

一种新的稳健波束形成算法及其一维搜索策略*

王燕¹⁾ 吴文峰¹⁾²⁾ 范展^{1)†} 梁国龙¹⁾

1) (哈尔滨工程大学, 水声技术重点实验室, 哈尔滨 150001)

2) (中国电子科技集团公司第38研究所, 合肥 230031)

(2014年1月4日收到; 2014年3月11日收到修改稿)

存在条件失配时自适应波束形成器的性能急剧下降, 凸优化技术的引入使稳健波束形成器的设计更加灵活, 但同时带来了计算复杂度的增加和工程实现上的困难. 针对上述问题, 提出了一种基于最小二乘估计的稳健波束形成算法, 并推导得到一种基于一维搜索的求解方法. 首先利用广义旁瓣对消器的结构将标准Capon波束形成器转化为稳健最小二乘问题, 并将该问题转化为二阶锥规划的形式. 为了减少计算量, 利用二阶锥规划问题的原始问题和对偶问题的关系, 将求解过程转化为一维搜索, 并利用牛顿迭代法获得最优解, 从而获得与标准Capon波束形成相近的计算复杂度. 仿真分析表明, 该算法具有良好的抗导向矢量失配和快拍数不足的稳健性.

关键词: 稳健自适应波束形成, 最小二乘估计, 二阶锥规划, 牛顿迭代法

PACS: 43.60.Fg, 42.60.Jf, 84.40.Ua

DOI: 10.7498/aps.63.154303

1 引言

自适应阵列信号处理在通信、雷达、语音信号处理、电子对抗和生物医学等领域有着极为广泛的应用^[1,2]. 传统的自适应波束形成算法, 如标准Capon波束形成器(standard capon beamformer, SCB), 其最优性是建立在对期望信号导向矢量与数据协方差矩阵精确已知的基础上. 在实际应用中, 受系统误差和快拍数有限的影响, 期望信号导向矢量与数据协方差矩阵往往存在误差, 此时Capon波束形成器性能会急剧下降, 特别当训练数据中含期望信号时, 还会导致期望信号自消现象^[3-5]. 对角加载是提高Capon波束形成器稳健性常用的方法之一, 它在数学和物理上都有明确的解释和意义, 但如何确定最优对角加载量仍是亟待研究的问题. Gershman^[6], Li^[7], Boyd^[8]等分别提出了能够根据导向矢量不确定集来选取参数的稳健波束形成方法, 可以证明这几种方法均属于对角

加载类算法且是等效的, 但上述方法的性能受导向矢量不确定集估计误差的影响较大. 基于岭回归的自适应波束形成算法(hoerl kennard baldwin, HKB)^[9]和基于广义线性组合的协方差矩阵修正法(general linear combination, GLC)^[10]均能根据接收数据自动确定对角加载量的算法. 但这两种算法都存在固有缺陷^[10]. 凸优化技术引入到稳健波束形成器的设计中拓展了稳健波束形成器的设计思想^[11-17]. 虽然凸优化问题可以利用高效内点法求解, 但其求解过程计算量较大, 工程实现较难, 特别是优化变量维数较高时这一缺点更为突出.

针对上述问题, 本文从广义旁瓣对消器出发, 提出了一种受算法参数影响较小、计算复杂度较低、且易于工程实现的稳健波束形成算法, 该算法能同时缓解导向矢量误差和数据快拍不足对Capon波束形成器的不利影响. 通过凸优化问题的原始问题与对偶问题的关系, 为其推导了一种基于牛顿迭代法的一维搜索算法, 且从数学上解释了该

* 国家自然科学基金(批准号: 51279043, 61201411, 51209059)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: wuwenfenggood@163.com

算法与对角加载类算法的关系.

2 阵列信号处理数学模型

考虑 M 元均匀线阵, 阵元间距为半波长, $K+1$ 组远场平面波 (其中包含一组期望信号和 K 组干扰) 入射到基阵. 假设信号、各个干扰和噪声均互不相关, 则阵列接收数据的协方差矩阵可以表示为

$$\mathbf{R} = \delta_0^2 \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_0^H + \sum_{k=1}^K \delta_k^2 \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^H + \mathbf{R}_n, \quad (1)$$

式中, δ_0^2 和 $\{\delta_k^2\}_{k=1}^K$ 分别表示期望信号和 K 个干扰的功率; \mathbf{a}_0 和 $\{\mathbf{a}_k\}_{k=1}^K$ 分别表示相应的导向矢量; \mathbf{R}_n 表示阵列噪声协方差矩阵; $(\cdot)^H$ 表示矩阵或向量的共轭转置. 在实际应用中, \mathbf{R} 通常由 N 次采样数据协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}$ 估计

$$\hat{\mathbf{R}} = \sum_{n=1}^N \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n) / N, \quad (2)$$

式中 $\mathbf{x}(n)$ 表示第 n 次快拍.

