

# 耦合势有限体积法高效模拟各向异性地层中海洋可控源的三维电磁响应\*

周建美<sup>1)</sup> 张焯<sup>2)</sup> 汪宏年<sup>1)†</sup> 杨守文<sup>1)</sup> 殷长春<sup>3)</sup>

1) (吉林大学物理学院, 长春 130012)

2) (长春理工大学理学院, 长春 130022)

3) (吉林大学地球探测科学与技术学院, 长春 130026)

(2014年1月8日收到; 2014年4月14日收到修改稿)

本文基于电场矢势与标势分解的耦合势有限体积法研究建立一套各向异性地层中海洋可控源电磁法的三维响应的高效数值模拟技术. 首先引入电场的矢势和标势, 将电场分解为无散场和无旋场之和, Maxwell方程转换为关于矢势与标势的混合 Helmholtz 方程, 克服低感应数问题. 在此基础上, 借助 Yee 氏交错网格和有限体积法以及非均质单元中等效电导率公式, 建立混合 Helmholtz 方程的离散方程. 并采用直接法求解器 PARDISO 求解离散方程, 有效保证在大的求解空间中仍然能够获得电磁场稳定可靠的数值解. 此外, 在数值模拟中利用差异场技术, 克服源的奇异性问题, 尽可能提高近场的计算精度. 与解析解的对比证明了该算法的有效性. 数值模拟结果表明, 海洋可控源电磁法沿测线方向的电场, 对油气藏的纵向电阻率敏感, 对横向电阻率不敏感; 对油气藏上方的覆盖层的纵向电阻率和横向电阻率都敏感.

**关键词:** 海洋可控源电磁法, 各向异性, 有限体积法, 直接法

**PACS:** 91.25.Qi, 02.30.Zz, 41.20.-q

**DOI:** 10.7498/aps.63.159101

## 1 引言

由于海洋可控源电磁法 (CSEM) 具有提供地层电阻率空间分布的信息能力, 在油气层识别和海上油气储层定量评价以及降低海上钻探风险方面发挥着重要作用<sup>[1]</sup>, 已发展成为海上油气勘探中的一种重要方法. 典型的三维 CSEM 设备包括随船拖拽移动的低频 (0.1—10 Hz) 水平电偶极天线以及布设于海底表面、测量电磁场多个分量 (水平电场以及三分量磁场) 的接收机阵列<sup>[2]</sup>. 由于海底地形构造复杂以及地层横向电阻率分布不均匀, 在海洋电磁勘探的设计以及海洋电磁资料处理和解释过程中, 均需要进行大量的数值模拟, 因此近十多年来, 海洋可控源电磁响应的数值模拟技术得到了

快速发展, 一维水平层状各向同性<sup>[3-5]</sup>和各向异性<sup>[6-13]</sup>地层中电磁响应的解析法以及参数化迭代反演<sup>[14,15]</sup>、非均质各向同性和各向异性地层中三维有限元法<sup>[16]</sup>、三维有限差分法<sup>[17,18]</sup>、三维积分方程法<sup>[19]</sup>以及 2.5 维混合法<sup>[20]</sup>等数值模拟技术均得到广泛研究与应用.

在所有的数值模拟算法中, 一维水平层状各向同性和各向异性地层中电磁响应的解析法, 由于能够给出频率-波数域中电磁场并矢 Green 函数的解析解, 且计算效率和精度往往较高, 已经成为检验其他数值模拟方法 (例如有限元、有限差分等) 的重要工具, 也是进行可控源电磁三维积分方程法数值模拟中背景场<sup>[19]</sup>以及一维多参数反演中 Fréchet 导数<sup>[14]</sup>等计算的重要方法, 其明显不足是无法给出三维散射体上可控源电磁响应. 积分方程法只

\* 国家高技术研究发展计划 (批准号: 2012AA09A20103) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: wanghn@jlu.edu.cn

