

基于递归 T 矩阵的离散随机散射体散射特性研究*

崔帅^{1)2)†} 张晓娟¹⁾ 方广有¹⁾

1) (中国科学院电磁辐射与探测技术重点实验室, 北京 100190)

2) (中国科学院大学, 北京 100190)

(2014年1月27日收到; 2014年3月25日收到修改稿)

本文根据电磁场矢量球波函数多极点展开原理及矢量叠加定理提出了递归 T 矩阵算法的矢量形式, 并且基于矢量递归 T 矩阵算法建立了多散射球模拟离散随机散射体散射的三维电磁散射模型. 通过计算不同尺寸、随机分布散射球的散射以及分析散射球间的高阶散射效应, 结果表明: 矢量递归 T 矩阵算法具有很高的计算精度, 算法中包含多散射体间的高阶散射效应, 因此能够精确计算多散射体总的散射效应. 本文所建模型可应用于土壤湿度探测工程中评估地表下掩埋离散随机散射体散射对雷达回波信号产生的影响.

关键词: 矢量球波函数, 矢量叠加定理, 递归 T 矩阵算法, 高阶散射效应

PACS: 42.25.Dd, 42.25.Fx

DOI: 10.7498/aps.63.154202

1 引言

近年来, 由于L频段以下电磁波的大穿透深度特性, 低频雷达遥感探测技术得到了快速发展, 主要应用于茂密森林植被, 地表下古迹以及土壤分层结构的探测, 如监测建筑地下结构变化以及山体滑坡预警; 获取裸土及植被覆盖区域的土壤湿度分布图以评估全球变暖造成的湿地流失等等. 如今, 土壤湿度探测已成为指导农业生产, 建立全球水、能量循环模型气候变化研究的重要工程应用^[1-6]. 自然界中地表下媒质通常是非均匀的. 土壤中掩埋有石块、冰粒等离散随机散射体. 低频电磁波的大穿透深度可以获取深层土壤湿度信息, 但同时会受到土壤中掩埋物体的影响. 我们必须获取这些掩埋物体的散射特性以评估离散随机散射体散射对雷达回波信号产生的影响. 因此, 我们需要一种具有高计算精度的算法.

在过去的几十年中出现了许多计算多散射体散射的方法^[7-19], 如基于辐射传输理论的方法已经得到了广泛的应用. 多散射体散射包含散射体间

的多次相互作用, 即高阶散射效应. 然而辐射传输理论忽略了高阶散射效应, 同时其他的一些解析方法以及基于波理论的方法也仅考虑了低阶散射效应^[1,20]. 本文提出的矢量递归 T 矩阵算法 (Recursive Aggregate T-Matrix Algorithm, RATMA) 包含多散射体间的高阶散射效应. 在多个散射体同时存在的散射系统中, 首先利用矢量球波函数多极点展开原理, 根据边界条件计算每个散射体在其所处局部坐标系中的 T 矩阵; 然后利用矢量叠加定理, 将所有局部坐标系中的 T 矩阵统一变换到全局坐标系中做加和, 这样便可以得到散射系统总的 T 矩阵. 我们可以根据总 T 矩阵方便的求解总散射场或散射系数.

RATMA算法的标量形式早在上世纪90年代就已经出现, 然而仅限于二维散射计算, 未曾有效地应用于3维散射体的计算^[21-26]. 本文提出的RATMA算法的矢量形式为三维散射体的散射计算提供了理论支持. 同时根据矢量RATMA算法建立了计算离散随机散射体散射特性的电磁散射模型. 球形散射体是石块和冰粒的理想模型, 可用来模拟如图1所示的地表下情况.

* 国家自然科学基金 (批准号: 61172017) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: slj529191@126.com

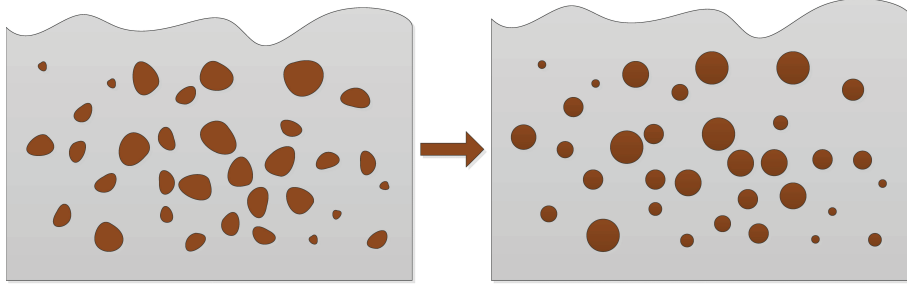


图1 多散射球模拟地表下离散随机散射体

本文建立的模型利用不同尺寸、随机分布的散射球模拟离散随机散射体的散射特性,在雷达探测土壤湿度的工程应用中,可用于评估地表下掩埋散射体的散射对雷达回波信号所产生的影响。

2 矢量RATMA算法及高阶散射效应分析

2.1 单个散射球的 T 矩阵

根据经典Mie散射理论可以得出单个散射球的 T 矩阵^[27,28]

$$\bar{\bar{T}}_{1(1)} = \begin{pmatrix} \bar{\bar{T}}_M & 0 \\ 0 & \bar{\bar{T}}_N \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{T}}_M = \text{diag} \{ & -\{j_n(k_s a)[k a j_n(k a)]' \\ & - j_n(k a)[k_s a j_n(k_s a)]'\} \\ & \times \{j_n(k_s a)[k a h_n(k a)]' \\ & - h_n(k a)[k_s a j_n(k_s a)]'\}^{-1} \}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{T}}_N = \text{diag} \{ & -\{k_s^2 a^2 j_n(k_s a)[k a j_n(k a)]' \\ & - k^2 a^2 j_n(k a)[k_s a j_n(k_s a)]'\} \\ & \times \{k_s^2 a^2 j_n(k_s a)[k a h_n(k a)]' \\ & - k^2 a^2 h_n(k a)[k_s a j_n(k_s a)]'\}^{-1} \}. \end{aligned} \quad (3)$$

2.2 矢量叠加定理^[29-33]

矢量叠加定理描述为矢量球波函数的坐标变换,如图2所示。

图2中 P 点处的场量可以用矢量球波函数 \bar{M} , \bar{N} (定义见附录A) 在坐标系 O 中作多极点展开^[28,32]:

$$\bar{E}_O = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (A_{mn} \bar{M}_{mn} + B_{mn} \bar{N}_{mn}). \quad (4)$$

类似的,在坐标系 O' 中 P 点处的场量可以展开为

$$\bar{E}_{O'} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} (A_{\mu\nu} \bar{M}_{\mu\nu} + B_{\mu\nu} \bar{N}_{\mu\nu}). \quad (5)$$

