

## 非平整基底上受热液膜流动稳定性研究\*

刘梅<sup>†</sup> 王松岭 吴正人

(华北电力大学能源动力与机械工程学院, 保定 071003)

(2014年1月20日收到; 2014年3月7日收到修改稿)

本文研究了二维黏性流体薄膜沿非平整不均匀加热基底流动时非线性表面波的演化及其流动稳定性. 利用长波摄动法推导出非平整线性加热基底上非线性表面波的零阶和一阶演化方程, 基于所得演化方程, 绘制出正弦波纹基底上液膜的表面波形图, 并研究液膜流动的线性稳定性, 分析了各无量纲参数对液膜线性稳定性的影响. 分析结果表明: 在正弦波纹基底上, 液膜自由表面随同壁面作相同频率的正弦型波动, 且液膜厚度沿流动方向逐渐变小; Marangoni 数为稳定影响因素, 随 Marangoni 数的增大, 液膜稳定区域增大; Peclet 数和倾角  $\theta$  均为不稳定影响因素, 随 Peclet 数和倾角  $\theta$  的增大, 液膜稳定区域减小; 在非平整基底的波峰和波谷处, Peclet 数、Marangoni 数和倾角  $\theta$  对稳定性的影响趋势一致, 但基底波谷处的液膜稳定区域小于波峰处区域, 流动更易失稳.

**关键词:** 非平整基底, 受热液膜, 非线性表面波, 线性稳定性

**PACS:** 47.15.gm, 47.15.Fe, 47.55.dm, 47.63.mf

**DOI:** 10.7498/aps.63.154702

## 1 引言

受热液膜沿非平整基底的流动, 在诸如薄膜涂抹、热交换器设计、大规模集成电路的薄液膜冷却、核电站安全壳的薄膜蒸发冷却和微流体等很多工程技术领域都有着重要的应用, 其中液膜表面波的演化及流动稳定性问题与诸多实际工程问题密切相关, 一直以来备受研究者的关注<sup>[1-3]</sup>.

当流体在非平整基底上流动时, 受基底结构的影响, 流动状态将发生较大改变, 进而导致自由界面产生一系列复杂的表面波. Wierschem 等<sup>[4]</sup>分析了恒壁温波纹板上液膜流动线性稳定性, 得出波纹板上液膜流动稳定的临界雷诺数大于平板. Tatiana 等<sup>[5]</sup>基于长波理论和 VOF 数值方法研究了恒温非平整基底上液膜表面波的演化过程, 发现基底微结构会对液膜流动产生不稳定影响. Sisoiev 等<sup>[6,7]</sup>基于长波理论得到液膜在气液界面和液固界面的演化方程, 其研究表明, 增大液固界面的

张力, 能增大薄液膜的流动稳定性, 进而促进较厚液膜界面扰动的发展; 李春曦等<sup>[8]</sup>采用润滑理论对倾斜粗糙壁面上含不溶性活性剂溶液的动力学特性进行了研究. Suriyan 等<sup>[9]</sup>实验研究发现波纹节距对水平波纹管中 R-134a 冷凝传热系数和压降变化具有显著影响. 李振等<sup>[10]</sup>基于长波近似, 运用线性稳定性理论和数值模拟两种方法, 研究了基底弹性、范德华力及液体蒸发等因素对液膜稳定性和去润湿过程的影响.

此外, 在加热基底上, 由于温度变化引起界面张力梯度所产生的 Marangoni 效应, 对液膜热质传递有十分重要的影响, 会造成液膜自由界面流动的不稳定<sup>[11]</sup>. 师晋生等<sup>[12]</sup>考虑表面蒸发压力和热毛细力的作用, 对饱和蒸发状态下低雷诺数自由降落液膜在小波幅正弦型波纹壁面上的流动进行理论分析. Samanta<sup>[13]</sup>研究了非均匀加热壁面上降落液膜的流动稳定性, 得到线性稳定的临界雷诺数以及非线性稳定区域和 Peclet 数的关系. Sadiq 等<sup>[14]</sup>从理论和数值方面运用长波线性稳定性方法, 研究了

\* 高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 20110036110009)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: liumei\_w@163.com

均匀加热多孔斜面上的液膜流动特性, 其研究结果表明多孔基底的渗透率和 Marangoni 数会增大扰动振幅, 进而导致流动失稳. Mukhopadhyay 等<sup>[15]</sup>对旋转非均匀加热斜面上液膜的流动稳定性进行了研究, 主要分析了哥氏力、离心力和 Marangoni 效应对流动稳定性的影响. 叶学民等<sup>[16]</sup>从理论方面建立临界破断液膜厚度和最小润湿量的关系式, 分析了重力或切应力驱动作用下受热液膜的破断特性.

在已有研究中, 综合考虑基底非平整性和加热因素对液膜流动特性影响的研究相对较少, 而在工业工程应用中, 液膜流所处基底经常会存在加热或非平整的情况, 因此, 本文针对非平整不均匀加热基底上液膜流动, 利用长波摄动法推导其表面波的演化方程, 进而研究液膜流动的线性稳定性, 并分析 Pelect 数、Marangoni 数、倾角  $\theta$  等无量纲参数对液膜线性稳定性的影响.