标准 Capon 波束形成可描述为 [6]

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \hat{\mathbf{R}} \mathbf{w}, \\ \text{s.t. } \mathbf{w}^H \mathbf{a}_s = 1, \end{aligned} \quad (3)$$

式中, $\mathbf{w} \in \mathbf{C}^{M \times 1}$ 为加权向量; \mathbf{a}_s 表示预设的导向矢量. 利用 Lagrange 乘子法得到上式的解

$$\mathbf{w}_s = \frac{\hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{a}_s}{\mathbf{a}_s^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{a}_s}. \quad (4)$$

为了克服快拍数不足时 $\hat{\mathbf{R}}$ 的估计误差, 文献 [10] 利用广义线性组合的方式对其进行修改, 定义修改后的协方差矩阵为 \mathbf{R}_{GLC} , 则有

$$\mathbf{R}_{\text{GLC}} = \alpha \mathbf{I} + \beta \hat{\mathbf{R}}, \quad (5)$$

其中 α 和 β 由下式估计:

$$\alpha = \min [v\varepsilon / \|\hat{\mathbf{R}} - v\mathbf{I}\|^2, v], \quad (6)$$

$$\beta = 1 - \alpha/v, \quad (7)$$

式中,

$$\varepsilon = \sum_{n=1}^N \|\mathbf{x}(n)\|^4 / N^2 - \|\hat{\mathbf{R}}\|^2 / N,$$

$\mathbf{x}(n)$ 为第 n 次快拍得到的数据向量; $v = \text{tr}(\hat{\mathbf{R}}) / M$, $\text{tr}(\cdot)$ 表示矩阵的迹. GLC 算法能自动根据接收数据计算参数, 但该算法只适用于快拍数较小的情况, 快拍数较大时会失去抗导向矢量误差的鲁棒性.

3 最小二乘的稳健波束形成 (RLS-RCB)

3.1 最差情况下的数据协方差矩阵

假设实际数据协方差矩阵和估计数据协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}$ 间存在误差矩阵 Δ , 且满足

$$\|\Delta\| \leq \gamma, \quad (8)$$

式中, γ 为数据协方差矩阵估计误差的范数上限, 在每次批处理中为常数. 在误差矩阵的范数约束下, (3) 式可以表示为

$$\min_{\mathbf{w}} \max_{\|\Delta\| \leq \gamma} \mathbf{w}^H (\hat{\mathbf{R}} + \Delta) \mathbf{w}, \quad \text{s.t. } \mathbf{w}^H \mathbf{a}_s = 1. \quad (9)$$

为了计算最差情况下的数据协方差矩阵, 先考虑如下问题:

$$\max_{\|\Delta\| \leq \gamma} \mathbf{w}^H (\hat{\mathbf{R}} + \Delta) \mathbf{w}. \quad (10)$$

利用 Lagrange 乘子法可得上式的解 [18]

$$\Delta = \mathbf{w} \mathbf{w}^H / \|\mathbf{w}\|^2. \quad (11)$$

将 (11) 式代入 (10) 式和 (9) 式中可得

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H (\hat{\mathbf{R}} + \gamma \mathbf{I}) \mathbf{w}, \quad \text{s.t. } \mathbf{w}^H \mathbf{a}_s = 1. \quad (12)$$

由 (12) 式可以看出在误差矩阵的范数约束下, 最差情况下的数据协方差矩阵为 $\hat{\mathbf{R}} + \gamma \mathbf{I}$. 由于 γ 的值会随接收信号功率的变化而变化, 为了消除这种不确定性, 引入参数 γ_0 , 使其满足

$$\gamma_0 = \frac{\gamma}{\text{tr}(\hat{\mathbf{R}}) / M}, \quad (13)$$

式中 $\text{tr}(\hat{\mathbf{R}}) / M$ 用于估计基阵接收信号的功率, 参数 γ_0 用于近似拟合 γ 随 $\text{tr}(\hat{\mathbf{R}}) / M$ 的变化规律. γ_0 是本文算法唯一引入的参数, 该参数对算法性能的影响将在仿真中给出. 为了提高小快拍时 $\hat{\mathbf{R}}$ 的估计精度, 可利用 GLC 算法对其预处理.

3.2 RLS-RCB 算法描述

利用广义旁瓣对消器的结构, (3) 式中权向量可以表示为

$$\mathbf{w} = \mathbf{a}_s / M - \mathbf{Q} \boldsymbol{\eta}, \quad (14)$$

式中, $\mathbf{Q} \in \mathbf{C}^{M \times (M-1)}$ 为行满秩阻塞矩阵, 满足 $\mathbf{Q}^H \mathbf{a}_s = 0$ 且 $\mathbf{Q}^H \mathbf{Q} = \mathbf{I}$; $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{C}^{M-1}$ 为待求向量. \mathbf{Q} 可由 \mathbf{a}_s 的 QR 分解所得正交矩阵的后 $M-1$ 个

列向量组成. (14) 式显然满足 (3) 式中的约束条件, 将其代入 (3) 式可得

$$\begin{aligned} & \min_{\boldsymbol{\eta}} \left(\mathbf{Q}\boldsymbol{\eta} - \frac{\mathbf{a}_s}{M} \right)^H \hat{\mathbf{R}} \left(\mathbf{Q}\boldsymbol{\eta} - \frac{\mathbf{a}_s}{M} \right) \\ &= \min_{\boldsymbol{\eta}} \left\| \hat{\mathbf{R}}^{1/2} \mathbf{Q}\boldsymbol{\eta} - \hat{\mathbf{R}}^{1/2} \frac{\mathbf{a}_s}{M} \right\|^2, \end{aligned} \quad (15)$$

式中 $\hat{\mathbf{R}}^{1/2}$ 为 $\hat{\mathbf{R}}$ 的正定 Hermitian 平方根. 令 $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{R}}^{1/2} \mathbf{Q}$, $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{R}}^{1/2} \mathbf{a}_s / M$, 则 (15) 式可视为如下最小二乘问题:

$$\min_{\boldsymbol{\eta}} \|\mathbf{A}\boldsymbol{\eta} - \mathbf{b}\|. \quad (16)$$