因此,我们可以定义两个坐标系中矢量球波函数间的关系

$$\begin{aligned} \bar{M}_{mn} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} (A_{\mu\nu mn} \bar{M}_{\mu\nu} + B_{\mu\nu mn} \bar{N}_{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \bar{N}_{mn} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} (A_{\mu\nu mn} \bar{N}_{\mu\nu} + B_{\mu\nu mn} \bar{M}_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (7)$$

根据坐标变换系数 $A_{\mu\nu mn}$, $B_{\mu\nu mn}$ (定义见附录B), 我们可以建立并矢坐标变换矩阵^[1,32]

$$\bar{\bar{\alpha}}_{ji} = \begin{pmatrix} \bar{\bar{A}}_{ji}^{(h)} & \bar{\bar{B}}_{ji}^{(h)} \\ \bar{\bar{B}}_{ji}^{(j)} & \bar{\bar{A}}_{ji}^{(j)} \end{pmatrix}, \quad \bar{\bar{\beta}}_{ji} = \begin{pmatrix} \bar{\bar{A}}_{ji}^{(j)} & \bar{\bar{B}}_{ji}^{(j)} \\ \bar{\bar{B}}_{ji}^{(h)} & \bar{\bar{A}}_{ji}^{(h)} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

其中 $\bar{\bar{\alpha}}_{ji}$, $\bar{\bar{\beta}}_{ji}$ 的下角标 ji 表示坐标系 i 到坐标系 j 的变换; $\bar{\bar{A}}_{ji}^{(j),(h)}$, $\bar{\bar{B}}_{ji}^{(j),(h)}$ 的上角标 (j) , (h) 表示坐标变换系数中基函数的选取为球Bessel函数或第一类球Hankel函数。

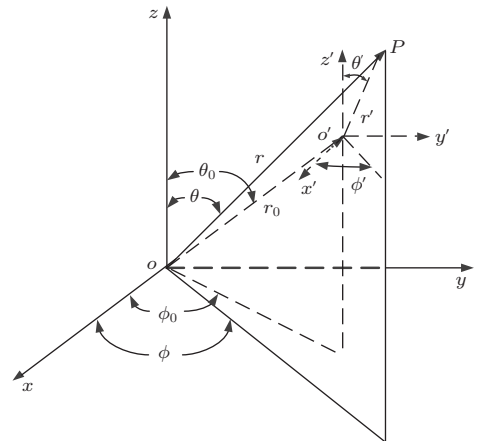


图2 矢量叠加定理

2.3 递归 T 矩阵算法的矢量形式

在得到单个散射球的 T 矩阵之后, 根据矢量球波函数及矢量叠加定理我们可以建立多散射球散射系统. 然而当多个散射球同时存在时, 总散射场中包含散射球之间的相互作用. Chew 于 1989 年首次提出了 RATMA 算法的概念 [21], 随后在其著作 [33] 中给出了 RATMA 算法的规范标量形式. 本文将根据标量 RATMA 算法推导 RATMA 算法的矢量形式以求解 3 维散射问题. 以两个散射球同时存在时的散射系统为例.

如图 3 所示, 我们首先选取局部坐标系 O_1 为观察点. 总场在局部坐标系 O_1 中的表达式为

$$\begin{aligned} \phi(\bar{r}) = & \text{Rg} \bar{\psi}^t(k_0, \bar{r}_1) \cdot \bar{\beta}_{10} \cdot \bar{a} + \psi^t(k_0, \bar{r}_1) \cdot \bar{f}_1 \\ & + \text{Rg} \bar{\psi}^t(k_0, \bar{r}_1) \cdot \bar{\alpha}_{12} \cdot \bar{f}_2, \end{aligned} \quad (9)$$

其中 \bar{a} 是入射场的幅度向量, $\bar{\psi}^t(k_0, \bar{r}_0)$ 是以矢量球波函数为元素的并矢列向量, \bar{f} 是散射幅度向量, $\bar{\alpha}_{12}$, $\bar{\beta}_{10}$ 是坐标变换矩阵. (9) 式中的 Rg 表示正则部分, 如 $\text{Rg} h_n(k_0, \bar{r}) = j_n(k_0, \bar{r})$, 等号右端第一项为入射场在局部坐标系 O_1 中的表达式, 坐标变换矩阵 $\bar{\beta}_{10}$ 将入射场由全局坐标系 O_0 变换到局部坐标系 O_1 中; 第二项为散射球 1 的散射场; 第三项为散射球 2 的散射场在局部坐标系 O_1 中的表达式, $\bar{\alpha}_{12}$ 将散射球 2 的散射场由局部坐标系 O_2 变换到局部坐标系 O_1 中, 此过程也可以看作是散射球 2 的散射场作为入射场投射到散射球 1 上, 即散射球 2 对散射球 1 的激励作用. 这样在总场表达式中就包含了两个散射球间的高阶散射效应.

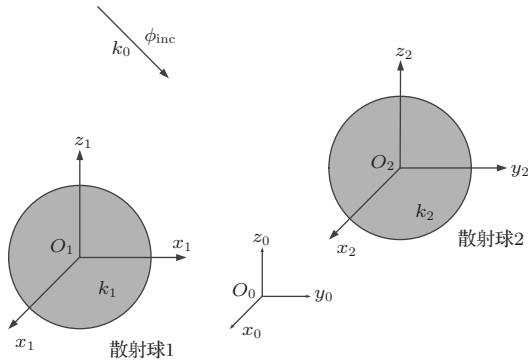


图 3 两散射球同时存在时的散射系统

若已知散射球 1 的 T 矩阵, 我们可以根据 (9) 式建立 \bar{f}_1 , \bar{a} , \bar{f}_2 之间的关系:

$$\bar{f}_1 = \bar{T}_{1(1)} \cdot \left[\bar{\beta}_{10} \cdot \bar{a} + \bar{\alpha}_{12} \cdot \bar{f}_2 \right]. \quad (10)$$

(10) 式中的 $\bar{T}_{1(1)}$ 表示散射球 1 单独存在时的 T 矩阵, 下角标中的 (1) 表示散射系统中只存在一个散射球. 类似的, 我们选取局部坐标系 O_2 为观察点, 利用 $\bar{T}_{2(1)}$ 可以得到 \bar{f}_2 , \bar{a} , \bar{f}_1 之间的关系:

$$\bar{f}_2 = \bar{T}_{2(1)} \cdot \left[\bar{\beta}_{20} \cdot \bar{a} + \bar{\alpha}_{21} \cdot \bar{f}_1 \right]. \quad (11)$$

