# 构造Birkhoff动力学函数的Santilli第二方法的简化*

宋端†

(辽东学院影像物理教研室, 丹东 118001)

( 2014 年 3 月 16 日收到; 2014 年 3 月 31 日收到修改稿 )

研究力学系统Birkhoff动力学函数的构造方法. Santilli 第二方法是目前构造Birkhoff动力学函数时常用的方法之一, 但研究发现其计算公式存在冗余项. 通过具体的证明得到了简化的Santilli第二方法, 从而为自伴随系统Birkhoff动力学函数的构造提供了更为简洁的计算公式. 举例说明结果的应用.

**关键词**: Birkhoff系统, Birkhoff动力学函数, Santilli第二方法

**PACS:** 45.05.+x, 02.30.Zz, 45.10.–b **DOI:** 10.7498/aps.63.144501

## 1 引 言

20世纪70年代末到80年代初, 美国物理学家R. M. Santilli为实现保守和非保守系统普适的自伴随表示, 从变分法逆问题的角度推广了Hamilton方程, 得到了更为一般的自伴随方程——Birkhoff方程. 随后, Santilli在文献[1]中系统地研究了Birkhoff方程的解析性质、代数结构和辛几何特征, 并建立了Birkhoff力学的基本理论框架. 经过国内外学者近40年的研究, Birkhoff力学已发展成为分析力学的一个重要研究方向[2−8].

作为Hamilton力学的自然推广, Birkhoff动力学理论在非保守系统的结构分析和保守结构算法的推广方面有明显的优势[9−11]. 但要将力学系统纳入到Birkhoff体系下来研究, 必须先将系统的运动微分方程变换为Birkhoff方程, 而这关键是要构造出所需的Birkhoff动力学函数[12−14]. 由于研究对象一般是结构复杂的非保守系统, 要顺利构造其Birkhoff动力学函数通常是困难的, 这使得构造方法问题成为制约Birkhoff力学发展的主要因素之一. 为此, 本文研究Birkhoff动力学函数的构造方法问题.

Santilli第二方法作为目前最常用的构造方法之一, 为已自伴随化系统Birkhoff动力学函数的构造提供了普适的方法. 但研究表明, Santilli第二方法的计算公式中存在冗余项, 需要做进一步的简化. 本文通过具体的证明, 得到了简化的Santilli第二方法, 为一大类力学系统(即可以通过自伴随因子自伴随化的系统) Birkhoff动力学函数的构造提供了更为简洁的计算公式.

## 2 Birkhoff方程及其普适性

考虑位形空间中的完整系统, 不论是保守的还是非保守的, 其运动微分方程都可以表示为如下基本形式:

$$\begin{aligned} &A_{ij}(t,q,\dot q)\ddot q^j + B_i(t,q,\dot q)\\ =&0 \quad (i,j=1,2,\cdots,n). \end{aligned}\tag{1}$$

这里及以后上下重复指标表示求和. 如果基本形式(1)是正规的, 即$\det(A_{ij})\neq 0$, 则可将其改写为如下运动学形式:

$$\ddot q^i - f^i(t,q,\dot q)=0,\tag{2}$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 11172120, 11202090, 11272050) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: songduan620606@163.com

 http://wulixb.iphy.ac.cn

$$f^i \in \mathcal{C}^2(R^{2n+1}), \tag{3}$$

其中

$$f^i = -A^{ij}B_j, \quad (A^{ij}) = (A_{ij})^{-1}. \tag{4}$$

这里(3)式表示函数$f^i$在定义域上至少是二阶连续可导的.

力学系统在二阶形式(1)下, 按照是否能够自伴随化可分为3类: 本质自伴随系统、非本质非自伴随系统和本质非自伴随系统. 其中本质非自伴随系统是指不存在积分因子将其自伴随化的二阶系统(1). 这种分类对于研究变分法逆问题是重要的, 从Lagrange逆问题的角度看, 自伴随的或可以自伴随化的二阶系统总能Lagrange化; 但本质非自伴随系统无法用Lagrange方程来描述. 从Hamilton逆问题的角度看, 前两类系统在相空间中可以实现具有简单辛结构的Hamilton表示; 但对于本质非自伴随系统, 当降为一阶形式后, 如果不借助Darboux变换仍然无法实现Hamilton化. 但若借助Darboux变换来实现系统的Hamilton化, 则会使系统的变量和动力学函数失去物理意义. 因此, 在保持变量和动力学函数物理意义的前提下, Lagrange逆问题和Hamilton逆问题不具有普适性. 但Birkhoff逆问题是具有这样的直接普适性的, 即如果将保守和非保守系统用Birkhoff方程来描述, 则可以普适的实现系统的自伴随表示.