## 2 控制方程建立

液膜流动物理模型如图 1 所示. 二维不可压黏性流体, 在重力作用下, 沿倾斜非平整不均匀加热基底流动, 非平整基底凹陷最大处的切线方向和法线方向分别为笛卡尔坐标系的  $x$  轴、 $y$  轴, 基底函数为  $y = l(x)$ , 斜面倾角为  $\theta$ , 液膜与基底的总高为  $f$ , 液膜厚度为  $h$ ,  $f(x, t) = h(x, t) + l(x)$ , 环境温度为  $T_a$ , 假设自由表面绝热, 自由表面温度  $T_s = T_a$ , 基底温度沿  $x$  方向线性变化,  $T_w = T_a + x\Delta T$ , 其中,  $\Delta T$  为基底温度梯度,  $\Delta T = (T_m - T_a)/l_m$ ,  $T_m$  表示基底的最高温度,  $l_m$  表示基底在  $x$  坐标上投影的长度. 控制方程如以下各式:

$$u_x + v_y = 0, \quad (1)$$

$$\rho(u_t + uu_x + vv_y) = -p_x + \rho g \sin \theta + \mu(u_{xx} + u_{yy}), \quad (2)$$

$$\rho(v_t + uv_x + vv_y) = -p_y - \rho g \cos \theta + \mu(v_{xx} + v_{yy}), \quad (3)$$

$$\rho c_p (T_t + uT_x + vT_y) = k(T_{xx} + T_{yy}), \quad (4)$$

其中,  $u, v, \rho, p, T, \mu, c_p, k$  分别为液膜的速度分量、密度、压力、温度、动力黏度、定压比热和导热系数.

在基底处, 即  $y = l(x)$ ,

$$u = v = 0, \quad T = T_w. \quad (5)$$

自由表面处,  $y = f(x, t)$ , 运动边界条件为

$$f_t + uf_x = v, \quad (6)$$

温度边界条件为

$$k(T_y - T_x f_x) = 0, \quad (7)$$

动力边界条件为

$$\tau_{xy}(1 - f_x^2) - (\tau_{xx} - \tau_{yy})f_x - (\sigma_y f_x + \sigma_x) \sqrt{1 + f_x^2} = 0, \quad (8)$$

$$p_a + (\tau_{xx} f_x^2 - \tau_{xy} f_x + \tau_{yy})(1 - f_x^2)^{-1} - \sigma f_{xx}(1 + f_x^2)^{-3/2} = 0, \quad (9)$$

其中,  $\sigma$  为表面张力,  $\sigma = \sigma_0 - \gamma(T - T_a)$ ,  $\sigma_0$  为自由表面张力, 绝大多数流体的表面张力均随温度的升高而减小, 即  $\gamma = -d\sigma/dT > 0$ , 应力张量

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \\ \delta_{ij} &= \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

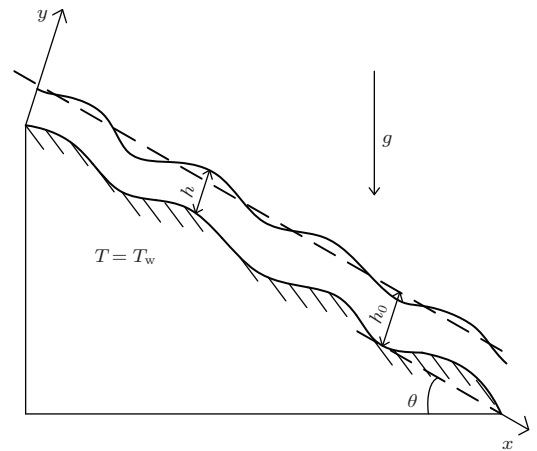


图 1 非平整基底上液膜流动示意图

根据以下无量纲关系式, 将控制方程和边界条件 (1)—(9) 式进行无量纲化

$$(u, v) = u_0 (u^*, \alpha v^*),$$

$$(x, y, l, h, f) = h_0 (x^*/\alpha, y^*, l^*, h^*, f^*),$$

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{\sigma_0}, \quad t^* = \frac{\alpha t u_0}{h_0}, \quad p^* = \frac{p - p_a}{\rho g h_0 \sin \theta},$$

$$u_0 = \frac{g h_0^2 \sin \theta}{2\nu}, \quad \alpha = \frac{2\pi h_0}{\lambda},$$

$$T^* = \frac{\alpha (T - T_a)}{\Delta T h_0}, \quad Re = \frac{u_0 h_0}{\nu},$$

$$We = \frac{\sigma_0}{\rho gh_0^2 \sin \theta}, \quad Ma = \frac{\gamma \Delta T}{\alpha \rho gh_0 \sin \theta},$$

其中,  $h_0, \sigma_0, \lambda, \alpha$  分别为液膜平均厚度、自由表面张力、扰动波长、无量纲波数.