根据 (10)、(11) 式可以得到

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 = & \left[\bar{I} - \bar{T}_{1(1)} \cdot \bar{\alpha}_{12} \cdot \bar{T}_{2(1)} \cdot \bar{\alpha}_{21} \right]^{-1} \bar{T}_{1(1)} \\ & \times \left[\bar{\beta}_{10} + \bar{\alpha}_{12} \cdot \bar{T}_{2(1)} \cdot \bar{\beta}_{20} \right] \cdot \bar{a}. \end{aligned} \quad (12)$$

我们可以重新定义两个散射球同时存在时的散射系统

$$\bar{f}_1 = \bar{T}_{1(2)} \cdot \bar{\beta}_{10} \cdot \bar{a}, \quad (13)$$

$\bar{T}_{1(2)}$ 表示两个散射球同时存在时散射球 1 的 T 矩阵, 其中包含了散射球 2 对散射球 1 的激励作用, 其表达式可以通过比较 (10)、(12) 式得到. 这样我们就从单个散射球的 T 矩阵出发得到了两个散射球同时存在时的 T 矩阵. 此过程可以推广到散射系统中 $n+1$ 个散射球同时存在时求解总 T 矩阵的散射问题.

定义散射系统中 $n+1$ 个散射球同时存在时散射球 i 的 T 矩阵为 $\bar{T}_{i(n+1)}$, 其中包含除了散射球 i 以外其他 n 个散射球形成的散射系统对散射球 i 的激励作用. 总场表达式为

$$\begin{aligned} \phi(\bar{r}) = & \text{Rg} \bar{\psi}^t(k_0, \bar{r}_0) \cdot \bar{a} \\ & + \sum_{i=1}^{n+1} \bar{\psi}^t(k_0, \bar{r}_i) \cdot \bar{T}_{i(n+1)} \cdot \bar{\beta}_{i0} \cdot \bar{a}. \end{aligned} \quad (14)$$

我们可以将 (14) 式做进一步推演:

$$\begin{aligned} \phi(\bar{r}) = & \text{Rg} \bar{\psi}^t(k_0, \bar{r}_0) \cdot \bar{a} + \sum_{i=1}^n \bar{\psi}^t(k_0, \bar{r}_i) \\ & \times \bar{T}_{i(n+1)} \cdot \bar{\beta}_{i0} \cdot \bar{a} + \bar{\psi}^t(k_0, \bar{r}_{n+1}) \\ & \times \bar{T}_{n+1(n+1)} \cdot \bar{\beta}_{n+1,0} \cdot \bar{a}. \end{aligned} \quad (15)$$

此时可以将等号右端中间项表示的 n 个散射体的散射看作是一个整体所产生的散射, 这样就变成了类似于 (9) 式的形式. 根据两个散射球总 T 矩阵的推导过程, 我们可以类似的得到

$$\begin{aligned} & \bar{T}_{n+1(n+1)} \cdot \bar{\beta}_{n+1,0} \\ = & \left[\bar{I} - \bar{T}_{n+1(1)} \cdot \sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_{n+1,i} \cdot \bar{T}_{i(n)} \cdot \bar{\beta}_{i0} \cdot \bar{\alpha}_{0,n+1} \right]^{-1} \\ & \times \bar{T}_{n+1(1)} \\ & \times \left[\bar{\beta}_{n+1,0} + \sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_{n+1,i} \cdot \bar{T}_{i(n)} \cdot \bar{\beta}_{i0} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \bar{T}_{i(n+1)} \cdot \bar{\beta}_{i0} \\ = & \bar{T}_{i(n)} \cdot \bar{\beta}_{i0} \\ & \times \left[\bar{I} + \bar{\alpha}_{0,n+1} \cdot \bar{T}_{n+1(n+1)} \cdot \bar{\beta}_{n+1,0} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

(16) 与 (17) 式共同构成了递归求解 $n + 1$ 个散射球总 T 矩阵的矢量 RATMA 算法. 这里我们要对散射球的空间位置进行排序:

$$|\bar{r}_{1(0)}| \leq |\bar{r}_{2(0)}| \leq \dots \leq |\bar{r}_{N(0)}|, \quad (18)$$

其中 $\bar{r}_{i(0)}$ 表示全局坐标系原点到散射球 i 球心的距离. 至此, 我们可以从一个散射球的 T 矩阵出发, 递归地求解散射系统中 n 个散射球同时存在时包含高阶散射效应的总 T 矩阵.

2.4 散射系数的求解

在求得总的 T 矩阵之后, 我们可以方便地求解多散射球系统的雷达散射系数. 由并矢散射幅度 [28]:

$$\begin{aligned} & \bar{F}(\theta_s, \phi_s, \theta_i, \phi_i) \\ = & \frac{4\pi}{k} \sum_{n,m,\nu,\mu} (-1)^{\mu} i^{\nu-n-1} \left\{ \left[T_{mn\mu\nu}^{(11)} \gamma_{mn} \bar{C}_{mn}(\theta_s, \phi_s) \right. \right. \\ & + \left. \left. T_{mn\mu\nu}^{(21)} i \gamma_{mn} \bar{B}_{mn}(\theta_s, \phi_s) \right] \cdot \gamma_{-\mu\nu} \bar{C}_{-\mu\nu}(\theta_i, \phi_i) \right. \\ & + \left[T_{mn\mu\nu}^{(12)} \gamma_{mn} \bar{C}_{mn}(\theta_s, \phi_s) \right. \\ & + \left. \left. T_{mn\mu\nu}^{(22)} i \gamma_{mn} \bar{B}_{mn}(\theta_s, \phi_s) \right] \right. \\ & \left. \times \gamma_{-\mu\nu} \frac{\bar{B}_{-\mu\nu}(\theta_i, \phi_i)}{i} \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

由 (19) 式我们可以计算四种极化方式下的双站雷达散射系数和双站 RCS:

$$\begin{aligned} f_{vv} &= \hat{v}_s \cdot \bar{F} \cdot \hat{v}_i, \quad \sigma_{vv}(\hat{k}_s, \hat{k}_i) = 4\pi |f_{vv}|^2, \\ f_{vh} &= \hat{v}_s \cdot \bar{F} \cdot \hat{h}_i, \quad \sigma_{vh}(\hat{k}_s, \hat{k}_i) = 4\pi |f_{vh}|^2, \\ f_{hv} &= \hat{h}_s \cdot \bar{F} \cdot \hat{v}_i, \quad \sigma_{hv}(\hat{k}_s, \hat{k}_i) = 4\pi |f_{hv}|^2, \\ f_{hh} &= \hat{h}_s \cdot \bar{F} \cdot \hat{h}_i, \quad \sigma_{hh}(\hat{k}_s, \hat{k}_i) = 4\pi |f_{hh}|^2. \end{aligned} \quad (20)$$

3 三维离散随机多散射球电磁散射模型建模

3.1 散射球 T 矩阵的求解

在本模型中我们使用散射球来模拟地表下的石块及冰粒等离散随机散射体. 本文中所用算法是以矢量球波函数为基函数做多极点展开的, 因此在

求解球的 T 矩阵时, 我们需要根据球的尺寸参数确定多极点展开的项数 n [27]. 尺寸参数定义为

$$x = ka, \quad (21)$$

其中 k 为球所处背景媒质的波数, a 为球的半径, 多极点展开项数为

$$N_{\max} = x + 4 \cdot x^{1/3} + 2. \quad (22)$$

对 (22) 式向下取整后我们可以得出 (2)、(3) 式中球 Bessel 函数以及球 Hankel 函数中 n 的最大值.