非自治Birkhoff方程的一般形式为

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial R_\nu(t,a)}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu(t,a)}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu \\ &- \left(\frac{\partial B(t,a)}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu(t,a)}{\partial t}\right) \\ &= 0 \quad (\mu,\nu = 1,2,\cdots,2n),\end{aligned} \tag{5}$$

其中$B$为Birkhoff函数, $R_\mu$为Birkhoff函数组. 为方便起见, 本文将函数$B$和$R_\mu$统称为Birkhoff动力学函数. 借助Birkhoff张量

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu} = \frac{\partial R_\nu}{\partial a_\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial R^\nu}, \tag{6}$$

还可以将方程(1)记为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu}(t,a)\dot{a}^\nu - \left(\frac{\partial B(t,a)}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu(t,a)}{\partial t}\right) \\ &= 0 \quad (\mu,\nu = 1,2,\cdots,2n).\end{aligned} \tag{7}$$

此外, Birkhoff方程的自伴随性表现为满足如下条件

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu} + \boldsymbol{\Omega}_{\nu\mu} = 0, \tag{8a}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu}}{\partial a^\tau} + \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_{\nu\tau}}{\partial a^\mu} + \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_{\tau\mu}}{\partial a^\nu} = 0, \tag{8b}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial a^\mu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right) \\ &- \frac{\partial}{\partial a^\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right),\end{aligned} \tag{8c}$$

其中(8a)和(8b)式分别说明Birkhoff张量$\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu}$是反对称的和满足Jacobi恒等式的.

Birkhoff方程除了非自治形式(5)或(7)外, 还有半自治和自治形式. 如果函数$R_\mu$不显含时间$t$, 而函数$B$显含时间$t$, 则Birkhoff方程称为半自治的, 有形式

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu}(a)\dot{a}^\nu - \frac{\partial B(t,a)}{\partial a^\mu} = 0, \tag{9}$$

如果函数$B$和$R_\mu$都不显含时间$t$, 则Birkhoff方程称为自治的, 有形式

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu}(a)\dot{a}^\nu - \frac{\partial B(a)}{\partial a^\mu} = 0. \tag{10}$$

Birkhoff表示的直接普适性由如下定理保证.

**定理**[1,3] 任何局域、解析、正规、完整的一阶动力学系统, 不论是保守的还是非保守的, 自伴随的还是非自伴随的, 在其正规点的星形邻域上总能实现保持动力学函数和变量物理意义的Birkhoff方程形式(5).

## 3 Santilli第二方法及其简化

假设给定系统的运动微分方程已化为如下标准一阶形式:

$$\dot{a}^\mu - \varXi^\mu(t,a) = 0 \quad (\mu = 1,2,\cdots,2n). \tag{11}$$

构造Birkhoff动力学函数的目的是要得到与(11)式等价的Birkhoff方程(5). 若还要求Birkhoff方程可写为逆变形式:

$$\dot{a}^\mu = \boldsymbol{\Omega}^{\mu\nu}\left[\frac{\partial B(t,a)}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu(t,a)}{\partial t}\right], \tag{12}$$

其中$\boldsymbol{\Omega}^{\mu\nu} = \boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu}^{-1}$, 则正规性要求是必须的, 即要求

$$\det(\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu}) \neq 0. \tag{13}$$

Santilli第二方法[1,3]: 若可以构造出系统(11)的自伴随形式

$$[\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu}(t,a)\dot{a}^\nu + \varGamma_\mu(t,a)]_{\mathrm{SA}} = 0, \tag{14}$$

其中下标SA表示自伴随(self-adjointness), 则Birkhoff张量$\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu}$成为已知量, 再利用定义式(6)积分得

$$R_\mu(t,a) = \left[\int_0^1 \tau \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\nu\mu}(t,\tau a)\,\mathrm{d}\tau\right]a^\nu, \tag{15}$$

这里所引入的参变量$\tau$满足$0\leqslant\tau\leqslant 1$, 其作用是保证积分区域为星形可缩区域. 将$\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu}$和$R_\mu$代入Birkhoff方程(5), 并注意到(14)式则可得

$$B(t,a) = -\left[\int_0^1\left(\boldsymbol{\Omega}_\mu+\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right)(t,\tau a)\,\mathrm{d}\tau\right]a^\mu. \tag{16}$$

这种构造函数$B$和$R_\mu$的方法称为Santilli第二方法.

下面来具体证明Santilli第二方法的计算公式(16)可以被简化.