需要对异常区域进行离散, 因此能够快速准确地模拟简单规则的局部散射体上的可控源电磁响应, 当存在多个散射体或散射体分布范围较大时, 积分方程法的计算效率和精度均面临一系列挑战<sup>[19]</sup>. 因此, 有限元法、有限差分法以及有限体积法已成为复杂3D模型上可控源电磁响应数值模拟的主要方法<sup>[21]</sup>. 这三种方法的共同特点是直接从Maxwell方程出发, 分别利用变分原理、Yee氏交错网格<sup>[22]</sup>节点上的有限差分以及Yee氏交错网格节点上的有限体积积分三种不同方式对其进行离散处理, 最后得到一个大型的稀疏代数方程, 借助于各种迭代法(例如稳定双共轭梯度法(BICGSTAB)<sup>[17]</sup>等)或直接法(例如MUMPS<sup>[23]</sup>或PARDISO<sup>[24]</sup>)来确定方程的数值解. 从理论上说, 有限元法能够根据地层边界形状进行网格剖分, 保证每个剖分单元均为均匀介质, 并通过连续的基函数逼近各个单元内的电磁场, 实现高精度数值模拟, 但在复杂地层界面条件下网格剖分和方程离散过程往往十分复杂, 给有限元法的实际应用带来不少困难. Yee氏交错网格节点上有限差分方法的基本过程是在Yee氏交错网格节点上利用中心差分方法直接对Maxwell方程进行离散, 这种离散方法的最大特点是能够保持电磁场方程的守恒关系, 较好地保证了均匀介质中电磁场方程的离散精度, 其主要不足是在层界面附近, 由于电导率的不连续引起的电磁场法向分量的不连续, 使得离散误差变大. 为克服有限元法中网格剖分的困难以及在有限差分法中层界面附近电磁场的不连续对方程离散的影响, 基于Yee氏交错网格节点的有限体积法在电磁场数值模拟中得到了较广泛应用. 有限体积法的主要特点是对Maxwell方程在各个单元上的积分进行离散处理, 从而有效降低了Maxwell方程的微分阶数, 同时也减少了地层电导率不连续对离散结果的影响.

此外, 海洋可控源电磁的工作频率非常低(0.1—10 Hz), 在电阻率大反差地层中会遇到低感应数(LIN)问题<sup>[17]</sup>, 导致离散方程的收敛速度下降、效率降低等问题. 为此, 利用电场的矢势和标势, 将电场分解为无散场和无旋场之和<sup>[17]</sup>, 可有效克服低感应数问题. 在海洋可控源电磁响应数值模拟中遭遇的另一个困难是需要准确计算源距变化范围在 $\pm 20$  km(大于20倍趋肤深度)内的电磁场, 即需要同时准确计算出电磁场的近场和远场空间

分布. 由于在大空间范围内, 电磁场的近场和远场的振幅相差很大(10个数量级以上), 同时由于空气层(电导率取为 $10^{10}$   $\Omega\cdot\text{m}$ )的存在使得模型存在大反差的电导率分布, 导致离散化方程的条件数非常大<sup>[23]</sup>, 这给海洋可控源电磁响应的准确计算带来了新的难题, 直接法由于其对于矩阵的条件数不敏感, 矩阵求解稳定, 广泛应用于海洋可控源电磁响应的数值模拟<sup>[21,23,24]</sup>.

在近场区域, 源的奇异性导致源附近电磁场变化剧烈, 存在较大的离散误差. 对于各向同性地层, 一般采用一次场/二次场方法<sup>[23,24]</sup>, 利用等效源来克服源的奇异性问题. 但对于各向异性地层, 选择合适的一次场模型依然是一个开放的课题<sup>[25]</sup>. Kong在处理各向异性地层中CSEM的2D有限元模拟中, 提出差异场方法来解决源的奇异性问题<sup>[26]</sup>. 不同于一次场/二次场方法需要给出全空间离散节点上的1D正演响应, 该方法进行两次2D有限元正演来消除源附近的离散误差, 对于散射体和发射源存在一定距离(对于海洋CSEM, 大于200 m)的模型的模拟非常有效. 其主要过程为, 首先计算没有散射体情况的数值解 $E_{\text{background}}$ , 以及存在散射体情况的数值解 $E_{\text{total}}$ , 得到散射体导致的差异场 $E_{\text{difference}} = E_{\text{total}} - E_{\text{background}}$ , 并且认为源的奇异性导致的离散误差主要是计算 $E_{\text{background}}$ (而不是 $E_{\text{difference}}$ )引起的, 所以采用没有散射体情况的一维解析解 $E_{\text{analytic}}$ 代替 $E_{\text{background}}$ , 得到新的散射体情况的三维数值解 $E_{\text{new\_total}} = E_{\text{difference}} + E_{\text{analytic}}$ , 就可以有效的消除源附近的离散误差.