由于误差矩阵 Δ 的存在, 导致 \mathbf{A} 和 $\boldsymbol{\eta}$ 均存在误差, 而最小二乘问题对该误差不具备稳健性 [19]. 假设 \mathbf{A} 和 \mathbf{b} 的误差分别为 $\Delta\mathbf{A}$ 和 $\Delta\mathbf{b}$, 则

$$\Delta\mathbf{A} = \left(\mathbf{R}^{1/2} - \hat{\mathbf{R}}^{1/2} \right) \mathbf{Q}, \quad (17)$$

$$\Delta\mathbf{b} = \left(\mathbf{R}^{1/2} - \hat{\mathbf{R}}^{1/2} \right) \mathbf{a}_s / M. \quad (18)$$

(16) 式更精确的表达式为

$$\min_{\boldsymbol{\eta}} \|(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})\boldsymbol{\eta} - (\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b})\|. \quad (19)$$

令 ρ 表示最差情况下 $\|[\Delta\mathbf{A}\Delta\mathbf{b}]\|$ 的取值, (17) 式、(18) 式和最差情况下 $\mathbf{R} = \hat{\mathbf{R}} + \gamma\mathbf{I}$ 带入即可求得 ρ . (19) 式转化为如下稳健最小二乘问题:

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \rho) \\ &= \min_{\boldsymbol{\eta}} \max_{\|[\Delta\mathbf{A}\Delta\mathbf{b}]\| \leq \rho} \|(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})\boldsymbol{\eta} - (\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b})\| \\ &= \min_{\boldsymbol{\eta}} \max_{\|[\Delta\mathbf{A}'\Delta\mathbf{b}']\| \leq 1} \rho \|(\mathbf{A}' + \Delta\mathbf{A}')\boldsymbol{\eta} \\ & \quad - (\mathbf{b}' + \Delta\mathbf{b}')\|, \end{aligned} \quad (20)$$

式中, $\Delta\mathbf{A}' = \Delta\mathbf{A}/\rho$, $\mathbf{A}' = \mathbf{A}/\rho$, $\Delta\mathbf{b}' = \Delta\mathbf{b}/\rho$, $\mathbf{b}' = \mathbf{b}/\rho$. 由于 ρ 为常数, 不会影响 (20) 式中最后一项的求解, 当 $\|[\Delta\mathbf{A}', \Delta\mathbf{b}']\| = 1$ 时, 该项取最差情况, 此时先考虑如下问题:

$$\begin{aligned} & \max_{\|[\Delta\mathbf{A}'\Delta\mathbf{b}']\|=1} \|(\mathbf{A}' + \Delta\mathbf{A}')\boldsymbol{\eta} - (\mathbf{b}' + \Delta\mathbf{b}')\| \\ &= \|\mathbf{A}'\boldsymbol{\eta} - \mathbf{b}'\| + \sqrt{\|\boldsymbol{\eta}\|^2 + 1}. \end{aligned} \quad (21)$$

(21) 式成立的条件是两向量 $\mathbf{A}'\boldsymbol{\eta} - \mathbf{b}'$ 和 $\Delta\mathbf{A}'\boldsymbol{\eta} - \Delta\mathbf{b}'$ 同相, 即

$$[\Delta\mathbf{A}'\Delta\mathbf{b}'] = \frac{\mathbf{e}}{\sqrt{\|\boldsymbol{\eta}\|^2 + 1}} [\boldsymbol{\eta}^H \mathbf{1}], \quad (22)$$

式中,

$$\mathbf{e} = \begin{cases} \frac{\mathbf{A}'\boldsymbol{\eta} - \mathbf{b}'}{\|\mathbf{A}'\boldsymbol{\eta} - \mathbf{b}'\|}, & \mathbf{A}'\boldsymbol{\eta} \neq \mathbf{b}', \\ \text{单位向量}, & \text{其他}. \end{cases}$$

此时,

$$f(\mathbf{A}', \mathbf{b}', 1) = \min_{\boldsymbol{\eta}} \|\mathbf{A}'\boldsymbol{\eta} - \mathbf{b}'\| + \sqrt{\|\boldsymbol{\eta}\|^2 + 1}.$$

此优化问题可以转化为如下二阶锥规划问题求解:

$$\begin{aligned} & \min_{\boldsymbol{\eta}} \tau_1 \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{A}'\boldsymbol{\eta} - \mathbf{b}'\| \leq \tau_1 - \tau_2, \\ & \quad \quad \quad \left\| [\boldsymbol{\eta}^H \mathbf{1}]^H \right\| \leq \tau_2. \end{aligned} \quad (23)$$

(23) 式可以通过高效内点法求解, 求解得 $\boldsymbol{\eta}$ 后利用 (14) 式即可计算最终权值. 综合上述推导可以看出本文算法稳健性提升的主要原因在于引入稳健最小二乘和最差性能最优化的处理方法, 且最差性能最优化的处理方式还能为本文算法带来对参数设置偏差的低敏感性. 由于内点法在工程上较难实现, 下面将通过进一步推导给出一种计算复杂度较低且适合工程实现的一维搜索方法.