**命题** Santilli第二方法的计算公式(16)可以简化为

$$B(t,a) = -\left[\int_0^1\boldsymbol{\Omega}_\mu(t,\tau a)\,\mathrm{d}\tau\right]a^\mu. \tag{17}$$

**证明** 首先, 对于半自治Birkhoff方程(9)和自治Birkhoff方程(10)的情况, 由于总有$\dfrac{\partial R_\mu}{\partial t}=0$, 故命题成立. 其次, 我们来证明对于一般的非自治Birkhoff方程(5)的情况, 仍有(17)式成立. 将(15)式的两边同乘以$a^\mu$, 并注意到该式中的被积函数$(\tau\cdot\boldsymbol{\Omega}_{\nu\mu})$是反对称的, 则可得

$$R_\mu a^\mu = \left[\int_0^1\tau\cdot\boldsymbol{\Omega}_{\nu\mu}(t,\tau a)\,\mathrm{d}\tau\right]a^\nu a^\mu \equiv 0, \tag{18}$$

对上式关于$t$求偏导数得

$$\frac{\partial R_\mu}{\partial t}a^\mu + R_\mu\frac{\partial a^\mu}{\partial t} = 0, \tag{19}$$

由于变量$a$和$t$是独立的, 即$\dfrac{\partial a^\mu}{\partial t}=0$ $(\mu=1,2,\cdots,2n)$, 故有

$$\frac{\partial R_\mu}{\partial t}a^\mu = 0. \tag{20}$$

再将非自治Birkhoff方程(7)两端同乘以$a^\mu$得

$$(\boldsymbol{\Omega}_{\nu\mu}\dot a^\nu)a^\mu = \frac{\partial B}{\partial a^\mu}a^\mu + \frac{\partial R_\mu}{\partial t}a^\mu, \tag{21}$$

将(20)式代入上式有

$$\frac{\partial B}{\partial a^\mu}a^\mu = (\boldsymbol{\Omega}_{\nu\mu}\dot a^\nu)a^\mu. \tag{22}$$

其次, 通过引入参数$\tau(0\leqslant\tau\leqslant 1)$将积分区域限定为星形区域, 再将(22)式中的变量$(t,a)$替换为$(t,\tau a)$得到

$$\frac{\partial B(t,\tau a)}{\partial(\tau a^\mu)}\tau a^\mu = [\boldsymbol{\Omega}_{\rho\nu}\dot a^\nu(t,\tau a)]\tau a^\mu, \tag{23}$$

将左端改写, 即

$$\begin{aligned}\frac{\partial B(t,\tau a)}{\partial(\tau a^\mu)}\tau a^\mu &= \tau\frac{\partial B(t,\tau a)}{\partial(\tau a^\mu)}\frac{\partial(\tau a^\mu)}{\partial\tau}\\ &= \tau\frac{\mathrm{d}B(t,\tau a)}{\mathrm{d}\tau},\end{aligned} \tag{24}$$

联立(23)、(24)式得

$$\frac{\mathrm{d}B(t,\tau a)}{\mathrm{d}\tau} = [\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu}\dot a^\nu(t,\tau a)]a^\mu. \tag{25}$$

两边关于参变量$\tau$积分得

$$B(t,a) = \left[\int_0^1\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu}\dot a^\nu(t,\tau a)\,\mathrm{d}\tau\right]a^\mu, \tag{26}$$

再由(14)式知

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu}\dot a^\nu = -\boldsymbol{\Gamma}_\mu \tag{27}$$

将其代入(26)式, 则有(17)式成立. 命题得证.

## 4 算 例

试用Santilli第二方法构造线性阻尼系统

$$\ddot x + x + \gamma\dot x = 0, \quad \gamma = \text{const} \tag{28}$$

的Birkhoff函数$B$和Birkhoff函数组$R_\mu$.

首先, 利用自伴随积分因子$\mathrm{e}^{\gamma t}$将非自伴随系统(28)自伴随化为

$$\mathrm{e}^{\gamma t}(\ddot x + x + \gamma\dot x) = 0, \tag{29}$$

令$a^1=x$, $a^2=\dot x$, 则系统(29)对应的自伴随形式为

$$\begin{aligned}&-\mathrm{e}^{\gamma t}\dot a^2 - \mathrm{e}^{\gamma t}(a^2\gamma + a^1) = 0,\\ &\mathrm{e}^{\gamma t}\dot a^1 - \mathrm{e}^{\gamma t}a^2 = 0.\end{aligned} \tag{30}$$

矩阵形式为

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\Omega_{11} & \Omega_{12}\\ \Omega_{21} & \Omega_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -\mathrm{e}^{\gamma t}\\ \mathrm{e}^{\gamma t} & 0\end{pmatrix},\\ &\begin{pmatrix}\Gamma_1\\ \Gamma_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\mathrm{e}^{\gamma t}(a^2\gamma + a^1)\\ -\mathrm{e}^{\gamma t}a^2\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{31}$$