本文将从Maxwell方程出发, 通过引入电场的矢势和标势, 将电场分解为无散场和无旋场之和, 转化为一个关于矢势和标势的混合Helmholtz方程定解问题, 降低低感应数影响. 在此基础上, 借助Yee氏交错网格节点和有限体积法对旋度和散度算子进行离散处理, 得到混合Helmholtz方程的离散方程. 为保证大范围电磁场分布的稳定精确的求解, 采用直接法求解离散方程. 此外, 为了在不明显降低计算效率的情况下尽可能提高近场的计算精度, 采用差异场方法处理各向异性地层3D模拟过程中的源奇异性问题. 通过与解析解的对比, 检验该算法的有效性, 并进一步考察各向异性对海洋CSEM的3D响应的影响.

## 2 基于耦合势的三维有限体积法

### 2.1 控制方程

设电磁场随时间变化关系为  $e^{i\omega t}$ , 非均匀各向异性介质中电流源的海洋 CSEM 三维模拟对应的 Maxwell 方程为<sup>[17]</sup>

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu_0\mathbf{H}, \quad (1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \bar{\sigma}^*\mathbf{E} + \mathbf{J}, \quad (1b)$$

其中,  $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z) = I\mathbf{L}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)$  为电偶极源,  $I\mathbf{L} = (I l_x, I l_y, I l_z)$  为偶极矩,  $\mathbf{r}_s = (x_s, y_s, z_s)$  为发射源位置,  $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  为发射源频率,  $\mu_0$  为真空磁导率,  $\varepsilon$  为介电常数,  $\bar{\sigma}^*$  是直角坐标系下的电导率复张量, 对于海洋 CSEM, 目前仍然以横向同性这种最简单的各向异性地层为主<sup>[24]</sup>, 这时的电导率可用简单的对角张量  $\bar{\sigma}^* = \bar{\sigma} + i\omega\varepsilon\bar{\mathbf{I}} = \text{diag}(\sigma_h^*, \sigma_h^*, \sigma_v^*)$  描述,  $\bar{\mathbf{I}}$  为单位张量矩阵. 将 (1a) 式代入到 (1b) 式, 消去  $\mathbf{H}$ , 得到关于  $\mathbf{E}$  的 Helmholtz 方程

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + i\omega\mu_0\bar{\sigma}^*\mathbf{E} = -i\omega\mu_0\mathbf{J}. \quad (2)$$

为降低低感应数对方程 (2) 的数值结果的影响, 引入电场的矢势  $\mathbf{A}$  和标势  $\varphi$ , 其中  $\mathbf{A}$  满足库仑规范条件  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , 利用 Helmholtz 分解, 电场  $\mathbf{E}$  表示为

$$\mathbf{E} = \mathbf{A} + \nabla\varphi, \quad (3)$$

代入到方程 (1a), 则磁场表示为  $\mathbf{H} = i\nabla \times \mathbf{A}/\omega\mu_0$ . 将方程 (3) 代入 (2) 式中, 并利用  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = -\nabla^2\mathbf{A}$  及恒等式  $\nabla \times \nabla\varphi = 0$ , 得到关于矢势  $\mathbf{A}$  和标势  $\varphi$  的方程

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_x - i\omega\mu_0 \left[ \sigma_h^* \left( A_x + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) \right] \\ = i\omega\mu_0 J_x, \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_y - i\omega\mu_0 \left[ \sigma_h^* \left( A_y + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) \right] \\ = i\omega\mu_0 J_y, \end{aligned} \quad (4b)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_z - i\omega\mu_0 \left[ \sigma_v^* \left( A_z + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) \right] \\ = i\omega\mu_0 J_z, \end{aligned} \quad (4c)$$

$$\nabla \cdot \bar{\sigma}^*(\mathbf{A} + \nabla\varphi) = -\nabla \cdot \mathbf{J}. \quad (4d)$$