3.2 矢量叠加定理系数的求解

在求解矢量叠加定理的并矢坐标变换矩阵 $\bar{\alpha}_{ji}$, $\bar{\beta}_{ji}$ 时, 首先要求解坐标变换系数 $A_{\mu\nu mn}$, $B_{\mu\nu mn}$. 因此我们需要确定多极点展开参数 $\mu, \nu; m, n$ 的值. 下面考虑两种坐标变换的形式.

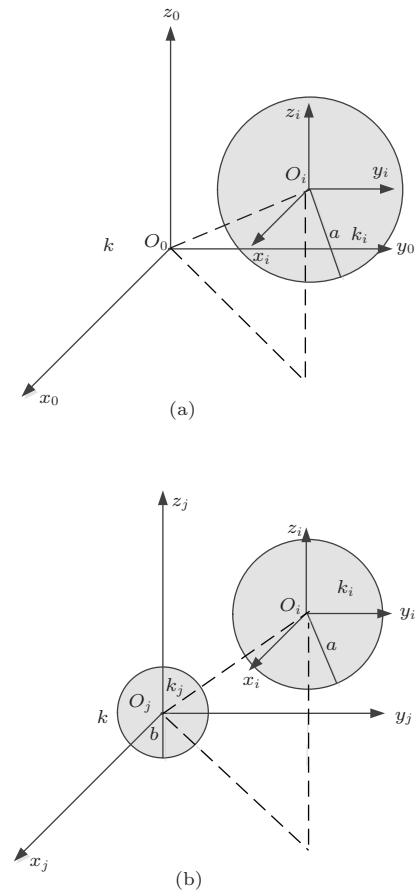


图 4 (a) 散射球与全局坐标系之间的坐标变换; (b) 散射球之间的坐标变换

在图 4(a) 所示的情况中, 如果全局坐标系的 多极点展开用参数 m, n 表示, 散射球 i 的多极点展开用参数 μ, ν 表示. 由于 O_0 处不存在散射体, 其尺寸参数为 $x = 0$; 散射球 i 的尺寸参数为 $x = ka$; 图 4(b) 的情况中散射球 i, j 的尺寸参数分别为 ka

和 kb . 根据 (22) 式可以计算它们的多极点展开项数 n 和 ν . 我们知道矢量球波函数是连带勒让德函数的函数, 因此 m, μ 的取值范围为 $|m| \leq n, |\mu| \leq \nu; n, \nu \geq 0$.

3.3 并矢矩阵的排列规则

由于矢量 RATMA 算法是以矢量球波函数为基函数的算法, 因此算法中所有的矩阵均为并矢矩阵. 然而并矢矩阵是四维矩阵, 如 (8) 式中的变换系数 $A_{\mu\nu mn}, B_{\mu\nu mn}$ 及 (19) 式中的 T 矩阵分量 $T_{mn\mu\nu}^{(11)}, T_{mn\mu\nu}^{(12)}, T_{mn\mu\nu}^{(21)}, T_{mn\mu\nu}^{(22)}$, 它们都是四参数的矩阵. 因此我们需要一种排列规则将这些四参数矩阵排列成二维并矢矩阵. 根据 (22) 式计算多极点展开项数 $n = N_{\max}$, 以参数 m, n 为例, 我们定义联合系数 l 来同时表示参数 m, n :

$$l = n(n + 1) + m + 1. \quad (23)$$

定义联合系数 l 的最大值为

$$L_{\max} = N_{\max}(N_{\max} + 2) + 1. \quad (24)$$

部分联合系数 l 与参数 m, n 的关系如表 1 所示.

表 1 联合系数 l 与参数 m, n 的关系

n	m	l
0	0	1
1	-1	2
1	0	3
1	1	4
2	-2	5
2	-1	6
2	0	7
2	1	8
2	2	9
etc.	etc.	etc.

由 (23), (24) 式及表 1, 我们可以将系数 $A_{\mu\nu mn}, \dots$ 及 $T_{mn\mu\nu}^{(11)}, \dots$ 排列成并矢矩阵的形式: $\overline{\overline{A}}_{kl}, \overline{\overline{B}}_{kl}, \overline{\overline{T}}_{lk}^{(11)}, \overline{\overline{T}}_{lk}^{(12)}, \overline{\overline{T}}_{lk}^{(21)}, \overline{\overline{T}}_{lk}^{(22)}$.

3.4 建立阶乘数据库方法计算 Wigner 3-j 符号

由附录 B 我们发现在计算坐标变换系数 $A_{\mu\nu mn}, B_{\mu\nu mn}$ 时, 需要计算 Wigner 3-j 符号, 然而 Wigner 3-j 符号中含有大量的阶乘, 尤其当散射体尺寸较大、散射体数量较多时, 直接计算需要消耗大量时间. 例如当所计算散射体的个数较多 ($N > 10$) 时, 计算时间会以接近指数增长的趋势而增加, 这样在实际应用中几乎不能实现. 因此我

们可以先将阶乘值建立一个数据库, 然后采用读取数值的方法来计算 Wigner 3-j 符号, 这样计算时间会比较理想.

4 仿真结果及分析

4.1 建立阶乘数据库方法与直接计算方法计算时间比较

如图 5 所示, 蓝色曲线是利用直接计算方法计算多散射球散射 ($N = 10$) 所需的计算时间, 红色曲线是建立阶乘数据库方法的计算时间. 上图结果所用的计算机配置为 CPU Intel Core i5-2400, 内存 4G. 由图 5 我们发现, 当球的个数从大于 3 开始, 蓝色曲线增长很快, 呈接近指数增长的趋势; 而红色曲线的增长比较平稳, 接近线性增长的趋势. 因此当散射球数量较多时建立阶乘数据库的方法计算效率较高.