3.3 一维搜索方法

(23) 式属于二阶锥规划问题, 其对偶问题为 [20]

$$\begin{aligned} & \max \mathbf{b}'^H \mathbf{y} - \mathbf{v}, \\ & \text{s.t.} \quad \mathbf{A}'^H \mathbf{y} + \mathbf{u} = 0, \\ & \quad \|\mathbf{y}\| \leq 1, \quad \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \right\| \leq 1, \end{aligned} \quad (24)$$

式中, $\mathbf{y} \in \mathbf{C}^M$, $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^{M-1}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{C}$ 为优化变量. 二阶锥规划问题 (23) 和其偶问题为严格可行, 二者之间没有对偶间隙, 即下式成立:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \|\mathbf{A}'\boldsymbol{\eta} - \mathbf{b}'\| + \sqrt{\|\boldsymbol{\eta}\|^2 + 1} \\ &= \mathbf{b}'^H \mathbf{y} - \mathbf{v} \\ &= -(\mathbf{A}'\boldsymbol{\eta} - \mathbf{b}')^H \mathbf{y} - [\boldsymbol{\eta}; 1]^H [-\mathbf{A}'^H \mathbf{y}; \mathbf{v}]. \end{aligned} \quad (25)$$

利用 (24) 式中的约束条件 $-\mathbf{A}'^H \mathbf{y} = \mathbf{u}$, $\|\mathbf{y}\| \leq 1$ 和 $\|[\mathbf{u}^T \mathbf{v}]\| \leq 1$ 可得

$$\mathbf{y} = -\frac{\mathbf{A}'\boldsymbol{\eta} - \mathbf{b}'}{\|\mathbf{A}'\boldsymbol{\eta} - \mathbf{b}'\|}, \quad (26)$$

$$[\mathbf{u}^T, \mathbf{v}] = -\frac{[\boldsymbol{\eta}^T, 1]}{\sqrt{\|\boldsymbol{\eta}\|^2 + 1}}. \quad (27)$$

将 (26) 式和 (27) 式代入 $-\mathbf{A}'^H \mathbf{y} = \mathbf{u}$, 化简得

$$\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{A}'^H \mathbf{A}' + \mu \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}'^H \mathbf{b}', \quad (28)$$

式中,

$$\mu = \frac{\|\mathbf{A}'\boldsymbol{\eta} - \mathbf{b}'\|}{\sqrt{\|\boldsymbol{\eta}\|^2 + 1}} = \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_2}.$$

只需求得 μ 或 τ_1/τ_2 即可得 η 的完整解. 将 (26) 式、(27) 式和 (28) 式代入 (25) 式得

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \frac{\mathbf{b}'^H(-\mathbf{A}'\eta + \mathbf{b}')}{\|\mathbf{A}'\eta - \mathbf{b}'\|} + \frac{1}{\sqrt{\|\eta\|^2 + 1}} \\ &= \frac{\mathbf{b}'^H(\mathbf{I} - \mathbf{A}'(\mathbf{A}'^H\mathbf{A}' + \mu\mathbf{I})^{-1}\mathbf{A}'^H)\mathbf{b}'}{\tau_1 - \tau_2} + \frac{1}{\tau_2} \\ &= \mathbf{b}'^H((\tau_1 - \tau_2)\mathbf{I} + \tau_2\mathbf{A}'\mathbf{A}'^H)^{-1}\mathbf{b}' + \frac{1}{\tau_2}. \quad (29)\end{aligned}$$

上式最后一步利用了矩阵求逆定理. 将上式左右两边同乘 τ_1 , 并令 $\phi = \tau_2/\tau_1$, (29) 式转化为

$$\tau_1^2 = \mathbf{b}'^H((1 - \phi)\mathbf{I} + \phi\mathbf{A}'\mathbf{A}'^H)^{-1}\mathbf{b}' + 1/\phi. \quad (30)$$

令 $\tau_1^2 = f(\phi)$, (23) 式的目标函数中最小化 τ_1 即最小化 $f(\phi)$. 由于 τ_1 为凸函数且 $\tau_1 > 0$, 则 τ_1^2 也为凸函数^[20,21], $f(\phi)$ 的局部最小值点即为全局最小值点. 对 \mathbf{A}' 进行奇异值分解 $\mathbf{A}' = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}$, 并注意到 $\Sigma\Sigma^H$ 为对角矩阵, 则有

$$\begin{aligned}f(\phi) &= \mathbf{b}'^H\mathbf{U}((1 - \phi)\mathbf{I} + \phi\Sigma\Sigma^H)^{-1}\mathbf{U}^H\mathbf{b}' + 1/\phi \\ &= \sum_{i=1}^M \frac{b'_i b'_i{}^H}{(1 - \phi) + \phi\lambda_i} + 1/\phi, \quad (31)\end{aligned}$$

式中, b'_i 为向量 $\mathbf{b}'^H\mathbf{U}$ 中的第 i 个元素; λ_i 为 $\Sigma\Sigma^H$ 对角线上第 i 个元素, $i = 1, 2, \dots, M$. 由 $\tau_1 > \tau_2 > 0$, 可得 ϕ 的取值范围

$$0 < \phi < 1. \quad (32)$$

正如上文分析, $f(\phi)$ 的局部最小值即为全局最小值, 求使 $f(\phi)$ 取值最小的 ϕ 等价于解

$$f'(\phi) = 0, \quad (33)$$

式中, $f'(\phi)$ 为 $f(\phi)$ 的一阶导数. 又因 $f(\phi)$ 二次可微, 并结合 (32) 式中 ϕ 的取值范围, (33) 式可用牛顿迭代法求解^[22,23]. 求解得到 ϕ 后, 将其代入 (28) 式, 可得

$$\eta = [\mathbf{A}'^H\mathbf{A}' + (1/\phi - 1)\cdot\mathbf{I}]^{-1}\mathbf{A}'^H\mathbf{b}'. \quad (34)$$

将 (34) 式代入 (14) 式, 得到 RLS-RCB 算法的权向量

$$\mathbf{w} = \mathbf{a}_s/M - \mathbf{Q}\eta. \quad (35)$$

从上述过程可以看出, RLS-RCB 算法的一维搜索方法主要的计算量来源于矩阵的分解和求逆运算, 二者计算复杂度均为 $O(M^3)$, 该计算复杂度与标准 Capon 波束形成的计算复杂度属于同一个量级.