由于电磁场的趋肤效应, 地层中的电磁场呈指数衰减, 如果选择足够大的计算区域  $\Omega$ , 则在在区域外边界  $\partial\Omega$  上的电磁场将非常小, 因此可以采用简单的截断边界条件  $\mathbf{n} \times \mathbf{E}|_{\partial\Omega} = 0, \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}|_{\partial\Omega} = 0$  (其中  $\mathbf{n}$  为边界  $\partial\Omega$  的单位法向量), 其对应的矢势与标势的边界条件可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{A}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}|_{\partial\Omega} = 0, \\ \varphi|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

### 2.2 控制方程的离散

为了求解 (3) 在边界条件 (4) 下的数值解, 首先将求解区域  $\Omega$  剖分成一系列的整数单元<sup>[16]</sup>:

$$\begin{aligned} V_{ijk} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}] \\ \times [z_{k-1/2}, z_{k+1/2}]; \end{aligned}$$

$$|V_{ijk}| = h_i^x \times h_j^y \times h_k^z,$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, N_x - 1;$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, N_y - 1;$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, N_z - 1),$$

其中,  $h_i^x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ ,  $h_j^y = y_{j+1/2} - y_{j-1/2}$  和  $h_k^z = z_{k+1/2} - z_{k-1/2}$  分别是整数单元  $V_{ijk}$  在  $x, y$  和  $z$  方向上的边长, 单元的中心位置为  $(x_i, y_j, z_k)$ . 进一步利用基于耦合势的 Yee 氏交错网格格式, 在每个体积元  $V_{i,j,k}$  的六个面几何中心位置分别定义离散的矢势分量  $A_{i+1/2,j,k}^x, A_{i,j+1/2,k}^y$  和  $A_{i,j,k+1/2}^z$ , 同时在单元  $V_{i,j,k}$  的体中心定义离散的标势  $\varphi_{i,j,k}$ , 并且假定单元  $V_{i,j,k}$  内部电导率  $\sigma_{i,j,k}$  为常数, 如图 1 所示.

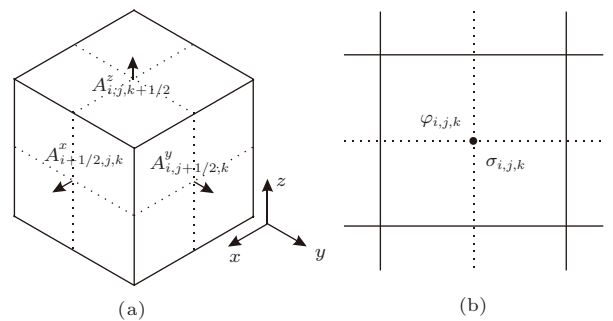


图 1 离散化的矢势标势在交错网格上的分布 (a) 控制体积单元  $V_{i,j,k}$ ; (b)  $V_{i,j,k}$  的剖面图

因为控制方程 (4b) 和 (4c) 的离散过程与 (4a) 类似, 为简洁起见, 这里仅给出 (4a) 式的离散过程和离散结果. 为描述方便, 进一步引入  $x$  方向的半

整数网格的间距为

$$h_{i+1/2}^x = x_{i+1} - x_i, \quad (i = 0, 1, \dots, N_x - 1) \quad (6a)$$

以及对应的半整数体积单元

$$V_{i+1/2,j,k} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}] \times [z_{k-1/2}, z_{k+1/2}], \quad (6b)$$

其中  $i = 0, 1, 2, \dots, N_x - 1, j = 1, 2, 3, \dots, N_y - 1, k = 1, 2, 3, \dots, N_z - 1$ , 体积元的个数为  $N_x \times (N_y - 1) \times (N_z - 1)$ .