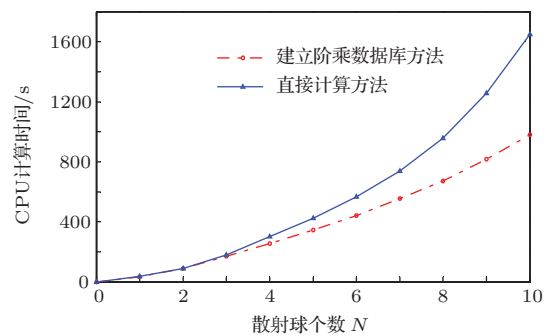


图 5 建立数据库方法与直接计算方法计算时间比较

4.2 不同尺寸散射球的散射

根据矢量 RATMA 算法建立的三维电磁散射模型, 我们可以计算多个介质球的雷达散射截面 (RCS). 4.2—4.4 节中的三组仿真算例用到的介质球相对介电常数均为 $\epsilon_r = 24.84 + 4i$, 入射平面波的频率为 $f = 300$ MHz, 入射角为 $\phi_i = 0^\circ, \theta_i = 45^\circ$. 远场的观察点设为 $\phi_s = 180^\circ, -90^\circ < \theta_s < 90^\circ, \theta_s$ 从 -90° 开始每 11° 取一个观察点.

图 6 所示的仿真结果是半径 $r_1 = 0.02$ m, $r_2 = 0.05$ m 的两个大小不同的介质球的散射, 其球心的坐标分别为 $O_1 = (0.05, -0.05, 0.05)$, $O_2 = (0.05, 0.05, 0.05)$. 图 6 (b), (c) 中的蓝色曲线是矢量 RATMA 算法的计算结果, 红色曲线是用 Feko 软件 (MoM 算法) 得出的计算结果, 作为本文的对比算法. 从两图中我们可以看出红、蓝曲线符

合程度很高, 矢量RATMA算法与MoM算法的最大误差均小于0.4 dB, 说明RATMA算法在计算不同尺寸散射球的散射问题时有很高的计算精度.

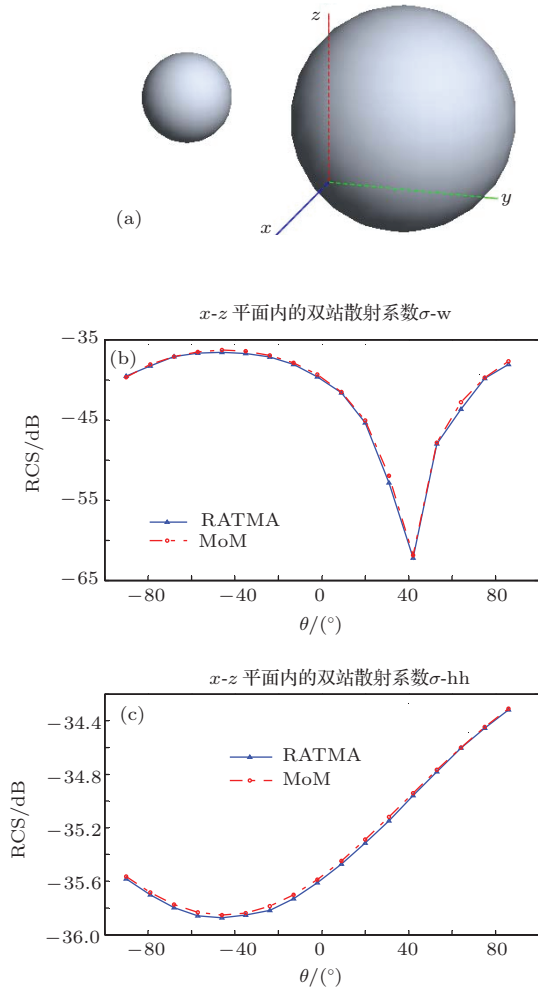


图6 不同尺寸双球散射仿真结果 (a) 不同尺寸双球散射模型; (b) vv极化散射截面; (c) hh极化散射截面

4.3 高阶散射效应分析

图7所示的仿真结果是利用矢量RATMA算法计算半径 $r_1 = r_2 = 0.1$ m 的两个大小相同的介质球在包含高阶散射与忽略高阶散射两种情况下的仿真结果比较. 图7(a)的球心坐标分别为 $O_1 = (0.1, -0.2, 0.1)$, $O_2 = (0.1, 0.2, 0.1)$, 两球球面间的最短距离为 $d = 0.2$ m. 图7(b)是与(a)具有相同坐标位置的右端介质球单独存在时的散射模型. 图7(c)是与(a)具有相同坐标位置的左端介质球单独存在时的散射模型. 图7(d)中的蓝色曲线表示图7(a)所示散射模型的计算结果, 即包含两球间高阶散射的仿真结果; 红色曲线表示图7(b)与(c)所示模型计算结果的总和, 即忽略两球间高阶散射的结果. 从图7(d)中我们可以看到蓝色曲

线与红色曲线RCS值的最小差值为2.1 dB, 差值即是两介质球之间的高阶散射效应. 图7的计算结果说明当散射球间距较小时 ($d < 10r$), 如果忽略高阶散射效应, 总的RCS计算值会偏小. 矢量RATMA算法能够精确计算散射体间的相互作用, 因此计算精度相比其他忽略散射体间高阶散射或只考虑一阶散射的计算方法要高.

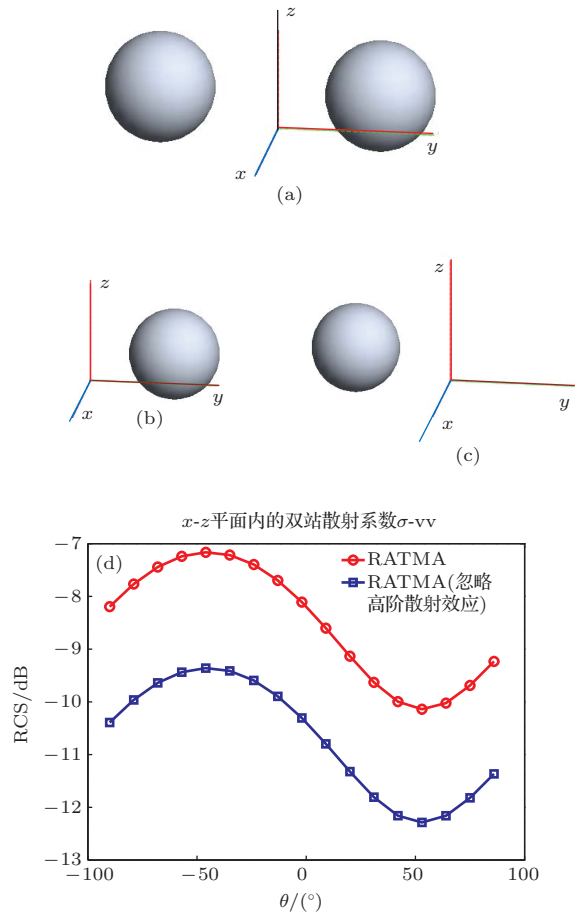


图7 矢量RATMA算法包含高阶散射与忽略高阶散射仿真结果比较 (a) 间距 $d = 0.2$ m 双球散射模型; (b) 与(a)相同坐标位置右球单独存在散射模型; (c) 与(a)相同坐标位置左球单独存在散射模型; (d) vv极化散射截面比较