3.4 本文算法和对角加载类算法的关系

下面验证本文算法和对角加载类算法的关系. 将 (34) 式代入 (35) 式可得

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= \mathbf{a}_s/M - \mathbf{Q}(\mathbf{A}'^H\mathbf{A}' + (1/\phi - 1)\mathbf{I})^{-1}\mathbf{A}'^H\mathbf{b}' \\ &= \mathbf{a}_s/M - \mathbf{Q}(\mathbf{A}^H\mathbf{A} + \rho^2(1/\phi - 1)\mathbf{I})^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{b} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{Q}(\mathbf{Q}^H\hat{\mathbf{R}}\mathbf{Q} + \rho^2(1/\phi - 1)\mathbf{I})^{-1}\mathbf{Q}^H\hat{\mathbf{R}}) \\ &\quad \times \mathbf{a}_s/M. \quad (36)\end{aligned}$$

显然有 $\mathbf{Q}^H\mathbf{a}_s = \mathbf{Q}^H\rho^2(1/\phi - 1)\mathbf{I}\mathbf{a}_s/M = \mathbf{0}$, 将其加入 (36) 式右边多项式并不改变 \mathbf{w} 的值, (36) 式等价于

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= (\mathbf{I} - \mathbf{Q}(\mathbf{Q}^H\hat{\mathbf{R}}\mathbf{Q} + \rho^2(1/\phi - 1)\mathbf{I})^{-1}) \\ &\quad \times \mathbf{Q}^H(\hat{\mathbf{R}} + \rho^2(1/\phi - 1)\mathbf{I})\mathbf{a}_s/M. \quad (37)\end{aligned}$$

令 $\mathbf{R}_{DL} = \hat{\mathbf{R}} + \rho^2(1/\phi - 1)\mathbf{I}$, $\mathbf{R}_{DL}^{1/2}$ 为 \mathbf{R}_{DL} 的正定 Hermitian 平方根, 即 $\mathbf{R}_{DL} = \mathbf{R}_{DL}^{H/2}\mathbf{R}_{DL}^{1/2}$. 则 (37) 式变为

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= (\mathbf{I} - \mathbf{Q}(\mathbf{Q}^H\mathbf{R}_{DL}\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{Q}^H\mathbf{R}_{DL})\mathbf{a}_s/M \\ &= \mathbf{R}_{DL}^{-1/2}(\mathbf{I} - \mathbf{R}_{DL}^{1/2}\mathbf{Q}(\mathbf{Q}^H\mathbf{R}_{DL}\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{Q}^H\mathbf{R}_{DL}^{H/2}) \\ &\quad \times \mathbf{R}_{DL}^{1/2}\mathbf{a}_s/M. \quad (38)\end{aligned}$$

令 $\mathbf{P}^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{R}_{DL}^{1/2}\mathbf{Q}(\mathbf{Q}^H\mathbf{R}_{DL}\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{Q}^H\mathbf{R}_{DL}^{H/2}$, 易知 \mathbf{P}^\perp 为 $\mathbf{R}_{DL}^{1/2}\mathbf{Q}$ 的正交投影矩阵. $\mathbf{R}_{DL}^{1/2}\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{R}_{DL}^{-H/2}\mathbf{a}_s$ 均为列满秩矩阵, 且有

$$\begin{aligned}(\mathbf{R}_{DL}^{1/2}\mathbf{Q})^H(\mathbf{R}_{DL}^{-H/2}\mathbf{a}_s) &= \mathbf{Q}^H\mathbf{a}_s = \mathbf{0}, \\ \text{rank}(\mathbf{R}_{DL}^{1/2}\mathbf{Q}) + \text{rank}(\mathbf{R}_{DL}^{-H/2}\mathbf{a}_s) &= M,\end{aligned}$$

其中 $\text{rank}(\cdot)$ 表示矩阵的秩. 显然 $\mathbf{R}_{DL}^{-H/2}\mathbf{a}_s$ 为 $\mathbf{R}_{DL}^{1/2}\mathbf{Q}$ 的列空间的正交补. 即有

$$\mathbf{P}^\perp = \mathbf{R}_{DL}^{-H/2}\mathbf{a}_s(\mathbf{a}_s^H\mathbf{R}_{DL}^{-1}\mathbf{a}_s)^{-1}\mathbf{a}_s^H\mathbf{R}_{DL}^{-1/2}. \quad (39)$$

将 (39) 式代入 (38) 式可得

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= \mathbf{R}_{DL}^{-1/2}\mathbf{R}_{DL}^{-H/2}\mathbf{a}_s(\mathbf{a}_s^H\mathbf{R}_{DL}^{-1}\mathbf{a}_s)^{-1}\mathbf{a}_s^H \\ &\quad \times \mathbf{R}_{DL}^{-1/2}\mathbf{R}_{DL}^{1/2}\mathbf{a}_s/M \\ &= \mathbf{R}_{DL}^{-1}\mathbf{a}_s/\mathbf{a}_s^H\mathbf{R}_{DL}^{-1}\mathbf{a}_s \\ &= \frac{(\hat{\mathbf{R}} + \rho^2(1/\phi - 1)\mathbf{I})^{-1}\mathbf{a}_s}{\mathbf{a}_s^H(\hat{\mathbf{R}} + \rho^2(1/\phi - 1)\mathbf{I})^{-1}\mathbf{a}_s}. \quad (40)\end{aligned}$$