无量纲化后省略角标 “\*” 得以下各式:

$$u_x + v_y = 0, \quad (10)$$

$$\alpha Re (u_t + uu_x + vv_y) = -2\alpha p_x + 2 + (\alpha^2 u_{xx} + u_{yy}), \quad (11)$$

$$\alpha^2 Re (v_t + uv_x + vv_y) = -2p_y - 2 \cot \theta + (\alpha^3 v_{xx} + \alpha v_{yy}), \quad (12)$$

$$\alpha Pe (T_t + uT_x + vT_y) = \alpha^2 T_{xx} + T_{yy}, \quad (13)$$

$$y = l(x), \quad u = v = 0, \quad T = x, \quad (14)$$

$$y = f(x, t), \quad f_t + uf_x = v, \quad (15)$$

$$T_y - \alpha^2 T_x f_x = 0, \quad (16)$$

$$(u_y + \alpha^2 v_x) (1 - \alpha^2 f_x^2) - 4\alpha^2 u_x f_x + 2\alpha Ma (f_x T_y + T_x) (1 + \alpha^2 f_x^2)^{1/2} = 0, \quad (17)$$

$$p + \alpha [(u_y + \alpha^2 v_x) f_x - (v_y + \alpha^2 f_x^2 u_x)] \times (1 + \alpha^2 f_x^2)^{-1} + \alpha^2 f_{xx} (We - MaT) \times (1 + \alpha^2 f_x^2)^{-3/2} = 0. \quad (18)$$

### 3 方程近似求解

利用长波摄动, 用  $\alpha$  做小量, 将  $u, v, p, T$  以幂级数展开如下:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \alpha u_1 + \dots, \\ v &= v_0 + \alpha v_1 + \dots, \\ p &= p_0 + \alpha p_1 + \dots, \\ T &= T_0 + \alpha T_1 + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

将 (19) 式代入 (10)–(18) 式, 得零阶方程及边界条件为

$$u_{0x} + v_{0y} = 0, \quad u_{0yy} + 2 = 0, \quad (20)$$

$$p_{0y} + \cot \theta = 0, \quad T_{0yy} = 0,$$

$$y = l(x), \quad u_0 = v_0 = 0, \quad T_0 = x, \quad (21)$$

$$y = f(x, t), \quad f_t + u_0 f_x = v_0,$$

$$T_{0y} = 0,$$

$$u_{0y} + 2\alpha Ma (T_{0x} + T_{0y} f_x) = 0,$$

$$p_0 + \alpha^2 We f_{xx} = 0. \quad (22)$$

求得零阶方程的解为

$$\begin{aligned} u_0 &= -y^2 + l^2 + 2(f - Mn)(y - l), \\ v_0 &= -f_x (y - l)^2 - 2l'(l - f + Mn)(y - l), \\ p_0 &= (f - y) \cot \theta - S f_{xx}, \quad T_0 = x. \end{aligned} \quad (23)$$

将零阶方程的解代入运动边界条件  $f_t + uf_x = v$ , 得

$$f_t + 2(l - f + Mn)(l' - f_x)(f - l) = 0, \quad (24)$$

其中,  $Mn = \alpha Ma$ , 为修正马兰哥尼数,  $S = \alpha^2 We$ , 为修正表面张力参数, (24) 式即为表面波的零阶演化方程, 将  $f(x, t) = h(x, t) + l(x)$  代入 (24) 式得

$$h_t + 2(h - Mn)hh_x = 0. \quad (25)$$

(25) 式与文献 [13] 中所得相同条件下, 平基底液膜表面波零阶演化方程一致, 这是由于零阶方程及其边界条件与摄动展开的小量  $\alpha$  无关, 因而二者关于  $h$  的零阶演化方程无差别.

同理, 可得到一阶方程及边界条件, 进而求得一阶方程的解  $u_1, v_1, p_1, T_1$ . 将所得零阶方程和一阶方程的解代入运动边界条件, 可得液膜表面波的演化方程

$$\begin{aligned} &f_t + 2(l - f + Mn)(l' - f_x)(f - l) \\ &- \frac{2}{3}\alpha [(f_x \cot \theta - S f_{xxx})(f - l)^3]_x \\ &+ \alpha MnPe \left[ \left( \frac{5}{3}l - \frac{5}{3}f + 2Mn \right) (l' - f_x)(f - l)^4 \right]_x \\ &+ \frac{8}{15}\alpha Re [(l - f + Mn)(l' - f_x)(f - l)^5]_x \\ &+ O(\alpha^2) = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

将  $f(x, t) = h(x, t) + l(x)$  代入 (26) 式得

$$\begin{aligned} &h_t + A(h)h_x + \alpha [B(h)h_x + C(h)h_{xxx}]_x \\ &+ \alpha [D(h)(l' \cot \theta - S l''')]_x + O(\alpha^2) = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

式中,

$$A(h) = 2h^2 - 2Mnh,$$

$$B(h) = 2MnPe \left( \frac{5}{6}h - Mn \right) h^4 + \frac{8}{15}Re (h - Mn) h^5 - \frac{2}{3}h^3 \cot \theta,$$

$$C(h) = \frac{2}{3}Sh^3,$$

$$D(h) = -\frac{2}{3}h^3.$$

当忽略基底的非平整性, 即  $l = 0$  时, 令  $\theta = 90^\circ$ , 则方程 (27) 的化简结果与文献 [13] 中所得平整液膜表面波演化方程一致. 将二者进行比较发现, 基底非平整性对液膜流动特性影响较大, 生成与平整基底时不同的表面波形, 并将具有不同的流动稳定性.

