

线性与非线性光晶格中偶极孤立子的稳定性

雍文梅^{1)†} 陈海军²⁾

1) (甘肃农业大学理学院, 兰州 730070)

2) (陇东学院电气工程学院, 庆阳 745000)

(2014年3月18日收到; 2014年4月8日收到修改稿)

利用变分法研究了线性与非线性交叉光晶格中偶极玻色-爱因斯坦凝聚 (BEC) 体系中物质波孤立子的稳定性. 选用柱对称高斯型试探波函数, 得出参数的 Euler-Lagrange 方程和体系的有效作用势能, 根据有效势能是否具有局域最小值判断体系是否具有稳定孤立子解. 结果表明, 由于存在接触相互作用的空间调制, 在排斥和吸引偶极相互作用下, 均能形成稳定的孤立子解. 给出了参数空间中存在稳定解的区域和物质波波包宽度随时间的变化曲线.

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚, 线性非线性光晶格, 偶极孤立子, 稳定性

PACS: 03.75.Lm, 03.75.Hh, 03.75.Nt

DOI: 10.7498/aps.63.150302

1 引言

光晶格 (optical lattices, OLs) 中玻色爱因斯坦凝聚 (BEC) 的研究引起了理论研究的关注^[1-3], 研究了体系的基态行为, 调制不稳定性 and 隧穿动力学行为. 光晶格分为线性光晶格 (LOL) 和非线性光晶格 (NOL)^[4], 其中孤立子的研究有重要的意义^[5-7]. LOL 中在排斥和吸引相互作用下均能形成能隙孤立子^[8,9], NOL 中也可以形成稳定的孤立子, 一维交叉型 NOL 中在排斥和吸引相互作用下可以形成稳定的二维孤立子^[4], 二维线性和二维非线性交叉光晶格中的物质波的稳定性也有理论研究^[10].

另外, 实验上实现了偶极相互作用下⁵²Cr 原子^[11] 和¹⁶⁴Dy 原子^[12] 的 BEC, 扩展了 BEC 的研究领域. BEC 体系中原子之间的相互作用包括 s 波散射的接触相互作用和空间各向异性的长程偶极相互作用, 体系的稳定性受接触相互作用和偶极相互作用共同支配, 偶极相互作用是长程而且是空间各向异性的, 因此形成稳定偶极 BEC 的条件和非偶极 BEC 的条件截然不同. Adhikari 等人研究了一维和二维光晶格中偶极 BEC 体系中物质波

孤立子的稳定性, 给出了形成稳定孤立子的参数区间^[13,14]. 另外, 调制相互作用下偶极体系在外场中的非线性动力学行为也有理论研究^[15,16].

本文综合考虑了光晶格和偶极相互作用两方面因素, 研究了 LOL 和 NOL 交叉型光晶格中偶极 BEC 体系中物质波孤立子的稳定性, 利用变分法研究了 x 方向 LOL 和 y 方向 NOL 形成的交叉型光晶格中偶极 BEC 体系中的物质波孤立子存在的参数区间, 建立了变分法研究稳定性所需要的 GP 方程, 波包宽度随时间变化的运动方程和稳定性分析需要的有效势能的表达式, 利用有效势能是否具有局域最小值来判断体系是否具有稳定的孤立子解存在, 给出相图中的稳定区域.

2 模型

在 LOL 和 NOL 交叉型光晶格中, 由 N 个质量为 m 的原子形成的偶极调制 BEC 体系, 在平均场近似下用 Gross-Pitaevskii (GP) 方程描述,

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{1}{2} \nabla^2 + V(x) + g(y) |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 + g_{\text{dd}} \right] \psi(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

† 通讯作者. E-mail: yongwm@gsau.edu.cn

其中 $V(x) = V_0 \cos(2x)$ 是 x 方向的一维线性光晶格. 原子之间的接触相互作用即非线性光晶格为 $g(y) = 4\pi[a_0 + a_1 \cos(2y)]N$, a_0, a_1 是散射长度, 可由 Feshbach 共振技术调控, 因此 $g(y) = g_0 + g_1 \cos(2y)$, 原子之间的接触相互作用受到调制随空间变化, g_1 是调制强度.