可见本文算法属于对角加载类算法, 且对角加载系数为 $\rho^2(1/\phi - 1)$. 因此可以从两个角度解释本文算法能提升 Capon 波束形成器稳健性的原因: 1) 保证在信号协方差矩阵估计最差情况下波束输出噪声功率最小; 2) 等价于对角加载类算法, 通过对角加载量的选择减少数据协方差矩阵中白噪声

的特征值扩散程度从而使旁瓣降低, 算法稳健性提高.

4 仿真分析

为验证本文算法的性能和一维搜索方法的正确性, 设计了以下几组实验, 考虑一个 10 元均匀线阵, 阵元间距为半波长. 三组远场窄带平面波分别从 -25° , 10° 和 35° 方向入射到基阵, 其中 10° 方向的信号为期望信号, 其他两组信号为干扰, 干扰干噪比分别为 10 dB 和 30 dB, 信号、干扰和噪声之间互不相关. 同时对下述算法进行了对比分析: 标准 Capon 波束形成 (SCB)、固定对角加载法 (FDL)、基于岭回归稳健波束形成算法 (HKB)、GLC 算法和稳健波束形成算法 (RCB) [7], 其中固定对角加载算法的对角加载量为白噪声功率的 10 倍 (对该算法而言假设白噪声功率已知). 无特殊说明所有实验均为 200 次 Monte-Carle 实验进行统计的结果.

实验 1 一维搜索算法验证及波束图对比

分别验证存在随机导向矢量误差和观测方向误差时各算法波束图. 其中随机导向矢量误差 $\Delta \mathbf{a}$ 服从均值为 $\mathbf{0}$ 、协方差矩阵为 $\delta^2 \mathbf{I}$ 的复向量, 且 $\delta = 0.1$; 观测方向误差为 1° , 即实际信号入射方向为 10° , 但观测方向为 11° . 期望信号信噪比为 20 dB, 快拍数为 100. 为了清晰只显示了 SCB 算法、RCB 算法和本文算法, 其中 RLS-RCB1 为本文算法利用 (23) 式中二阶锥规划方式求解结果, RLS-RCB2 为本文算法利用一维搜索方式求解结果. RCB 算法中的参数取 1, 本文算法中参数 γ_0 取 2, 一维搜索算法中牛顿迭代法两次结果差小于 10^{-6} 时认为收敛.

图 1 显示存在随机导向矢量误差时三种波束形成算法单次实验波束图, 图 2 显示存在观测方向误差时各算法单次实验波束图. 从图 1 和图 2 可以看出利用二阶锥规划方式和一维搜索方式求解得到的结果完全一致. 从图中还可以看出 SCB 算法虽然在干扰方向形成了零陷, 但出现严重信号自消现象, 且旁瓣升高. RCB 算法和本文算法均保持完整的主瓣, 但本文算法在干扰方向的零陷更深.

实验 2 对随机导向矢量误差稳健性的对比

假设实际信号导向矢量存在实验一中所所述的随机导向矢量误差, 快拍数取 100, RCB 算法和本文算法的参数同实验 1. 图 3 显示各算法的输出信

干噪比随输入信噪比变化曲线, 其中“optimal SIN-R”表示理想情况下最优输出信干噪比. 从图 3 可以看出在输入信噪比小于 10 dB 时, 各稳健波束形成算法在一定程度上缓解了导向矢量失配带来的性能下降, 当输入信噪比增加时, 由于信号自消现象的加剧, 部分算法已经不能提供足够的稳健性, 从而导致输出信干噪比随输入信噪比的提高反而下降, 而本文算法在整个观测区间内均保持较好的性能. 同样也可以看出利用二阶锥规划方式和一维搜索方法求解结果一致, 在下文中将不再赘述.

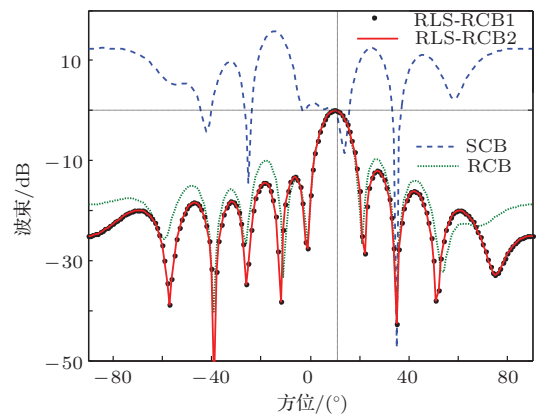


图 1 存在随机导向矢量误差时波束图

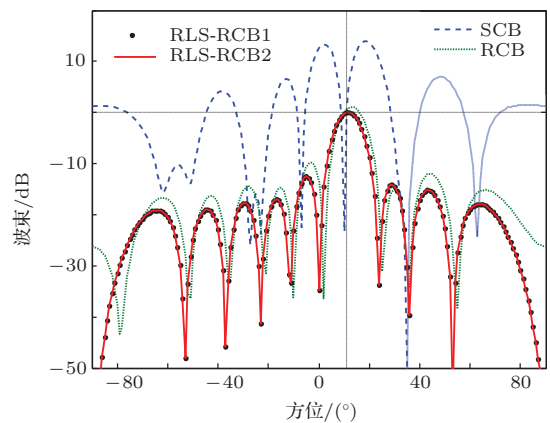


图 2 存在观测方向误差时波束图

图 4 显示存在上述导向矢量失配时, 各算法输出信干噪比随快拍数变化曲线, 其中输入信噪比为 20 dB, 其他参数同上例. 从图中可以看出在快拍数相同时, 本文算法的性能均优于其他算法. 随着快拍数的增加, GLC 算法生成对角加载量逐渐减少, 从而降低了抵抗了导向矢量误差的能力, 在快拍数较高时性能反而下降.