#### 4 液膜表面波的演化特性

以正弦波纹基底为研究对象, 当基底温度线性变化, 分析液膜沿倾斜基底流动时表面波的演化特性. 选取计算区域为  $0 < x < 120$ , 利用 PDECOL 程序对方程 (27) 进行数值求解. 首先对网格数进行无关性验证, 网格数为 1000 时相对误差为 1.56%, 网格数为 2000 时相对误差为 0.15%, 满足计算精度要求, 由于网格数为 3000 时只增加计算时间, 对计算精度影响很小, 因此将计算区域划分为 2000 均匀网格. 计算中, 正弦基底函数  $l(x) = \sin(0.2x) + 1$ .

程序中的初始条件为

$$h(x, 0) = 1.5 - \sin(0.2x);$$

程序中的边界条件为

$$h_x(\infty, t) = h_{xxx}(\infty, t) = 0.$$

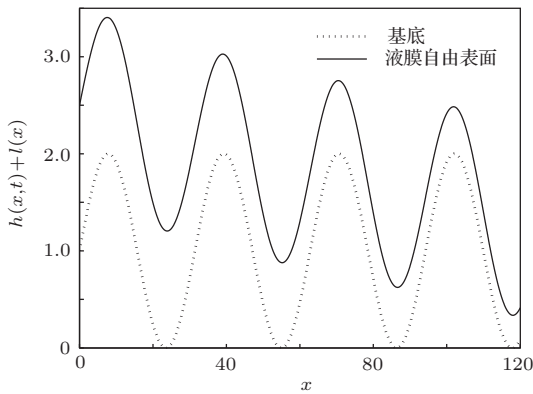


图2 非平整基底上受热液膜表面波的演化过程 ( $\alpha = 0.2$ ,  $Pe = 10$ ,  $Mn = 5$ ,  $Re = 5$ ,  $\theta = 45^\circ$ ,  $We = 638$ )

图2表示非平整基底上受热液膜表面波的演化过程. 由于基底温度沿  $x$  方向线性变化, 随  $x$  的增大, 基底温度逐渐升高, 所产生的温度梯度导致 Marangoni 效应出现. 随基底温度的升高所产生的表面张力梯度, 驱使流体从高温区域流向低温区域. 由图可知, 受正弦波纹基底的影响, 液膜自由表面随同基底作相同频率的正弦型波动, 且液膜厚

度在基底波峰和波谷处变化较大, 波谷处液膜波幅变化较波峰处大, 波动更为剧烈.

此外, 重力驱动下, 流体沿  $x$  正向流动, 相反的温度梯度所产生的 Marangoni 力驱动流体沿  $x$  负向流动, 导致液膜厚度在流动初始位置处最大, 并随  $x$  值增大而逐渐变薄. 若继续增大 Marangoni 数, 则会出现在计算区域的右端, 液膜贴壁流动, 甚至出现流动断裂情况, 这是由于液膜在流过非平整基底时会有能量损失, 加之 Marangoni 力的阻碍作用, 使得流体不能继续往下流动.

#### 4.1 Marangoni 数对液膜表面波演化特性的影响

图3表示不同 Marangoni 数对液膜表面波演化的影响. 由于温度梯度所产生的 Marangoni 力的方向与液膜自由表面相切, 其水平方向上的分量沿  $x$  负方向, 而重力方向为流体流动方向, 因此 Marangoni 力对液体的驱动作用与重力作用相反, 阻碍了流体的流动. Marangoni 数越大, 阻碍作用越强, 流体流动越缓慢, 所以在同一时刻, 相同位置区域内, 在重力和 Marangoni 力的共同作用下, 大 Marangoni 数下流体流量小, 即随 Marangoni 数的增大, 液膜厚度减小.

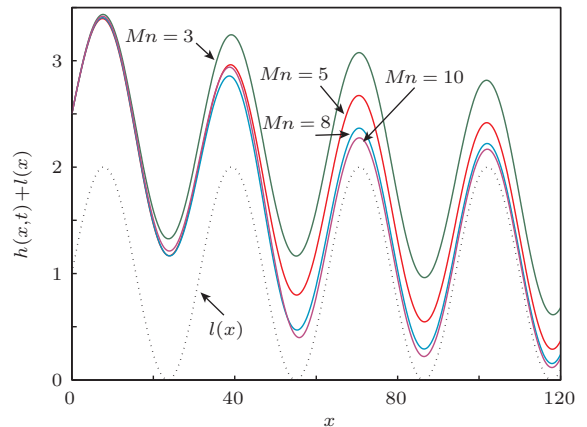


图3 Marangoni 数对液膜表面波演化的影响 ( $\alpha = 0.2$ ,  $Pe = 10$ ,  $Re = 5$ ,  $\theta = 45^\circ$ ,  $We = 638$ )