4.4 离散随机多散射球的散射

图8所示的仿真结果是八个半径 $r_1 = 0.02$ m 与四个半径 $r_2 = 0.05$ m 的介质球在三维空间中随机分布的计算结果. 图8(b), (c)中的蓝色曲线是矢量RATMA算法的计算结果, 红色曲线是MoM算法的计算结果, 两图中红、蓝两条曲线非常接近, 几乎重合, 最大误差均小于0.2 dB, 说明矢量RATMA算法在计算离散随机多散射球散射问题时具有很高的计算精度.

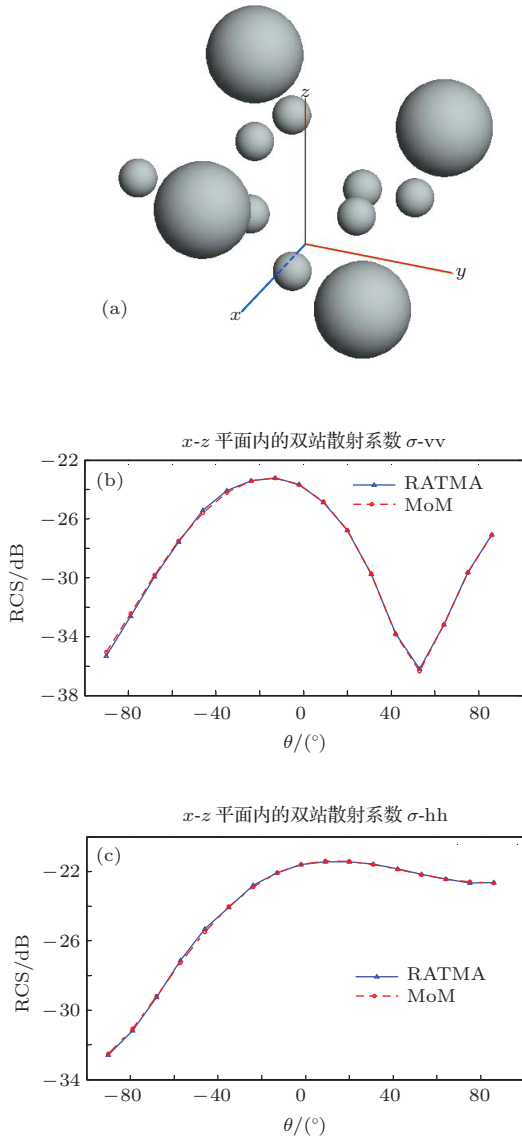


图8 离散随机多散射球仿真结果 (a) 离散随机多散射球散射模型; (b) vv极化散射截面; (c) hh极化散射截面

5 结 论

本文在标量RATMA算法的基础上推导得出了RATMA算法的矢量形式, 并根据矢量RATMA算法建立了三维空间中计算多散射球模拟地表下离散随机散射体散射的电磁散射模型, 同时提出了建立阶乘数据库的方法优化了计算时间. 文中通过对矢量RATMA算法和矩量法计算不同尺寸、随机分布介质球散射的比较以及求解散射球间高阶散射效应的仿真结果, 对非均匀媒质的散射特性做出了分析. 主要结论有以下几点:

1. 在求解多散射体散射问题时, 当散射体间间距较小时, 高阶散射效应不能忽略. 矢量RATMA算法包含散射体间的高阶散射效应, 具有很高的计

算精度, 可用来精确求解群簇类散射体的总散射效应.

2. 本文所建模型适用于自由空间中离散随机散射球的散射计算. 建模过程中严格的规范条件使其同样适用于其他形状散射体的散射计算, 如计算圆柱模拟植被根系的散射^[34-37].

未来将建立计算地表下分层媒质^[2,3,38]中掩埋离散随机散射体以及植被根系散射的总散射模型.

附录 A

矢量球波方程定义为:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{mn} = & \frac{im}{\sin\theta} z_n(kr) P_n^m(\cos\theta) \exp(im\phi) \hat{\theta} \\ & - z_n(kr) \frac{\partial P_n^m}{\partial\theta}(\cos\theta) \exp(im\phi) \hat{\phi} \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} \bar{N}_{mn} = & \frac{n(n+1)}{kr} z_n(kr) P_n^m(\cos\theta) \exp(im\phi) \hat{r} \\ & + \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} [r z_n(kr)] \frac{\partial P_n^m}{\partial\theta}(\cos\theta) \exp(im\phi) \hat{\theta} \\ & + \frac{im}{kr \sin\theta} \frac{\partial}{\partial r} [r z_n(kr)] \\ & \times P_n^m(\cos\theta) \exp(im\phi) \hat{\phi}, \end{aligned} \quad (A1)$$

其中 $z_n(kr)$ 表示球 Bessel 函数或第一类球 Hankel 函数. $P_n^m(\cos\theta)$ 是连带勒让德函数, 定义为

$$P_n^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^n n!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n. \quad (A2)$$

球谐函数定义为

$$\begin{aligned} & \bar{B}_{mn}(\theta, \phi) \\ = & \left[\hat{\theta} \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos\theta) + \hat{\phi} \frac{im}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) \right] e^{im\phi}, \\ & \bar{C}_{mn}(\theta, \phi) \\ = & \left[\hat{\theta} \frac{im}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) - \hat{\phi} \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos\theta) \right] e^{im\phi}, \end{aligned} \quad (A3)$$

其中 $(n = 1, 2, 3, \dots)$.