利用控制方程 (4a) 在  $V_{i+1/2,j,k}$  上的体积平均

$$\frac{1}{|V_{i+1/2,j,k}|} \int_{V_{i+1/2,j,k}} \left\{ \nabla^2 A_x - i\omega\mu_0\sigma_h^* \left( A_x + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) \right\} dV = \frac{i\omega\mu_0}{|V_{i+1/2,j,k}|} \int_{V_{i+1/2,j,k}} J_x dV. \quad (7)$$

并进一步采用高斯散度定理, (7) 式左边的第一个体积分可转化为如下的面积分:

$$\frac{1}{|V_{i+1/2,j,k}|} \int_{V_{i+1/2,j,k}} \nabla^2 A_x dV = \frac{1}{|V_{i+1/2,j,k}|} \int_{\partial V_{i+1/2,j,k}} \nabla A_x \cdot \hat{n} dS. \quad (8)$$

利用体积元上六个面的中值积分公式和一阶差分公式, (8) 式对应的离散公式为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|V_{i+1/2,j,k}|} \int_{V_{i+1/2,j,k}} \nabla^2 A_x dV \\ &= \frac{A_{i+3/2,j,k}^x - A_{i+1/2,j,k}^x}{h_{i+1}^x h_{i+1/2}^x} - \frac{A_{i+1/2,j,k}^x - A_{i-1/2,j,k}^x}{h_i^x h_{i-1/2}^x} \\ &+ \frac{A_{i+1/2,j+1,k}^x - A_{i+1/2,j,k}^x}{h_j^y h_{j+1/2}^y} - \frac{A_{i+1/2,j,k}^x - A_{i+1/2,j-1,k}^x}{h_j^y h_{j-1/2}^y} \\ &+ \frac{A_{i+1/2,j,k+1}^x - A_{i+1/2,j,k}^x}{h_k^z h_{k+1/2}^z} - \frac{A_{i+1/2,j,k}^x - A_{i+1/2,j,k-1}^x}{h_k^z h_{k-1/2}^z}. \end{aligned} \quad (9)$$

对 (7) 式等式左边第二项的体积分, 可直接离散为

$$\frac{1}{|V_{i+1/2,j,k}|} \int_{V_{i+1/2,j,k}} \left[ i\omega\mu_0\sigma_h^* \left( A_x + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) \right] dV$$

$$= i\omega\mu_0 \langle \sigma_h^* \rangle_{i+1/2,j,k} \times \left[ A_{i+1/2,j,k}^x + \frac{\varphi_{i+1,j,k} - \varphi_{i,j,k}}{h_{i+1/2}^x} \right], \quad (10)$$

其中  $\langle \sigma_h^* \rangle_{i+1/2,j,k}$  是两体积元  $V_{i,j,k}$  和  $V_{i+1,j,k}$  上的平均电导率, 该电导率用相邻体积元等效电导率的调和平均值确定 [15]:

$$\langle \sigma_h^* \rangle_{i+1/2,j,k} = h_{i+1/2,j,k}^x \times \left[ \frac{h_{i+1}^x}{2\sigma_h^*(i+1,j,k)} + \frac{h_i^x}{2\sigma_h^*(i,j,k)} \right]^{-1}. \quad (11)$$

对 (7) 式等式右边的源项, 利用  $\delta$  函数的积分性质, 离散为

$$\frac{i\omega\mu_0}{|V_{i+1/2,j,k}|} \int_{V_{i+1/2,j,k}} J_x dV = \frac{i\omega\mu_0 J_x(i+1/2,j,k)}{h_{i+1/2}^x h_j^y h_k^z}, \quad (12)$$

其中,

$$J_x(i+1/2,j,k) = Il_x \delta_{i,i_s} \delta_{j,j_s} \delta_{k,k_s}, \quad (13)$$

且  $i_s, j_s$  和  $k_s$  满足条件:

$$\begin{aligned} |x_{i_s+1/2} - x_s| &= \min_{0 < i < N_x} |x_{i+1/2} - x_s|, \\ |y_{j_s} - y_s| &= \min_{0 < j < N_y} |y_j - y_s| \end{aligned}$$

和

$$|z_{k_s} - z_s| = \min_{0 < k < N_z} |z_k - z_s|.$$

在网格边界处, 采用截断边界条件 (5), 即  $A_{i+1/2,j,k}^x = 0 (i = 0, N_x; j = 1, N_y; k = 1, N_z)$ ,  $\varphi_{i,j,k} = 0 (i = 1, N_x; j = 1, N_y; k = 1, N_z)$ , 结合 (9)–(12) 式就能得到 (4a) 式的离散结果.