#### 4.2 Peclet 数对液膜表面波演化特性的影响

Peclet 数 ( $Pe = Re \cdot Pr$ ) 表示流体中对流和扩散的热量、质量之比, Peclet 数增大, 即雷诺数或普朗特数的增大, 雷诺数增大意味着流速增大, 而普朗特数增大则表示流动边界层变厚或温度边界层

变薄, 普朗特数越大, 液膜的流动边界层越厚. 二者的增大均会使相同时刻, 在  $0 < x < 120$  这一区域内的流体总流量增大, 图 4 为雷诺数不变, 普朗特数变化引起 Peclet 数发生变化时, 液膜表面波的演化过程, 液膜在流动方向上, 由于重力和 Marangoni 力的作用, 厚度变小, 在波动方向, 随着 Peclet 数的增大, 流体的流动边界层变厚, 液膜厚度逐渐增大.

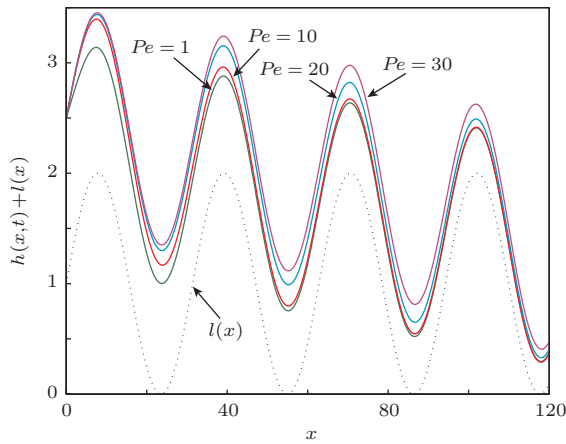


图 4 Peclet 数对液膜表面波演化的影响 ( $\alpha = 0.2$ ,  $Mn = 5$ ,  $Re = 5$ ,  $\theta = 45^\circ$ ,  $We = 638$ )

### 4.3 雷诺数对液膜表面波演化特性的影响

雷诺数增大意味着流速增大, 因而在同一时刻, 相同计算区域内的流体流量随雷诺数的增大而增大, 即随雷诺数的增大, 液膜厚度增大, 如图 5 所示. 与图 4 相比, 雷诺数的变化所引起的表面波波形变化更为明显. 由液膜表面波的演化方程 (27) 可知, 雷诺数的变化除了造成 Peclet 数的变化而改变

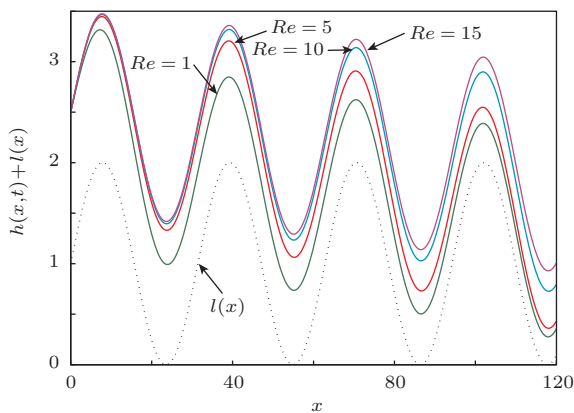


图 5 雷诺数对液膜表面波演化的影响 ( $\alpha = 0.2$ ,  $Mn = 5$ ,  $Pe = 10$ ,  $\theta = 45^\circ$ ,  $We = 638$ )

表面波形之外, 其自身的变化也能使液膜自由界面

的形状发生改变, 所以雷诺数变化对液膜表面波演化的影响大于 Peclet 数单一变化时的影响.

## 5 液膜流动线性稳定性分析

在线性稳定性分析的研究中, 如果初始无穷小扰动在时间和空间上不断增大, 则系统是线性不稳定的. 在本研究中, 假设自由界面处有一个小扰动, 即  $h = 1 + \eta(x, t)$ , 其中  $\eta(x, t)$  表示液膜自由表面偏离平滑层流自由表面的无量纲距离, 将  $h$  带入演化方程 (27), 按线性假设, 保留扰动量的线性项, 略去二次及以上的高阶项, 得

$$\begin{aligned} \eta_t - 2\alpha \left( l'' \cot \theta - Sl^{(4)} \right) \eta + A_1 \eta_x \\ - 2\alpha \left( l' \cot \theta - Sl''' \right) \eta_x + \alpha \left( B_1 \eta_{xx} + C_1 \eta_{xxxx} \right) \\ - \frac{2}{3} \alpha \left( l'' \cot \theta - Sl^{(4)} \right) + O(\alpha^2) = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