原子之间的偶极相互作用是^[17]

$$g_{dd} = \int d\mathbf{r}' U_{dd}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') |\psi(\mathbf{r}', t)|^2, \quad (2)$$

其中 $U_{dd}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 3a_{dd}N(1 - 3\cos^2\theta)/R^3 \equiv \gamma(1 - 3\cos^2\theta)/R^3$.

方程(1)的拉格朗日密度是

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(\psi\psi_t^* - \psi^*\psi_t) + \frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 + V(x)|\psi|^2 + \frac{1}{2}g(y)|\psi|^4 + \frac{1}{2}g_{dd}|\psi|^2. \quad (3)$$

利用变分法研究体系的稳定性, 假设柱对称高斯型试探波函数是

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{\pi^{-3/4}}{a\sqrt{b}} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{2a^2} - \frac{z^2}{2b^2} + i\alpha(x^2 + y^2) + i\beta z^2\right], \quad (4)$$

其中 a, b 分别是随时间变化的横向和纵向波包宽度, α, β 是 Chirps. 有效拉格朗日函数是

$$L = \int d\mathbf{r} \mathcal{L} = a^2\dot{\alpha} + \frac{1}{2}b^2\dot{\beta} + 2a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} + E_{\text{int}}, \quad (5)$$

其中,

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{4b^2}, \\ E_{\text{pot}} &= V_0 \exp(-a^2), \\ E_{\text{int}} &= \frac{g_0 + g_1 \exp(-a^2/2)}{4\sqrt{2}\pi^{3/2}a^2b} - \frac{\gamma}{3} \frac{f(k)}{\sqrt{2\pi}a^2b}, \end{aligned} \quad (6)$$

分别表示动能, 势能和相互作用能, 其中

$$\begin{aligned} k &= a/b, \\ f(k) &= [2k^2 + 1 - 3k^2 d(k)] / (1 - k^2), \\ d(k) &= \left(\text{atan}\sqrt{k^2 - 1}\right) / \left(\sqrt{k^2 - 1}\right). \end{aligned}$$

体系能量和化学势分别是

$$\begin{aligned} E &= E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} + E_{\text{int}}, \\ \mu &= E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} + 2E_{\text{int}}. \end{aligned} \quad (7)$$

根据 a, b, α, β 的 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\sigma}} = 0, \quad \sigma = a, b, \alpha, \beta, \quad (8)$$

得到

$$\begin{aligned} \dot{a} &= 2a\alpha, \quad \dot{b} = 2b\beta, \\ \dot{\alpha} &= -2\alpha^2 + V_0 \exp(-a^2) + \frac{1}{2a^4} + \frac{Na_0}{\sqrt{2\pi}a^4b} \\ &\quad + \frac{Na_1 \exp(-a^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a^4b} + \frac{1}{2a^2b}\right) \\ &\quad + \frac{Na_{dd}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\partial f(k)/\partial a}{2a^3b} - \frac{f(k)}{a^4b}\right), \\ \dot{\beta} &= -2\beta^2 + \frac{1}{2b^4} + \frac{Na_0}{\sqrt{2\pi}a^2b^3} \\ &\quad + \frac{Na_1 \exp(-a^2/2)}{\sqrt{2\pi}a^2b^3} \\ &\quad + \frac{Na_{dd}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\partial f(k)/\partial b}{a^2b^2} - \frac{f(k)}{a^2b^3}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

由方程(9)可以得到波包宽度随时间变化方程是

$$\begin{aligned} \ddot{a} &= \frac{1}{a^3} + 2V_0a \exp(-a^2) + \frac{N}{\sqrt{2\pi}a^3b} \left[2a_0 + a_1(2 + a^2) \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right) - a_{dd}m(k)\right], \\ \ddot{b} &= \frac{1}{b^3} + \frac{2N}{\sqrt{2\pi}a^2b^2} \left[a_0 + a_1 \exp\left(-a^2/2\right) - a_{dd}n(k)\right], \end{aligned} \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} m(k) &= \frac{2 - 4k^4 - 7k^2 + 9k^4 d(k)}{(k^2 - 1)^2}, \\ n(k) &= \frac{1 - 2k^4 + 10k^2 - 9k^2 d(k)}{(k^2 - 1)^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

波包宽度随时间的变化关系类似牛顿方程,

$$\ddot{a} = -\frac{\partial U}{\partial a}, \quad \ddot{b} = -\frac{\partial U}{\partial b}, \quad (12)$$

其中有效势能是

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2} + V_0 \exp(-a^2) \\ &\quad + \frac{3N}{\sqrt{2\pi}a^2b} \left[a_0 + a_1 \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right) - a_{dd}f(k)\right]. \end{aligned} \quad (13)$$

类似于一个经典粒子在二维势场 $U(a, b)$ 中运动, 当势场存在局部最小值时, 即存在势阱, 粒子可能就有稳定的状态. 对应于 BEC 体系, 当势能存在局部最小值时, 对应的参数 a, b 就能给出体系的稳定状态.