(19) 式中的参数 γ_{mn} 定义为

$$\gamma_{mn} = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi n(n+1)(n+m)!}}. \quad (A4)$$

附录 B^[31]

矢量叠加定理中的坐标变换系数定义如下:

$$\begin{aligned} & A_{\mu\nu mn}(k\bar{r}_O) \\ = & \frac{\gamma_{mn}}{\gamma_{\mu\nu}} (-1)^\mu \sum_p a(m, n | -\mu, \nu | p) a(n, \nu, p) \\ & \times h_p(kr_O) Y_p^{m-\mu}(\theta_O, \phi_O), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & B_{\mu\nu mn}(k\bar{r}_O) \\
 &= \frac{\gamma_{mn}}{\gamma_{\mu\nu}} (-1)^{\mu+1} \sum_p a(m, n | -\mu, \nu | p, p-1) b(n, \nu, p) \\
 & \quad \times h_p(kr_O) Y_p^{m-\mu}(\theta_O, \phi_O), \tag{B1}
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 & a(m, n | \mu, \nu | p) \\
 &= (-1)^{m+\mu} (2p+1) \left[\frac{(n+m)!(\nu+\mu)!(p-m-\mu)!}{(n-m)!(\nu-\mu)!(p+m+\mu)!} \right]^{1/2} \\
 & \quad \times \begin{pmatrix} n & \nu & p \\ m & \mu & -(m+\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & \nu & p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}
 & a(m, n | \mu, \nu | p, q) \\
 &= (-1)^{m+\mu} (2p+1) \left[\frac{(n+m)!(\nu+\mu)!(p-m-\mu)!}{(n-m)!(\nu-\mu)!(p+m+\mu)!} \right]^{1/2} \\
 & \quad \times \begin{pmatrix} n & \nu & p \\ m & \mu & -(m+\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & \nu & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{B2}
 \end{aligned}$$

另外,

$$\begin{aligned}
 a(n, \nu, p) &= \frac{i^{\nu-n+p}}{2\nu(\nu+1)} [2\nu(\nu+1)(2\nu+1) \\
 & \quad + (\nu+1)(n+\nu-p) \cdot (n+p-\nu+1) \\
 & \quad - \nu(n+\nu+p+2)(\nu+p-n+1)], \\
 b(n, \nu, p) &= -\frac{(2\nu+1)}{2\nu(\nu+1)} i^{\nu+p-n} [(n+\nu+p+1) \\
 & \quad \times (\nu+p-n) \cdot (n+p-\nu) \\
 & \quad \times (n+\nu-p+1)]^{1/2}. \tag{B3}
 \end{aligned}$$

关于 (B2) 式以及 Wigner 3-j 我们有如下结论:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & -(m_1+m_2) \end{pmatrix}. \tag{B4}$$

1. 参数 m 由 $m = 0, \pm 1, \dots, \pm n$ 组成, 参数 μ 由 $\mu = 0, \pm 1, \dots, \pm \nu$ 组成;

2. 对于 Wigner 3-j 符号, $|j_1 - j_2| \leq j_3 \leq j_1 + j_2$, $m_1 = 0, \pm 1, \dots, \pm j_1$, $m_2 = 0, \pm 1, \dots, \pm j_2$;

3. (B2) 式中 Wigner 3-j 符号的非零条件为:

当表达式为

$$\begin{pmatrix} n & \nu & p \\ m & \mu & -(m+\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & \nu & p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{B5}$$

或者,

$$\begin{pmatrix} n & \nu & p \\ m & \mu & -(m+\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & \nu & p-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$p = |n - \nu| + 1, |n - \nu| + 3, \dots, n + \nu - 1. \tag{B6}$$

关于 Wigner 3-j 符号的计算, 我们有如下过程.

Wigner 3-j 符号与 Clebsch-Gordan 系数有如下关系:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \\
 &= (-1)^{j_1-j_2-m} (2j+1)^{-\frac{1}{2}} \\
 & \quad \times (j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j, (-m)), \tag{B7}
 \end{aligned}$$

其中 $(j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j, (-m))$ 为 Clebsch-Gordan 系数, 其表达式如下:

$$\begin{aligned}
 & (j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j, (-m)) \\
 &= \delta(m, m_1 + m_2) \\
 & \quad \times \sqrt{\frac{(j_1 + j_2 - j)!(j + j_1 - j_2)!(j + j_2 - j_1)!(2j + 1)}{(j + j_1 + j_2 + 1)!}} \\
 & \quad \times \sum_k \left[(-1)^k \sqrt{(j_1 + m_1)!(j_1 - m_1)!(j_2 + m_2)!} \right. \\
 & \quad \times \sqrt{(j_2 - m_2)!(j + m)!(j - m)!} \\
 & \quad \times \left. \left(k!(j_1 + j_2 - j - k)!(j_1 - m_1 - k)!(j_2 + m_2 - k)! \right)^{-1} \right. \\
 & \quad \times \left. \frac{1}{(j - j_2 + m_1 + k)!(j - j_1 - m_2 + k)!} \right], \tag{B8}
 \end{aligned}$$

其中 $\delta(i, k) = \delta_{ik}$ 为 Kronecker Delta, k 的取值范围为

$$\begin{aligned}
 & \max([0, j_2 - j - m_1, j_1 - j + m_2]) \\
 & : \min([j_1 + j_2 - j_3, j_1 - m_1, j_2 + m_2]). \tag{B9}
 \end{aligned}$$

为了防止阶乘值过大, 我们队阶乘使用 log 运算:

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt{\frac{(j_1 + j_2 - j)!(j + j_1 - j_2)!(j + j_2 - j_1)!(2j + 1)}{(j + j_1 + j_2 + 1)!}} \\
 & \quad \times \sqrt{(j_1 + m_1)!(j_1 - m_1)!(j_2 + m_2)!} \\
 & \quad \times \sqrt{(j_2 - m_2)!(j + m)!(j - m)!}, \tag{B10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \log A \\
 &= \frac{1}{2} \left[\log((j_1 + j_2 - j)!) + \log((j + j_1 - j_2)!) \right. \\
 & \quad + \log((j + j_2 - j_1)!) + \log(2j + 1) + \log((j_1 + m_1)!) \\
 & \quad + \log((j_1 - m_1)!) + \log((j_2 + m_2)!) \\
 & \quad + \log((j_2 - m_2)!) + \log((j + m)!) + \log((j - m)!) \\
 & \quad \left. - \log((j + j_1 + j_2 + 1)!) \right], \tag{B11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \log B \\
 &= - \left[\log(k!) + \log((j_1 + j_2 - j - k)!) \right. \\
 & \quad + \log((j_1 - m_1 - k)!) + \log((j_2 + m_2 - k)!) \\
 & \quad + \log((j - j_2 + m_1 + k)!) \\
 & \quad \left. + \log((j - j_1 - m_2 + k)!) \right], \tag{B12}
 \end{aligned}$$

$$B = \left\{ k!(j_1 + j_2 - j - k)!(j_1 - m_1 - k)! \right. \\ \times (j_2 + m_2 - k)!(j - j_2 + m_1 + k)! \\ \left. \times (j - j_1 - m_2 + k)! \right\}^{-1}. \quad (\text{B13})$$