式中,  $A_1, B_1, C_1$  分别为  $A(h), B(h), C(h)$  在  $h = 1$  处的泰勒级数展开, 方程 (28) 具有如下形式的行波解:

$$\eta(x, t) = \Gamma \exp [i(x - ct)] + \text{c.c.}, \quad (29)$$

其中,  $\Gamma \ll 1$  为扰动波幅,  $c = c_r + ic_i$  为复数波速,  $c_r$  和  $c_i$  分别为线性波速和线性扰动增长率, c.c. 表示共轭复数. 若线性扰动增长率  $c_i < 0$ , 则流动是稳定的, 反之则流动是不稳定的, 当  $c_i = 0$  时, 流动是中性稳定的. 将 (29) 式代入方程 (28) 的线性化部分, 可得

$$\begin{aligned} c_i = \alpha \left[ B_1 - C_1 + 2 \left( l'' \cot \theta - Sl^{(4)} \right) \right], \\ c_r = A_1 - 2\alpha \left( l' \cot \theta - Sl''' \right). \end{aligned} \quad (30)$$

令  $c_i = 0$ , 可求得临界雷诺数

$$\begin{aligned} Re_c = \left\{ 5S - 15 \left( l'' \cot \theta - Sl^{(4)} \right) \right. \\ \left. - 15MnPe \left( \frac{5}{6} - Mn \right) + 5 \cot \theta \right\} \\ \times \{ 4(1 - Mn) \}^{-1}. \end{aligned} \quad (31)$$

由 (30) 式可知, 当基底函数变化时,  $c_i$  的值也会随之变化, 意味着液膜在不同基底特征下具有不同的流动特性, 为研究基底特征对液膜流动稳定性的影响, 取基底函数  $l(x) = \sin(0.2x) + 1$ , 此时,

$$\begin{aligned} c_i = \alpha \left[ 2MnPe \left( \frac{5}{6} - Mn \right) + \frac{8}{15} Re(1 - Mn) \right. \\ \left. - \frac{2}{3} (\cot \theta + S) \right] \end{aligned}$$

$$- 0.08 (\cot \theta + 0.04S) \sin (0.2x) \Big]. \quad (32)$$

分析(32)式可知, 线性扰动增长率  $c_i$  在正弦波纹基底的波峰和波谷处分别取得极小值和极大值, 即液膜在这两处的流动特征最具代表性, 为简化研究, 突出液膜在非平整基底上的流动特性, 以标准状态下水膜为研究对象, 取正弦波纹基底的波峰及波谷处流动液膜, 进行线性稳定性分析, 研究 Marangoni 数、Peclet 数和倾角  $\theta$  对液膜流动线性稳定性的影响。

### 5.1 Marangoni 数对稳定性的影响

图6表示  $\theta = 45^\circ$ ,  $Pe = 1$  时, Marangoni 数对液膜流动线性稳定性的影响规律, Marangoni 数为负值时, 在 Marangoni 力作用下, 液膜会产生较大的收缩, 导致液膜厚度增大, 自由界面处的波动加剧, 具有较强的不稳定效果. 本文的研究中, Marangoni 数为正值, 能抑制自由界面处波动的不稳定性, 具有稳定液膜流动的效果, 液膜稳定区域随 Marangoni 数的增大而增大. 比较图6(a), (b)

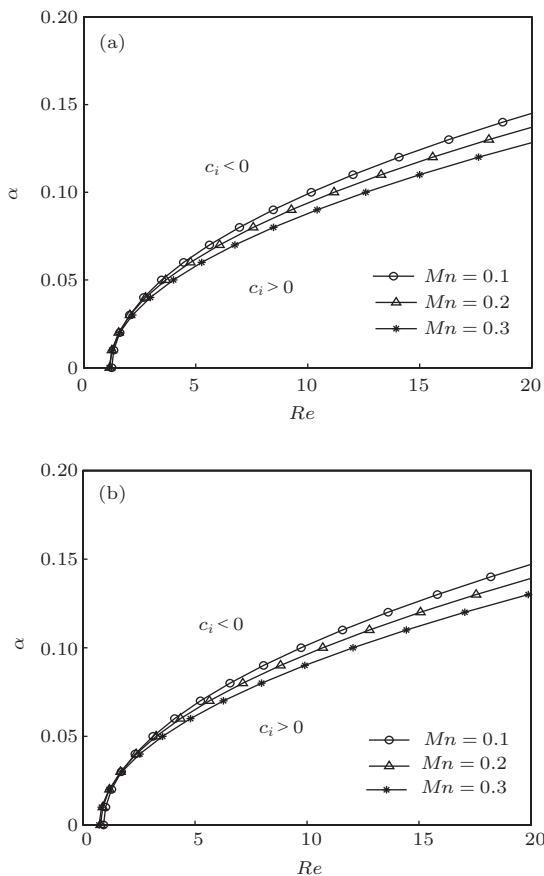


图6 Marangoni 数对稳定性的影响 (a) 基底波峰处; (b) 基底波谷处

可知, 相同条件下, 正弦波纹基底波峰处液膜流动稳定区域较波谷处大, 波谷处液膜流动更易失稳。

### 5.2 Peclet 数对稳定性的影响

在  $\theta = 45^\circ$ ,  $Mn = 0.1$  时, Peclet 数对稳定性的影响如图7所示, 由于 Peclet 数表示流体中对流和扩散热量、质量之比, 所以随 Peclet 数的增大, 液膜流速增大, 扰动的影响增强, 因而其稳定区域逐渐减小, 不稳定区域逐渐增大, 即 Peclet 数为不稳定影响因素. 比较图7(a)和(b), 在正弦波纹基底波峰和波谷处, Peclet 数对稳定性的影响趋势是一致的, 基底特征对稳定性的影响相对 Peclet 数较小, 基底波峰处液膜流动稳定区域较基底波谷处大。