3 稳定性分析

根据有效势能是否具有局域最小值来判断体系是否存在稳定的孤立子解. 体系的稳定性取决于 V_0 , N , a_0 , a_1 和 a_{dd} , 在稳定性分析过程中, 取 $V_0 = -2$, $N = 1000$, 给出稳定孤立子解存在时, a_0 , a_1 和 a_{dd} 的取值范围.

图 1 表示有效势能随 a_1 的变化. 取 $a_0 = -5$, $a_{dd} = -2$, 由于原子之间接触相互作用和偶极相互作用都是吸引相互作用, 所以需要排斥相互作用来平衡, 才能形成稳定的孤立子. 当原子间排斥调制

相互作用较小时不足以平衡吸引相互作用, 系统会塌缩, 没有稳定的束缚态, 如图 1(a) 所示. 当原子之间排斥调制相互作用增大时, 此时吸引作用和排斥作用相互平衡, 有效势能具有局域最小值, 体系具有稳定的孤立子解, 如图 1(b) 所示. 当原子之间排斥调制相互作用继续增加时, 整体相互作用表现为很强的斥力, 有效势能又没有局域最小值, 此时系统会扩散, 如图 1(c) 所示. 因此, 当固定光晶格强度, 系统的原子数, 对于给定的 a_{dd} 和 a_0 , a_1 的取值在一定区间内, 系统才有稳定状态, 当 a_1 小于区间下限值时, 系统会塌缩, 当 a_1 大于区间上限值时, 系统会扩散.