为对 (4d) 式进行离散, 利用其在  $V_{i,j,k}$  上体积平均

$$\frac{1}{|V_{i,j,k}|} \int_{V_{i,j,k}} [\nabla \cdot \bar{\sigma}^*(\mathbf{A} + \nabla\varphi)] dV = \frac{1}{|V_{i,j,k}|} \int_{V_{i,j,k}} (-\nabla \cdot \mathbf{J}) dV. \quad (14)$$

根据高斯定理, (14) 式左边可表示为

$$\begin{aligned} & \frac{M_{i+1/2,j,k}^x - M_{i-1/2,j,k}^x}{h_i^x} \\ &+ \frac{M_{i,j+1/2,k}^y - M_{i,j-1/2,k}^y}{h_j^y} \\ &+ \frac{M_{i,j,k+1/2}^z - M_{i,j,k-1/2}^z}{h_k^z}, \end{aligned} \quad (15)$$



其中  $M_{i\pm 1/2,j,k}^x$ ,  $M_{i,j\pm 1/2,k}^y$ ,  $M_{i,j,k\pm 1/2}^z$  为控制体积  $V_{i,j,k}$  六个面上的离散电流密度矢量, 其表达式为

$$\begin{aligned} M_{i\pm 1/2,j,k}^x &= \left\langle \sigma_h^* \left( A_x + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right\rangle_{i\pm 1/2,j,k}, \\ M_{i,j\pm 1/2,k}^y &= \left\langle \sigma_h^* \left( A_y + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right\rangle_{i,j\pm 1/2,k}, \\ M_{i,j,k\pm 1/2}^z &= \left\langle \sigma_v^* \left( A_z + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right\rangle_{i,j,k\pm 1/2}. \end{aligned} \quad (16)$$

(16) 式的右端可通过中心差分进行离散.

此外, 利用  $\delta$  函数的积分性质以及高斯定理,

(14) 式的右边可离散为

$$\begin{aligned} & \frac{-1}{h_i^x h_j^y h_k^z} \left( \frac{J_x(i+1/2, j, k) - J_x(i-1/2, j, k)}{h_i^x} \right. \\ & + \frac{J_y(i, j+1/2, k) - J_y(i, j-1/2, k)}{h_j^y} \\ & \left. + \frac{J_z(i, j, k+1/2) - J_z(i, j, k-1/2)}{h_k^z} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

其中,  $J_x(i\pm 1/2, j, k)$ ,  $J_y(i, j\pm 1/2, k)$  和  $J_z(i, j, k\pm 1/2)$  具有与 (13) 式类似的表达式. 至此, 完成了整个控制方程的离散.

### 2.3 控制方程的求解

对离散结果进行整理, 得到关于矢势  $\mathbf{A}$  和标势  $\varphi$  的方程组

$$\bar{\mathbf{F}}\mathbf{X} = \mathbf{b}, \quad (18)$$

其中系数矩阵  $\bar{\mathbf{F}}$  为大型非对称的稀疏复矩阵, 未知数  $\mathbf{X}$  为离散网格上的矢势  $A_{i\pm 1/2,j,k}^x$ ,  $A_{i,j\pm 1/2,k}^y$ ,  $A_{i,j,k\pm 1/2}^z$  和标势  $\varphi_{i,j,k}$ , 未知数个数  $N = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$ , 其中

$$m_1 = N_x \cdot (N_y - 1) \cdot (N_z - 1),$$

$$m_2 = (N_x - 1) \cdot N_y \cdot (N_z - 1)$$

和

$$m_3 = (N_x - 1) \cdot (N_y - 1) \cdot N_z$$

分别是未知量  $A_{i\pm 1/2,j,k}^x$ ,  $A_{i,j\pm 1/2,k}^y$  和  $A_{i,j,k\pm 1/2}^z$  的个数,  $m_4 = (N_x - 1) \cdot (N_y - 1) \cdot (N_z - 1)$  是未知量标势  $\varphi_{i,j,k}$  的个数, 右端项  $\mathbf{b}$  为离散的源项.