其次, 将(31)式代入(15)式得到

$$\begin{aligned}R_1 &= \int_0^1 \mathrm{e}^{\gamma t}\tau a^2\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\gamma t}a^2,\\ R_2 &= \int_0^1 \mathrm{e}^{\gamma t}a^2\tau\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\gamma t}a^2;\end{aligned} \tag{32}$$

再代入(13)式得到

$$\begin{aligned}B =& -\int_0^1\left\{\left[-\mathrm{e}^{\gamma t}(\tau a^2\gamma + \tau a^1) + \frac{1}{2}\gamma\,\mathrm{e}^{\gamma t}\tau a^2\right]a^1\right.\\ &\left.+\left[-\mathrm{e}^{\gamma t}\tau a^2 + \frac{1}{2}\gamma\,\mathrm{e}^{\gamma t}\tau a^1\right]a^2\right\}\mathrm{d}\tau\\ =&\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\gamma t}[(a^1)^2 + (a^2)^2 + \gamma a^1 a^2];\end{aligned} \tag{33}$$

最后, 将 (31) 式代入简化的 Santilli 第二方法 (17) 式得到

$$\begin{aligned}B' = &- \int_0^1 \{[-\mathrm{e}^{\gamma t}(\tau a^2\gamma + \tau a^1)]a^1 \\ &+ [-\mathrm{e}^{\gamma t}\tau a^2]a^2\}\mathrm{d}\tau \\ =&\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\gamma t}[(a^1)^2 + (a^2)^2 + \gamma a^1 a^2].\end{aligned} \tag{34}$$

可以看出, 简化前后的方法给出的 Birkhoff 函数 $B$ 的表达式 (33) 和 (34) 是一致的.

## 5 结　论

如前所述, 动力学函数的构造问题是 Birkhoff 力学的基本问题之一. Santilli 第二方法作为少数具有普适性的构造方法之一, 值得做进一步的研究. 本文关于 Santilli 第二方法的简化, 为已自伴随化系统 Birkhoff 函数的构造提供了更为简洁的计算方法, 特别是对于高维系统的情况效果将更加明显.

## 参考文献


[1] Santilli R M 1983 *Foundations of Theoretical Mechanics* II (New York: Springer-Verlag)

[2] Hojman S, Urrutia L F 1981 *J. Math. Phys.* **22** 1896

[3] Mei F X, Shi R C, Zhang Y F, Wu H B 1996 *Dynamics of Birkhoffian System* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔, 史荣昌, 张永发, 吴惠彬 1996 Birkhoff 系统动力学 (北京: 北京理工大学出版社)]

[4] Guo Y X, Liu C, Liu S X 2011 *Commun. Math.* **18** 21

[5] Ding G T 2010 *Acta. Phys. Sin.* **59** 3643 (in Chinese) [丁光涛 2010 物理学报 **59** 3643]

[6] Wu H B, Mei F X 2011 *Chin. Phys. B* **10** 290

[7] Zhang Y, Xue Y 2009 *Chin. Quar. Mech.* **30** 216 (in Chinese) [张毅, 薛纭 2009 力学季刊 **30** 216]

[8] Luo S K, Li Z J, Li L 2012 *Acta Mechanica* **223** 2621

[9] Jia L Q, Wang X X, Zhang M L, Han Y L 2012 *Nonlinear Dyn.* **69** 1807

[10] Chen X W 2002 *Global Analysis of Birkhoffian System* (Kaifeng: Henan University Press) (in Chinese) [陈向炜 2002 Birkhoff 系统的全局分析 (开封: 河南大学出版社)]

[11] Liu S X, Liu C, Guo Y X 2011 *Chin. Phys. B* **20** 034501

[12] Liu C, Liu S X, Guo Y X 2011 *Sci. Chin. Tech. Sci.* **54** 2100

[13] Cui J C, Liu S X, Song D 2013 *Chin. Phys. B* **22** 104501

[14] Kong X L, Wu H B, Mei F X 2013 *Nonlinear Dyn.* **74** 711

# Simplification of Santilli's second method of constructing Birkhoffian functions*

Song Duan†

(*Physics of Medical Imaging Department, Eastern Liaoning University, Dandong 118001, China*)

( Received 16 March 2014; revised manuscript received 31 March 2014 )

**Abstract**

The method of constructing Birkhoffian funcations of mechanical systems is investigated. The redundant term is discovered in Santilli's second method. As a result, a simpler construction formula for self-adjoint systems is obtained by cancelling the redundant term. An example is given to illustrate the application of the results.

**Keywords:** Birkhoffian systems, Birkhoffian funcations, Santilli's second method

**PACS:** 45.05.+x, 02.30.Zz, 45.10.–b **DOI:** 10.7498/aps.63.144501

∗ Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11172120, 11202090, 11272050).

† Corresponding author. E-mail: songduan620606@163.com