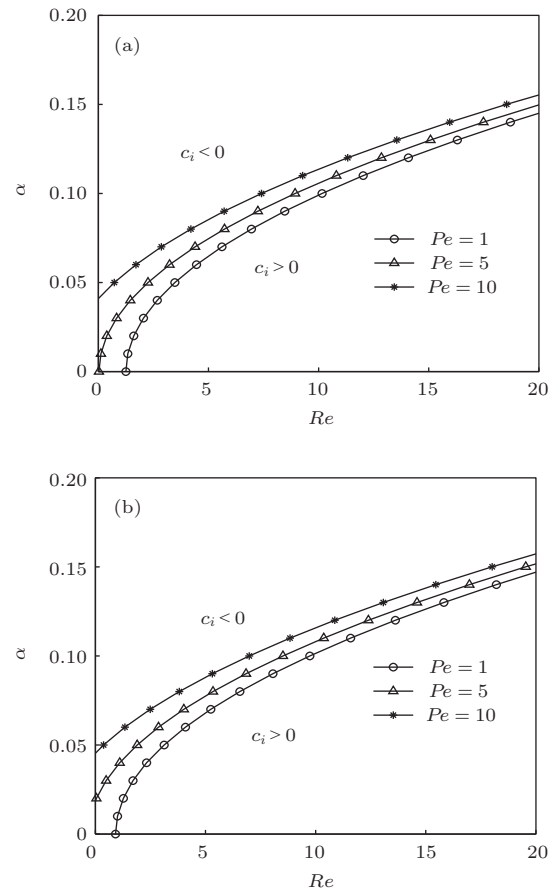


图7 Peclet 数对稳定性的影响 (a) 基底波峰处; (b) 基底波谷处

### 5.3 倾角对稳定性的影响

表面张力和重力均具有抑制初始扰动增长的作用, 为稳定影响因素, 且重力的稳定效果会随斜面倾角的减小而增大. 取  $Pe = 1$ ,  $Mn = 0.2$  时, 研究倾角  $\theta$  对液膜稳定性的影响, 无量纲波数相同时,

初始扰动的影响随斜面倾角的增大而逐渐增强,如图8所示,随倾角的增大,液膜流动逐渐趋于不稳定.当倾角为 $90^\circ$ 时扰动影响最大,液膜失稳最严重,在文献[12]中研究竖直受热平基底液膜流动特性,对比其研究结果可知,在相同条件下, $\theta = 90^\circ$ 时液膜线性稳定区域最小,即倾角 $\theta$ 为不稳定影响因素,与本文的分析结论一致.同样,在其他影响因素相同时,液膜正弦波纹基底波谷处流动更易失稳.

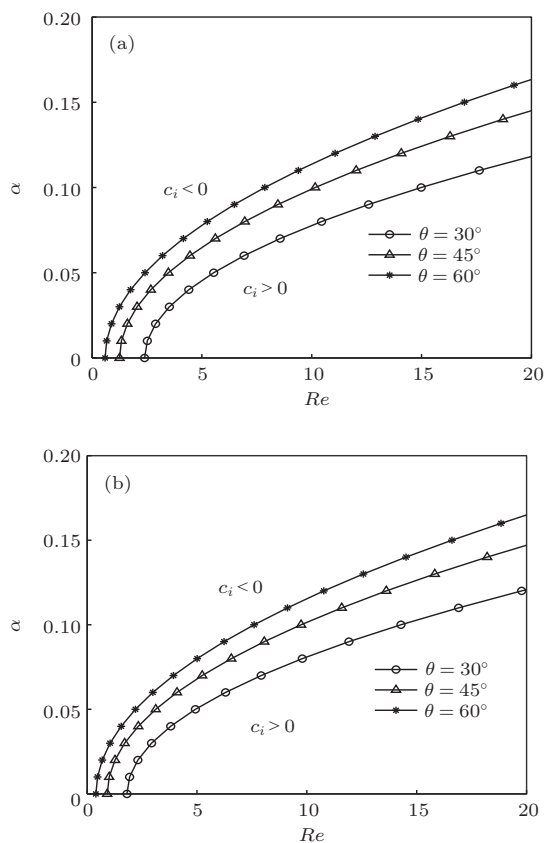


图8 倾角对稳定性的影响 (a) 基底波峰处; (b) 基底波谷处

## 6 结 论

论文针对非平整不均匀加热斜面上流动液膜,利用长波摄动法得到基底温度线性变化时,液膜表面波的非线性演化方程,研究了正弦波纹基底上液膜表面波的演化特性及液膜流动的线性稳定性,并分析了Marangoni数、Peclet数、斜面倾角等无量纲参数对液膜表面波演化过程和线性稳定性的影响特点,得到主要结论如下:

1. 在正弦波纹基底上,液膜自由表面随同基底作相同频率的正弦型波动,且液膜厚度沿流动方

向逐渐变小;液膜厚度随Marangoni数的增大而减小,随Peclet数、雷诺数的增大而增大.