求解该方程的方法主要有迭代法和直接法两种. 迭代法因其占用内存小, 计算速度快而得到广泛的应用 [16,17,21,25], 但是迭代法对于矩阵的条件数非常敏感, 对于不同的物理问题, 往往需要设计

不同的预处理来加快迭代的收敛, 另外对于多发射源问题, 迭代法的计算时间随着发射源的个数呈线性倍数增长. 而直接法 [23,24] 对于矩阵的条件数不敏感, 矩阵求解非常稳定; 并且对于多发射源的正演, 采用选定的计算区域, 如果所有的发射源均距离该计算区域的边界足够远, 即该计算区域对所有的发射源均满足截断边界条件, 那么可以对该计算区域采用固定的网格剖分, 多个发射源对应的控制方程的系数矩阵保持不变, 仅仅改变控制方程右端的源项, 由于直接法一般是基于系数矩阵的直接 LU 分解和求逆, 因此, 采用直接法, 相比单个发射源的正演, 多发射源的正演几乎不增加额外的计算时间, 并且其计算精度与单个发射源的计算精度相同. 但由于系数矩阵较大, 直接法需要占用大量的内存和较长的计算时间.

海洋 CSEM 的三维正演, 是典型的多发射源问题. 另外, 海洋 CSEM 数值模拟中的一个困难是需要准确计算源距变化范围在  $\pm 20$  km (大于 20 倍趋肤深度) 内的电磁场, 即需要同时准确计算出电磁场的近场和远场空间分布. 由于在大空间范围内, 电磁场的近场和远场的振幅相差很大 (10 个数量级以上), 同时由于空气层 (电导率取为  $10^{10} \Omega \cdot \text{m}$ ) 的存在使得模型存在大反差的电导率分布, 导致离散化方程的条件数非常大 [23], 常见的迭代方法 (比如基于 ILU 预处理的 BICGSTAB 算法 [16,21]) 很难给出有效的迭代结果. 因此, 为了能够快速精确的模拟海洋 CSEM 响应, 本文采用直接法求解器 PARDISO [27,28] 求解方程 (18).

PARDISO 是一款高性能, 功能强大, 高效使用内存和易于操作的求解器, 采用共享内存多处理器来求解大型稀疏的对称或非对称线性方程组, 结合高性能库 BLAS 和基于超级节点技术的管线并行技术来提高串行和并行稀疏数值分解的性能, 平行旋转方法允许完整的超级节点旋转, 以便在分解过程中平衡数值稳定性和可扩展性. 采用 PARDISO 求解方程 (18) 的主要过程包括: 1) 矩阵重排与符号分解. 利用行列交换矩阵  $\mathbf{P}$  与对角矩阵  $\mathbf{D}$ , 对系数矩阵  $\bar{\mathbf{F}}$  进行交换重排, 减少矩阵  $\mathbf{PD}\bar{\mathbf{F}}\mathbf{D}^T\mathbf{P}^T$  分解的非零元素填充, 有效的减少矩阵分解后的存储和计算复杂度. 2) 对矩阵  $\mathbf{PD}\bar{\mathbf{F}}\mathbf{D}^T\mathbf{P}^T$  进行 LU 分解. 3) 根据 LU 分解的结果求解方程, 如果对结果的精度有进一步要求, 使用迭代法进一步提高解精度.

### 3 算法验证与各向异性分析

本节首先通过与解析法的模型计算结果进行对比, 验证有限体积算法的有效性; 然后分析油气藏各向异性和油气藏上方的覆盖层的各向异性对接收数据的影响. 在数值模拟中, 考虑空气层的影响, 其电阻率设定为  $\rho_{\text{air}} = 10^{10} \Omega \cdot \text{m}$ .  $x, y, z$  方向的计算区域均为  $\pm 36 \text{ km}$ , 采用对数网格, 网格数为  $50 \times 50 \times 40$ . 利用 PARDISO 求解器, 采用并行模式, 在个人电脑 (3.50-GHz inter i7 4核处理器) 上, 一次模拟的运行时间约为 610 s, 占用内存 19.3G.

