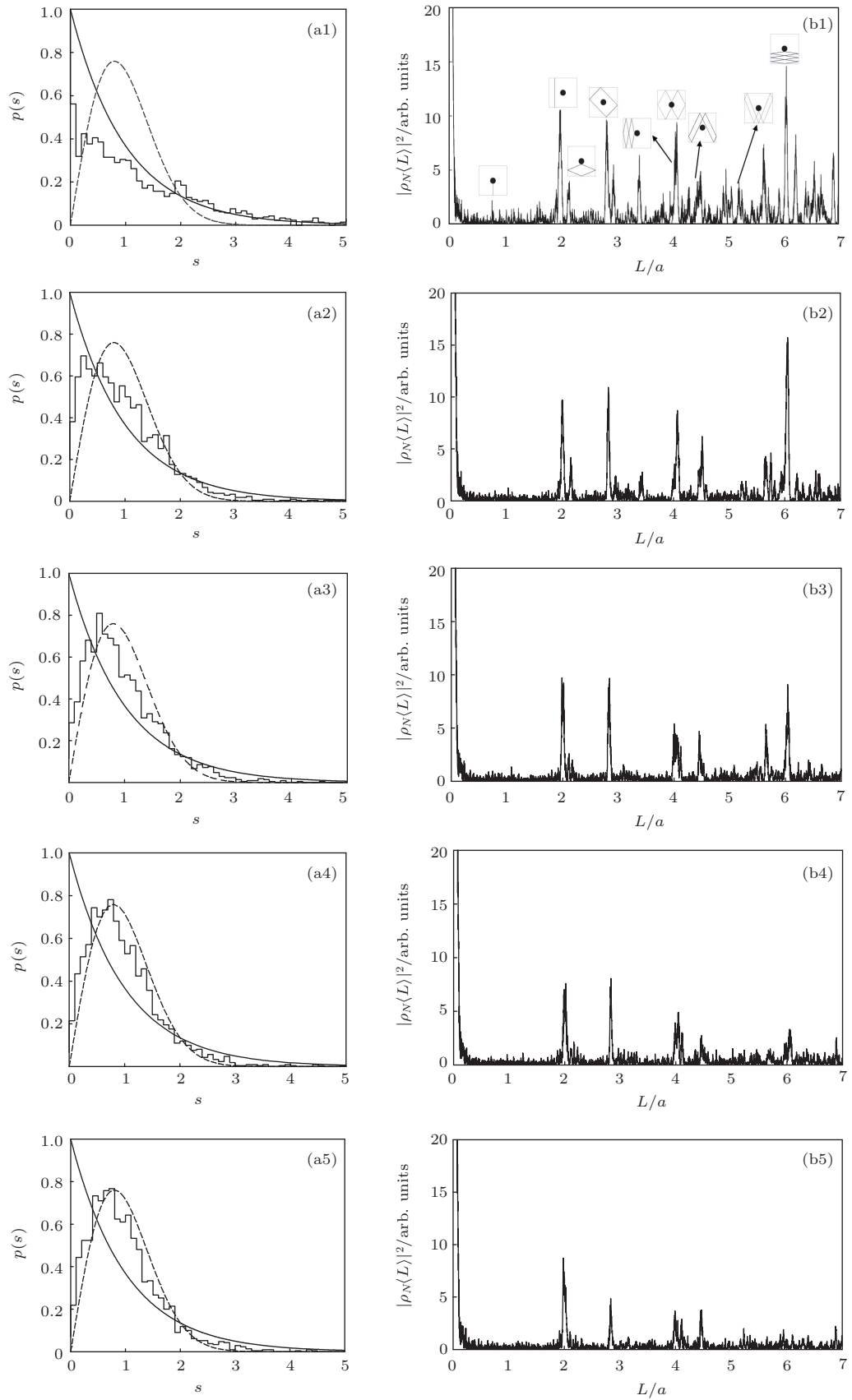


图5 (a1)—(a5)  $b = a/10$ ,  $\theta = 3\pi/8$ ,  $d$ 取一系列值时非同心 Sinai 台球系统的能级最近邻间距分布; (b1)—(b5) 该情况下的量子长度能谱