因此我们计算 A_1 , B_1 代替 A , B . 此时的 Clebsch-Gordan 系数为

$$(j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j m) \\ = \delta_{m, m_1 + m_2} e^{A_1} \sum_k (-1)^k e^{B_1}. \quad (\text{B14})$$

参考文献

- [1] Duan X Y, Moghaddam M 2011 *Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS), 2011 IEEE International Vancouver*, July 24, 2011, p1227
- [2] Zhang Y, Zhang X J, Fang G Y 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 184203 (in Chinese) [张宇, 张晓娟, 方广有 2012 物理学报 **61** 184203]
- [3] Zhang Y, Zhang X J, Fang G Y 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 044204 (in Chinese) [张宇, 张晓娟, 方广有 2013 物理学报 **62** 044204]
- [4] Qi Y Z, Huang L, Zhang J G, Fang G Y 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 234201 (in Chinese) [齐有政, 黄玲, 张建国, 方广有 2013 物理学报 **62** 234201]
- [5] Lin Z W, Xu X, Zhang X J, Fang G Y 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 014101
- [6] Lin Z W, Xu X, Zhang X J, Fang G Y 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 014102
- [7] Foldy L L 1945 *Phys. Rev.* **67** 107
- [8] Lax M 1952 *Phys. Rev.* **85** 261
- [9] Peterson B, Strom S 1974 *J. Acoust. Soc. Am.* **56** 771
- [10] Waterman P C 1956 *Proc. IEEE* **53** 805
- [11] Waterman P C 1961 *J. Math. Phys.* **2** 700
- [12] Twersky V 1967 *J. Math. Phys.* **8** 589
- [13] Liang C, Lo Y T 1967 *Radio Sci.* **2** 1481
- [14] Bruning J H, Lo Y T 1971 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **AP-19** 378
- [15] Peterson B, Strom S 1973 *Phys. Rev. D* **8** 3667
- [16] Han G X, Han Y P 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2434 (in Chinese) [韩国霞, 韩一平 2010 物理学报 **59** 2434]
- [17] Cui S, Zhang X J, Fang G Y 2013 *Chin. Phys. Lett.* **30** 034101
- [18] Cui S, Zhang Y, Zhang P, Zhang X J, Fang G Y 2011 *Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS), 2011 IEEE International Vancouver*, July 24, 2011, p289
- [19] Wang H H, Sun X M 2012 *Chin. Phys. B* **21** 054204
- [20] Ulaby T F, Moore K R, Fung K A 1981 *Microwave Remote Sensing: Active and Passive* (Vol. 3) (Addison: Wesley Publishing Company) p1085
- [21] Chew W C 1989 *Micro Opt. Tech. Lett.* **2** 380
- [22] Wang Y M, Chew W C 1990 *Micro Opt. Tech. Lett.* **3** 102
- [23] Chew W C, Wang Y M 1990 *Micro Opt. Tech. Lett.* **3** 164
- [24] Chew W C, Gurel L, Wang Y M, Otto G, Wagner R 1992 *IEEE Trans Microwave Theory Tech.* **40** 716
- [25] Chew W C, Friedrich A J, Geiger R 1990 *IEEE Trans Geosci Remote* **28** 207
- [26] Chew W C, Wang Y M, Gurel L 1992 *J. Electromag Waves Appl.* **6** 1537
- [27] Bohren C F, Huffman D R 1983 *Absorption and Scattering of Light by Small Particles* (New York: A Wiley-Interscience Publication) p57
- [28] Tsang L, Kong J A, Ding K H 2000 *Scattering of Electromagnetic Waves-Theories and Applications* (New York: A Wiley-Interscience Publication) p2
- [29] Stein S 1961 *Quarterly Journal Appl. Math.* **19** 15
- [30] Cruzan O R 1962 *Quarterly Journal Appl. Math.* **20** 33
- [31] Wittmann R C 1988 *IEEE Trans Antennas Propagat* **36** 1078
- [32] Tsang L, Kong J A, Ding K H 2001 *Scattering of Electromagnetic Waves-Numerical Simulations* (New York: A Wiley-Interscience Publication) p533
- [33] Chew W C 1995 *Waves and Fields in Inhomogeneous Media* (New York: IEEE Press) p430
- [34] Wang Y H, Zhang Y M, Guo L X 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 021102 (in Chinese) [王运华, 张彦敏, 郭立新 2011 物理学报 **60** 021102]
- [35] Xu C W, Feng Z, Liu L N, Niu D P 2012 *Microwave and Millimeter Wave Circuits and System Technology (MMWCST), 2012 International Workshop on*, Chengdu, April 19-20, 2012, p1
- [36] Khajeahsani M S, Mohajeri F, Abiri H 2011 *IEEE Trans Antennas Propagat* **59** 3819
- [37] Yan W Z, Du Y, Wu H 2008 *PIER* **85** 39
- [38] Wang A Q, Guo L X, Chai C 2011 *Chin. Phys. B* **20** 050202

Investigation of the scattering characteristics from discrete random scatterers based on recursive aggregate T -matrix algorithm*

Cui Shuai^{1)2)†} Zhang Xiao-Juan¹⁾ Fang Guang-You¹⁾

1) (Key Laboratory of Electromagnetic Radiation and Sensing Technology, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

2) (University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

(Received 27 January 2014; revised manuscript received 25 March 2014)

Abstract

In this paper, we derive in vector form the recursive aggregate T -matrix algorithm based on the principles of electromagnetic wave multipole expansion of vector spherical wave functions and the vector addition theorem. After that we establish a three-dimensional electromagnetic scattering model for multiple spherical scatterers by simulating the scattering of subsurface discrete random scatterers using the derived algorithm. Calculating the scattering from different sizes, randomly distributed spherical scatterers and analyzing the high-order scattering effects, we can conclude that the vector recursive aggregate T -matrix algorithm has a high computation accuracy, and contains the interaction effects among multiple scatterers, therefore we can calculate the total scattering effects accurately from multiple scatterers. The established model can be served as a powerful tool in applications for retrieving the impact caused by the scattering of subsurface discrete random scatterers in soil moisture from radar measurements.

Keywords: vector spherical wave function, vector addition theorem, recursive aggregate T -matrix algorithm, high-order scattering effects

PACS: 42.25.Dd, 42.25.Fx

DOI: [10.7498/aps.63.154202](https://doi.org/10.7498/aps.63.154202)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61172017).

† Corresponding author. E-mail: slj529191@126.com