2. Marangoni数为稳定影响因素,随Marangoni数的增大,液膜流动线性稳定区域逐渐增大;而Peclet数和倾角 $\theta$ 均为不稳定影响因素,随Peclet数和倾角 $\theta$ 的增大,液膜流动线性稳定区域逐渐减小,当倾角为 $90^\circ$ 时扰动影响最大,液膜失稳最严重.

3. 在波纹基底波峰和波谷处,Marangoni数、Peclet数和倾角对稳定性的影响趋势都是一致的,且相对于各参数的影响,基底特征对液膜流动稳定性的影响较小;比较基底波谷处和波峰处,在其他影响因素一定时,正弦波纹基底波峰处液膜流动稳定区较基底波谷处大,正弦波纹基底波谷处液膜流动更易失稳.

## 参考文献

- [1] Aziz R C, Hashim I 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 110202
- [2] Guo J H, Dai S Q, Dai Q 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2601 (in Chinese) [郭加宏, 戴世强, 代钦 2010 物理学报 **59** 2601]
- [3] Zhang X J, Huang Y, Guo Y B, Tian Y, Meng Y G 2013 *Chin. Phys. B* **22** 016202
- [4] Wierschem A, Aksel N 2003 *Physica D* **186** 221
- [5] Tatiana G R, Yu H Y, Karsten L 2011 *Heat Transfer Eng.* **32** 705
- [6] Matar O K, Craster R V, Kumar S 2007 *Phys. Rev. E* **76** 056301
- [7] Sisoiev G M, Matar O K, Craster R V 2010 *Chem. Eng. Sci.* **65** 950
- [8] Li C X, Pei J J, Ye X M 2013 *Acta Phys. Sin.* **21** 214704 (in Chinese) [李春曦, 裴建军, 叶学民 2013 物理学报 **21** 214704]
- [9] Laohalertdecha S, Wongwises S 2010 *Int. J. Heat Mass Tran.* **53** 2924
- [10] Li Z, Hu G H, Zhou J J, Zhou Z W 2011 *Acta Mech. Sinica.* **43** 699 (in Chinese) [李振, 胡国辉, 周继杰, 周哲玮 2011 力学学报 **43** 699]
- [11] Zhang F, Zhao X G, Geng J 2006 *J. Nanjin Univ. Tech.* **28** 93 (in Chinese) [张锋, 赵贤广, 耿蛟 2006 南京工业大学学报 **28** 93]
- [12] Shi J S, Zhang Q Z 2010 *Chin. J. Appl. Mech.* **27** 166 (in Chinese) [师晋生, 张巧珍 2010 应用力学学报 **27** 166]
- [13] Samanta A 2008 *Physica D* **237** 2587
- [14] Sadiq M R, Usha R, Joo S W 2010 *Chem. Eng. Sci.* **65** 4443
- [15] Mukhopadhyay A 2011 *Acta Mech.* **216** 225
- [16] Ye X M, Li C X, Yan W P 2011 *Acta Mech. Sin.* **43** 461 (in Chinese) [叶学民, 李春曦, 阎维平 2011 力学学报 **43** 461]

# Stability of heated liquid film on an uneven substrate\*

Liu Mei<sup>†</sup> Wang Song-Ling Wu Zheng-Ren

(School of Energy Power and Mechanical Engineering, North China Electric Power University, Baoding 071003, China)

( Received 20 January 2014; revised manuscript received 7 March 2014 )

## Abstract

This paper studies mainly the evolution and linear stability of the nonlinear surface waves of a two-dimensional viscous liquid film along an uneven inclined non-uniformly heated wall. A long wave perturbation method is used to derive zero- and first-order evolutions equations of the nonlinear surface wave flowing on an uneven substrate. Based on the obtained evolution equations, the diagram of evolution progress for film surface wave on a sinusoidal corrugated substrate is drawn, the linear stability analysis is also studied, and the effect of various parameters on the flow stability of liquid membrane is analysed. Theoretical results demonstrate that the free surface of the film shows sine wave and has the same frequency as the substrate, and the film thickness will decrease gradually along the flow direction. Marangoni number gives a stabilizing effect, the stable zone increases with the increase of Marangoni number. While, Peclet number and the angle  $\theta$  are unstable factors, the stable region decreases with the increase of them. Besides, the trends that Marangoni number, Peclet number and angle  $\theta$  may impact on the stability of the film which are consistent with one another, so a liquid film is easy to destabilize at the trough of the substrate.

**Keywords:** uneven substrate, heated liquid film, nonlinear surface wave, linear stability

**PACS:** 47.15.gm, 47.15.Fe, 47.55.dm, 47.63.mf

**DOI:** [10.7498/aps.63.154702](https://doi.org/10.7498/aps.63.154702)

---

\* Project supported by the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20110036110009).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [liumei\\_w@163.com](mailto:liumei_w@163.com)