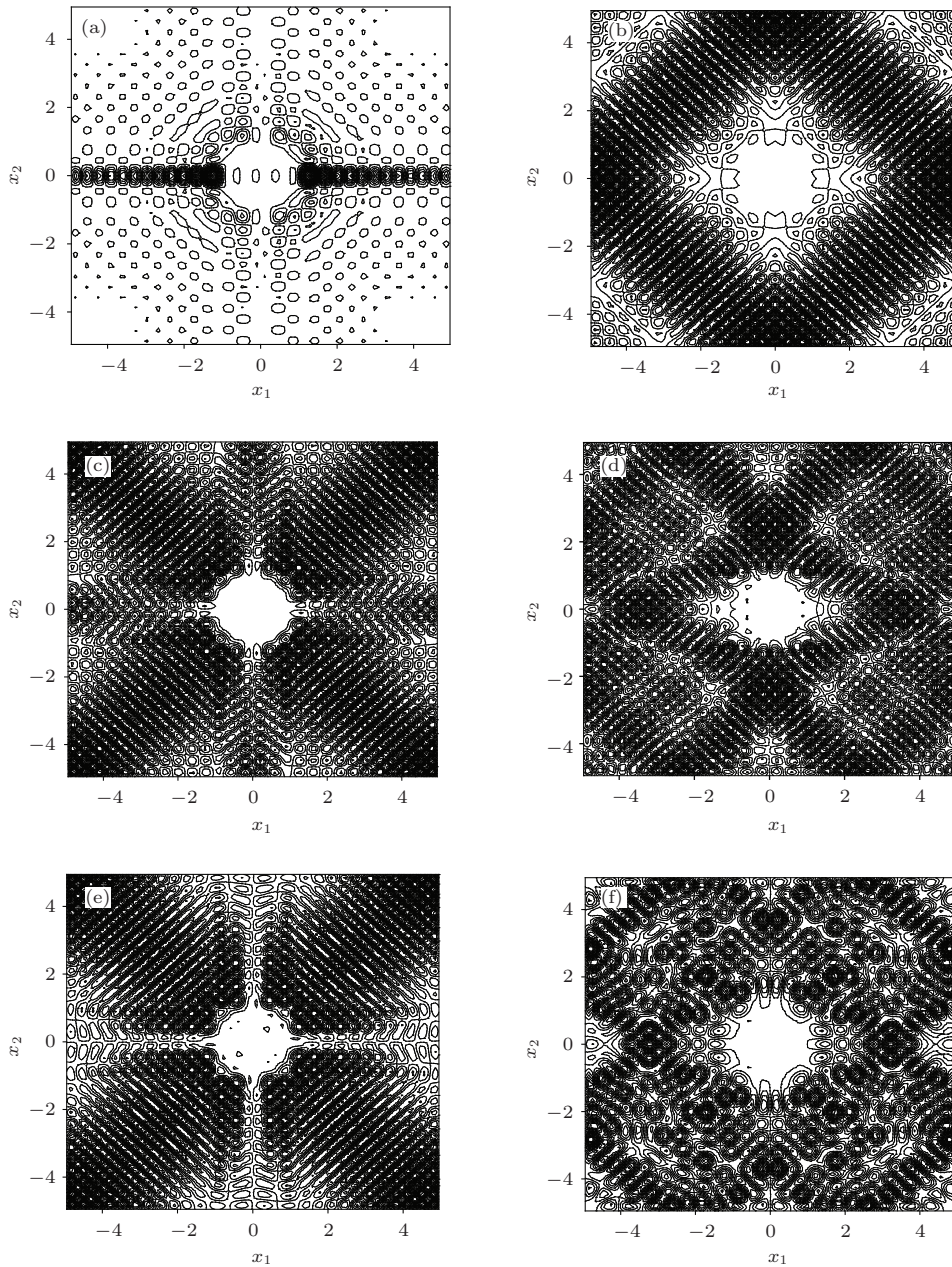


图6 (a)—(f) 几个波函数的等高线图, 它们是不同的 scarred 或 superscarred 量子态, 对应于经典周期轨道

## 5 讨论与结论

本文利用 Gutzwiller's 周期轨道理论和近期发展的定态展开的方法计算了二维 Sinai 台球系统的量子长度谱函数, 发现在同心情况下量子长度谱峰的位置与经典轨道长度有很好的对应关系, 验证了周期轨道理论的正确性; 在非同心情况下且  $\vartheta = 3\pi/8$  下, 随着两中心之间距离的增加量子长度谱峰的大小逐渐减小直至消失. 同时我们研究了两种情况下 Sinai 台球系统的能级最近邻间距分布, 发现在同

心情况下得出的能级最近邻间距分布只在  $s > 2$  范围内较接近于泊松分布, 而在  $0 < s < 2$  的范围内与泊松分布及维格那分布有很大的差别, 这是相空间存在某种不均匀性或近可积的体现. 这与正方形环台球系统 [7] 的结果不同, 那里同心正方形环台球系统给出能级最近邻间距分布为泊松分布的结论. 在非同心情况下得出的能级最近邻间距分布图显示, 随着两中心之间距离的增加其分布逐渐接近维格那分布, 表明经典相空间由弱混沌向强混沌的过渡. 该结论与正方形环台球系统的结论相同. 本文也研究了同心 Sinai 台球系统的本征函数, 观察到

了 scarred 或 superscarred 本征态, 波函数沿经典周期轨道分布或局域的现象, 是量子混沌的明显特征.