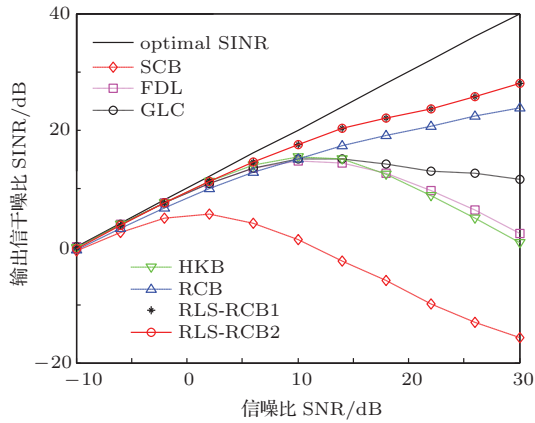


图3 输出信干噪比随输入信噪比变化曲线

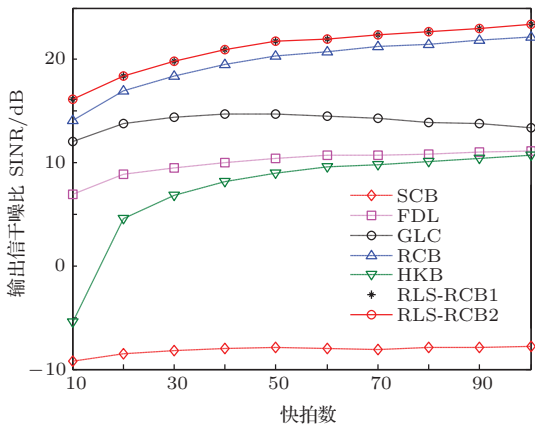


图4 输出信干噪比随快拍数变化曲线

实验3 同时存在随机导向矢量误差和观测方向误差时稳健性的对比

考虑同时存在实验一中所述随机导向矢量误差和观测方向误差时各算法性能, 快拍数取100, RCB算法参数取3, 本文算法参数取2. 图5显示存在上述失配时各算法输出信干噪比随输入信噪比变化曲线, 从图中可以看出在输入信噪比小于2 dB时, 各稳健波束形成算法性能相当, 因为此时信号自消现象不严重, 对算法的稳健性要求不高. 在输入信噪比较高时, 本文算法具有优于其他算法的稳健性. 可见, 本文算法能同时提高Capon波束形成器抗随机导向矢量误差和观测方向误差的稳健性.

实验4 预设参数对本文算法的影响

考虑在实验三中所述的失配条件下, 本文算法的性能随 γ_0 取值的变化, 快拍数取100. 图6显示 γ_0 的分别取0.5, 1, 1.5和2时本文算法的性能曲线, 图中“gamma”代表 γ_0 的取值. 从图中可以看

出, 输入信噪比较低时, 算法的性能几乎不受参数 γ_0 的影响; 输入信噪比大于20 dB时, 算法的性能虽然受到一定影响, 但在 γ_0 的四种不同取值下输出信干噪比最大差距小于2 dB.

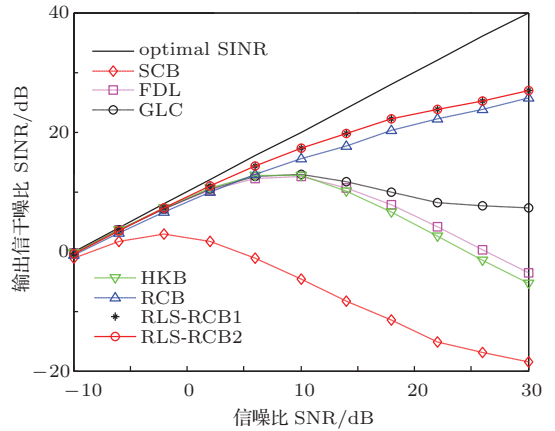


图5 输出信干噪比随输入信噪比变化曲线

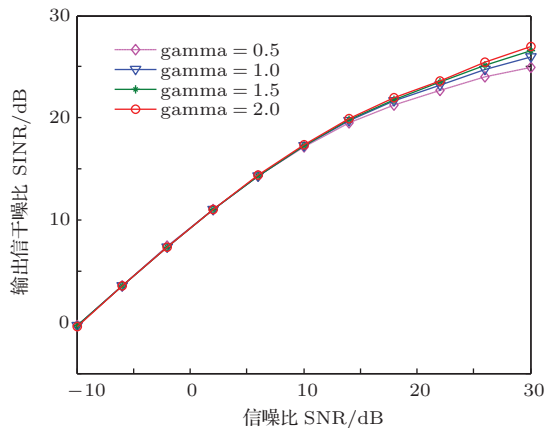


图6 参数对算法性能的影响

5 结 论

针对在实际应用中标准Capon波束形成器性能下降问题, 提出了一种基于最小二乘的稳健波束形成算法, 并推导了一种基于牛顿迭代法的一维搜索解, 从而使该算法的计算量和标准Capon波束形成属于同一个量级, 且求解过程更适用于工程实践. 仿真分析表明, 该一维搜索方法在降低计算量的同时能获得和二阶锥规划方式相同的最优解, 同时和目前较为经典的算法相比, 本文算法在抗随机导向矢量误差, 观测方向误差和快拍数不足等条件失配有更好的稳健性.