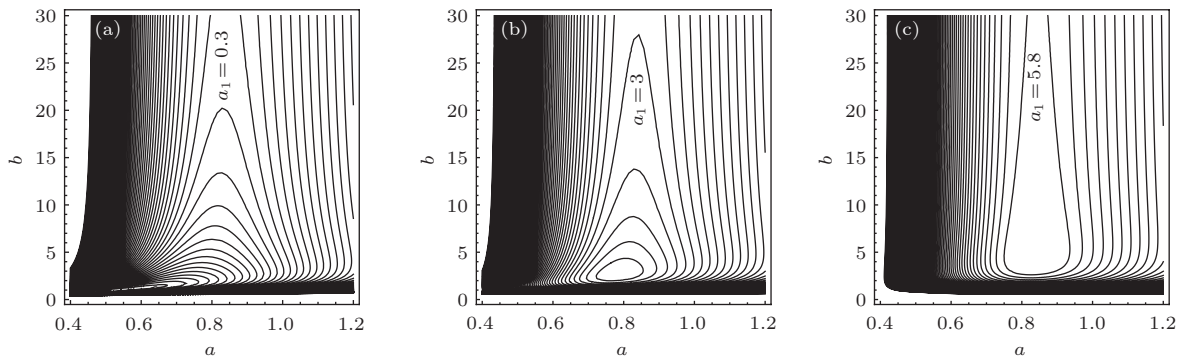


图 1 有效势能随 a_1 的变化

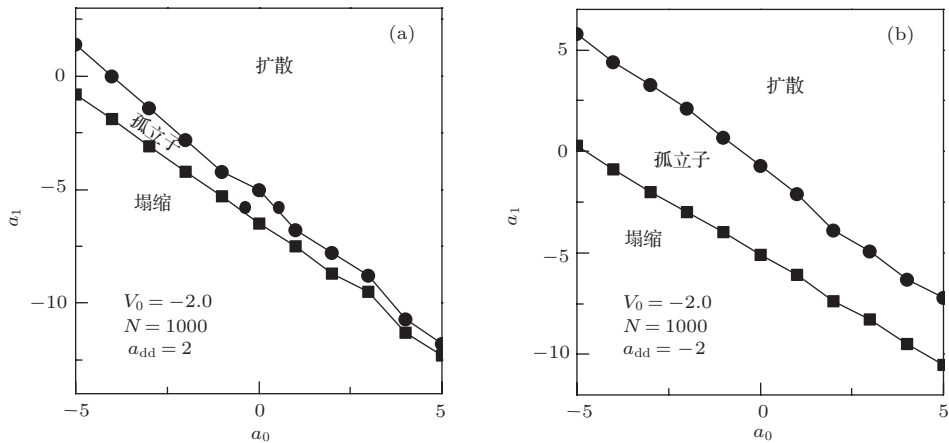


图 2 $a_0 - a_1$ 参数空间中稳定区域

图 2 给出 $a_{dd} = 2$ 和 $a_{dd} = -2$ 时, 体系有稳定状态时的 a_1 的取值区间随 a_0 的变化. 图 2(a) $a_{dd} = 2$, 原子之间存在排斥偶极相互作用, 对于 a_0 的每一取值, a_1 的取值在一定区间内, 体系有稳定解. 随着 a_0 的变化, a_1 的取值范围把参数空间分成三部分, 下面部分表示排斥性质的相互作用太小, 体系塌缩, 上面部分, 原子之间存在较强性质的排斥相互作用使得系统扩散, 没有稳定的孤立子解,

中间区域, 排斥作用和吸引作用相互平衡, 具有稳定的孤立子解. 图 2(b) $a_{dd} = -2$, 原子之间存在吸引偶极相互作用, 和排斥偶极相互作用的情况比较, 稳定区域扩大了.

为了验证根据有效势能给出的结果, 图 3 给出波包宽度随时间的变化曲线, 取 $a_0 = -5$, $a_{dd} = -2$. 当 $a_1 = 0.1$ 时, 小于 a_1 取值的下限值, 原子之间存在较强的吸引性质的相互作用, 横

向波包宽度随时间剧烈振荡, 振荡幅度约等于2, 表现出不稳定的趋势. 当大于 a_1 取值的上限值时, $a_1 = 6$, 原子之间存在较强的排斥相互作用, 横向波包宽度随时间持续增加, 体系扩散. 当 $a_1 = 3$ 时, 横向波包宽度不随时间变化, 有稳定的孤立子存在. 体系有稳定解的条件是 $\dot{\sigma} = 0$, 可以求出 $a = 0.832$, $b = 4.037$, 图4给出稳定孤立子解的原子空间分布.

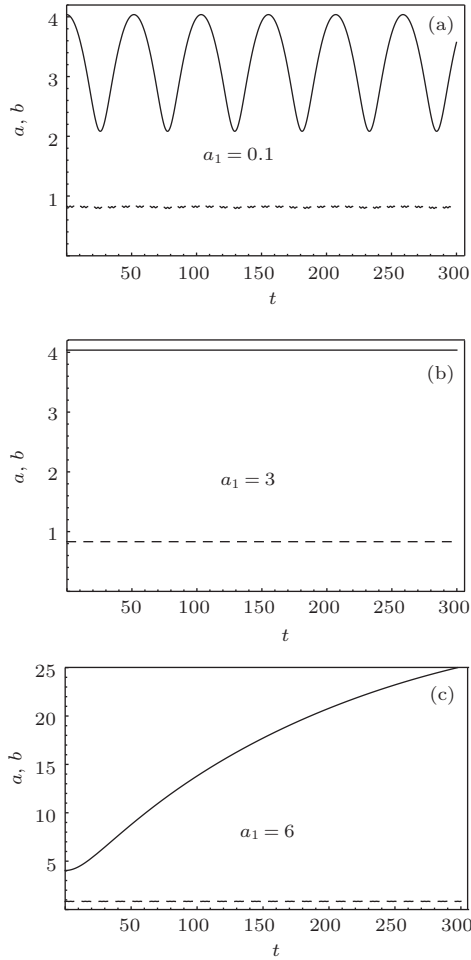


图3 a_1 不同取值时, 波包宽度随时间的变化 (实线和虚线分别表示 a, b)

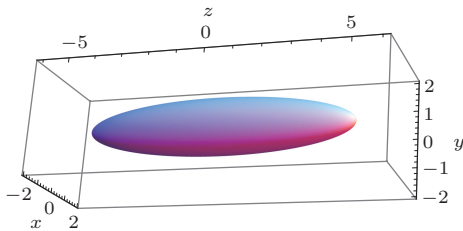


图4 稳定孤立子解对应的波函数的空间分布

4 结 论

利用变分法研究了线性和非线性交叉光晶格中偶极BEC体系中物质波孤立子的稳定性. 体系的稳定性决定于光晶格强度, 原子数, 原子间的相互作用, 原子间的偶极相互作用和调制相互作用, 由于调制相互作用的出现, 在排斥和吸引相互作用下, 体系均能形成的稳定的孤立子解, 我们给出了存在稳定孤立子解的参数区间. 利用体系有效势能是否存在局域最小值判断体系是否具有稳定孤立子解是一种有效的方法, 类似的研究方法可以扩展到其它类似体系.