### 参考文献

- [1] Gutzwiller M C 1990 *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (New York: Springer-Verlag) pp254–281, 282–321
- [2] Robinett R W 1996 *Am. J. Phys.* **64** 440
- [3] Lu J, Du M L 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2450 (in Chinese) [陆军, 杜孟利 2004 物理学报 **53** 2450]
- [4] Berry M V 1981 *Eur. J. Phys.* **2** 91
- [5] Heller E J, O'Connor P W, Gehlen J 1989 *Physica Scripta* **40** 354
- [6] Cheon T, Cohen T D 1989 *Phys. Rev. Lett.* **62** 2769
- [7] Tuan P H, Yu Y T, Chiang P Y, Liang H C, Huang K F, Chen Y F 2012 *Phys. Rev. E* **85** 026202
- [8] Shigehara T 1994 *Phys. Rev. E* **50** 4357
- [9] Nakamura K, Thomas H 1988 *Phys. Rev. Lett.* **61** 247
- [10] Wilkinson P B, Fromhold T M, Eaves L, Sheard F W, Miura N, Takamasu T 1996 *Nature* **380** 606
- [11] Marcus C M, Rimberg A J, Westervelt R M, Hopkins P F, Gossard A C 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 506
- [12] Shudo A, Shimizu Y 1993 *Phys. Rev. E* **47** 54
- [13] Šeba P, Zyczkowski 1991 *Phys. Rev. A* **44** 3457
- [14] Kudroli A, Kidambi V, Sridhar S 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 822
- [15] Stöckmann H J 1999 *Quantum Chaos* (Cambridge: Cambridge University Press) pp86–92
- [16] Stöckmann H J, Stein J 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 2215
- [17] Kaufman D L, Kosztin I, Schulten K 1999 *Am. J. Phys.* **67** 133
- [18] Heller E J 1984 *Phys. Rev. Lett.* **53** 1515
- [19] Bogomolny E, Schmit C 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 244102
- [20] Bogomolny E, Dietz B, Friedrich T 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 254102
- [21] Du M L, Delos J B 1988 *Phys. Rev. A* **38** 1896
- [22] Zhang Y H, Xu X Y, Lin S L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 35
- [23] Du M L, Zhang Y H, Xu X Y 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4538 (in Chinese) [杜孟利, 张延惠, 徐学友 2005 物理学报 **54** 4538]
- [24] Balian R, Bloch C 1974 *Ann. Phys.* **85** 514
- [25] Haak F 1991 *Quantum Signature of Chaos* (Berlin, Heidelberg: Springer) pp52–54

## Quantum chaos for two-dimensional Sinai billiard

Qin Chen-Chen Yang Shuang-Bo<sup>†</sup>

(School of Physical Science and Technology, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, China)

( Received 31 March 2014; revised manuscript received 11 April 2014 )

### Abstract

We study the classical and quantum correspondence for a two-dimensional Sinai billiard system. By using the Stationary state expansion method and Gutzwiller's periodic orbit theory, we analyze the quantum length spectrum obtained through the Fourier transformation of the quantum density of state for the Sinai billiard system, and by comparing the peak position with the length of the classical periodic orbit we find their excellent correspondence. We observe that some quantum states are localized near some short period orbits, forming the quantum scarred states or superscarred states. In this paper we also investigate the nearest-neighbor spacing distribution of levels for both concentric and nonconcentric Sinai billiard systems, and find that the concentric Sinai billiard system is nearintegrable, and for the nonconcentric Sinai billiard system with  $\vartheta = 3\pi/8$  its nearest-neighbor spacing distribution of levels transits from nearintegrable to the Wigner distribution as the distance between the two centers increases.

**Keywords:** quantum billiard, periodic orbit theory, quantum length spectrum, level nearest neighbor spacing distribution

**PACS:** 05.45.Mt

**DOI:** 10.7498/aps.63.140507

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: yangshuangbo@njnu.edu.cn