参考文献

- [1] Yang D G, Li B, Wang Z T, Lian X M 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 054306 (in Chinese) [杨殿阁, 李兵, 王子腾, 连小珉 2012 物理学报 **61** 054306]
- [2] Shi J, Yang D S, Shi S G 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 124302 (in Chinese) [时洁, 杨德森, 时胜国 2012 物理学报 **61** 124302]
- [3] Gu Y J, Leshem A 2012 *IEEE Trans. Sign. Process.* **60** 3881
- [4] Shi J, Yang D S, Shi S G 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 064301 (in Chinese) [时洁, 杨德森, 时胜国 2011 物理学报 **60** 064301]
- [5] Xiao X, Xu L, Li Q W 2013 *Chin. Phys. B* **20** 094101
- [6] Vorobyov S A, Gershman A B, Luo Z Q 2003 *IEEE Trans. Sign. Process.* **51** 313
- [7] Li J, Stoica P, Wang Z S 2004 *IEEE Trans. Sign. Process.* **52** 2407
- [8] Li J, Stoica P, Wang Z S 2003 *IEEE Trans. Sign. Process.* **51** 1702
- [9] Selen Y, Abrahamsson R, Stoica P 2008 *Signal Process.* **88** 33
- [10] Jian L, Lin D, Stoica P 2010 *IEEE Trans. on A & E* **46** 449
- [11] Wang Y, Wu W F, Fan Z, Liang G L 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 184302 (in Chinese) [王燕, 吴文峰, 范展, 梁国龙 2013 物理学报 **62** 184302]
- [12] Khabbazibasmenj A, Vorobyov S A, Hassanien A 2012 *IEEE Trans. Sign. Process.* **60** 2974
- [13] Rubsamen M, Gershman A B 2012 *IEEE Trans. Sign. Process.* **60** 740
- [14] Yu G J, Leshem A 2012 *IEEE Trans. Sign. Process.* **60** 3881
- [15] Somasundaram S D 2012 *IEEE Trans. Sign. Process.* **60** 5845
- [16] Wang J A 2011 *Chin. Phys. B* **20** 120701
- [17] Lakshmanan S, Balasubramaniam P 2011 *Chin. Phys. B* **20** 040204
- [18] Shahbazpanahi S, Gershman A B, Luo Z Q, Wong K M 2003 *IEEE Trans. Sign. Process.* **51** 2257
- [19] Li X L, Li S L 2013 *Chin. Phys. B* **22** 080204
- [20] Stephen B, Lieven V 2004 *Convex Optimization* (Cambridge: Cambridge University Press) pp223—227
- [21] Yang J, Sun Q Y, Yang D S 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 200511 (in Chinese) [杨珺, 孙秋野, 杨东升 2012 物理学报 **61** 200511]
- [22] Luo W, Zhang M, Zhou P, Yin H C 2010 *Chin. Phys. B* **19** 084102
- [23] Zhou L H, Gao X H, Yang Z J, Lu D Q, Guo Q, Cao W W, Hu W 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 044208 (in Chinese) [周罗红, 高星辉, 杨振军, 陆大全, 郭旗, 曹伟文, 胡巍 2011 物理学报 **60** 044208]

A new robust adaptive beamforming and the one-dimensional search strategy*

Wang Yan¹⁾ Wu Wen-Feng¹⁾²⁾ Fan Zhan^{1)†} Liang Guo-Long¹⁾

1) (*Science and Technology on Underwater Acoustic laboratory, Harbin Engineering University, Haerbin 150001, China*)

2) (*China Electronics Technology Group Corporation No.38 Research Institute, Hefei 230031, China*)

(Received 4 January 2014; revised manuscript received 11 March 2014)

Abstract

Adaptive beamforming methods will be degraded sharply in the presence of steering vector errors. The design methods of robust adaptive beamforming become more flexible when the convex optimization technique is used. However, this leads to high computational-complexity and more difficulties for engineering applications. To solve these problems, a robust adaptive beamforming based on the least square estimation is proposed, and a laconic solution method using one-dimensional search is derived. The standard Capon beamformer (SCB) is converted to a robust least-square problem based on the principle of generalized sidelobe canceller, and is then changed into a problem of second-order program. In order to reduce the amount of computation, a one-dimensional search method is deduced using the relationship between the primal and dual problems of second-order program, and Newton iteration method is adopted to obtain the optimal solution. The computational complexity of the proposed algorithm is in the same order of magnitude as that of the SCB. Simulation results demonstrate the robustness of the proposed algorithm in the case of steering vector mismatch and snapshot deficiency.

Keywords: robust adaptive beamforming, least square method, second-order program, Newton iterative method

PACS: 43.60.Fg, 42.60.Jf, 84.40.Ua

DOI: [10.7498/aps.63.154303](https://doi.org/10.7498/aps.63.154303)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 51279043, 61201411, 51209059).

† Corresponding author. E-mail: wuwenfenggood@163.com