参考文献

- [1] Yang H S, Xu Z J, Cheng C, Wu Q, Xiong H W 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2835 (in Chinese)[杨欢算, 徐志君, 程成, 武强, 熊宏伟 2004 物理学报 **53** 2835]
- [2] Xi Y D, Wang D L, She Y C, Wang F J, Ding J W 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3720 (in Chinese)[奚玉东, 王登龙, 余彦超, 王凤姣, 丁建文 2010 物理学报 **59** 3720]
- [3] Chen H F, Huang J S, Xie Z W 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3435 (in Chinese)[陈海峰, 黄劲松, 谢征微 2008 物理学报 **57** 3435]
- [4] da Luz H L F, Abdullaev F Kh, Gammal A, Sarlermo M, Lauro Tomio 2010 *Phys. Rev. A* **82** 043618
- [5] Ji S T, Yan P G, Liu X S 2014 *Chin. Phys. B* **23** 030311
- [6] Li Z J, Hai W H, Deng Y 2013 *Chin. Phys. B* **22** 090505
- [7] Wang X M, Li Q Y, Li Z D 2013 *Chin. Phys. B* **22** 050311
- [8] Trombettoni A, Smerzi A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2353
- [9] Abdullaev F Kh, Baizakov B B, Darmanyan S A, Konotop V V, Salerno M 2001 *Phys. Rev. A* **64** 043606
- [10] Chen H J, Li X F 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 070302 (in Chinese) [陈海军, 李向富 2013 物理学报 **62** 070302]
- [11] Koch T, Lahaye T, Metz J, Frohlich B, Griesmaier A, Pfau T 2008 *Nature Phys.* **4** 218
- [12] Lu M, Youn S H, Lev B L 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 063001
- [13] Adhikaria S K, Muruganandama P 2012 *Physics Letters A* **376** 2200
- [14] Adhikaria S K, Muruganandama P 2012 *Journal of Physics, B* **45** 045301
- [15] Li J P, Tan L, Zang X F, Yang K 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7467 (in Chinese) [李菊萍, 谭磊, 臧小飞, 杨科 2008 物理学报 **57** 7467]
- [16] Zang X F, Li J P, Tan L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4348 (in Chinese) [臧小飞, 李菊萍, 谭磊 2007 物理学报 **56** 4348]
- [17] Yi S, You L 2001 *Physics Letters A* **63** 053607

Stability of dipolar soliton in crossed linear and nonlinear optical lattices

Yong Wen-Mei^{1)†} Chen Hai-Jun²⁾

1) (*College of Science, Gansu Agricultural University, Lanzhou 730070, China*)

2) (*Electrical Engineering College, Longdong University, Qingyang 745000, China*)

(Received 18 March 2014; revised manuscript received 8 April 2014)

Abstract

Stability of a dipolar Bose-Einstein condensate (BEC) soliton in crossed linear and nonlinear optical lattices is investigated using variational approximation. The Euler-Lagrange equations for variational parameters and the effective potential are derived by means of a cylindrically symmetric Gaussian ansatz, while the equilibrium widths are determined by minimization of the effective potential. In the presence of a periodic spatial variation of short-range contact interaction, the localized bound states can exist for both attractive and repulsive dipolar interactions. And the domain of stable dipolar BEC solitons is illustrated in a phase plot of the nonlinearities. Finally, we give the evolution of the variational width for different values of the nonlinearities.

Keywords: Bose-Einstein condensates, linear and nonlinear optical lattices, dipolar soliton, stability

PACS: 03.75.Lm, 03.75.Hh, 03.75.Nt

DOI: [10.7498/aps.63.150302](https://doi.org/10.7498/aps.63.150302)

† Corresponding author. E-mail: yongwm@gsau.edu.cn