#### 3.1 算法验证

为了比较迭代法与直接法用于海洋 CSEM 三维数值模拟的计算效果, 验证差异场方法的有效性, 采用 1D 层状各向异性模型, 利用直接法求解器 PARDISO 和基于 ILU<sub>t</sub> 的 BICGSTAB 迭代算法求解相同的控制方程, 得到结果与解析解方法 [6] 进行对比. 模型参数如图 2 所示, 发射源为  $x$  方向的水平电偶极子, 电偶极距为  $1 \text{ A} \cdot \text{m}$ , 距海底表面 100 m, 发射频率为 1.0 Hz, 油气层上方的覆盖层存在各向异性.

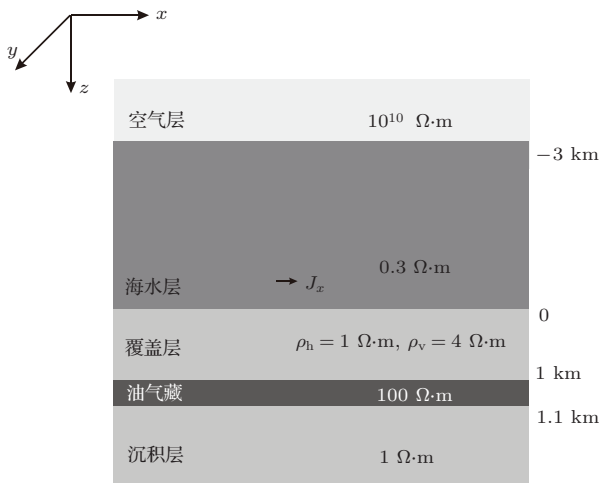


图2 1D模型

图 3 给出了相同的对数网格划分的迭代法和直接法的数值模拟的结果, 最小网格为 0.1 倍趋肤深度. 图 3(a) 和 (b) 为沿测线方向的电场  $E_x$  的振幅和相位, 其中黑色粗实线为解析解, 灰色粗实线为直接法 PARDISO 求得的数值解 (未进行差异场处理), 黑色细实线为基于 ILU<sub>t</sub> 预处理的

BICGSTAB 的数值解. 图 3(c) 为基于 ILU<sub>t</sub> 预处理的 BICGSTAB 算法的迭代残差随迭代次数的变化关系. 从图中可知, 对于计算区域大于 20 倍趋肤深度, 低频, 存在电导率大反差的模型, 迭代算法的残差在迭代 400 次后, 基本不再下降, 不能迭代到有效的残差阈值 (一般为  $10^{-8}$ ), 得不到有效的计算结果 (如图 3(a), (b) 中黑色细实线). 采用直接法, 则能够得到比较精确的计算结果 (如图 3(a), (b) 中灰色粗实线).

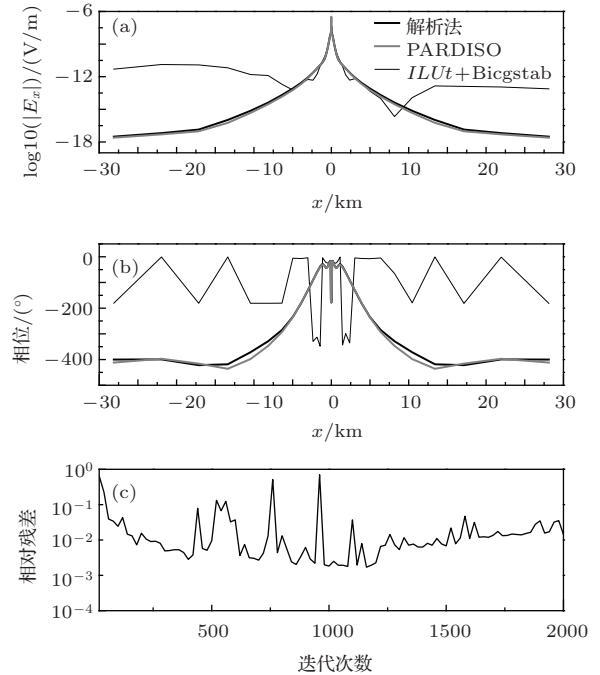


图3 1D模型的海洋 CSEM 的测线 (inline) 方向的电场响应 (a) 振幅; (b) 相位; (c) 基于 ILU<sub>t</sub> 的 BICGSTAB 求解的残差随迭代次数的变化

进一步采用差异场方法, 去除源附近的误差. 沿测线方向的电场  $E_x$  的振幅和相位如图 4(a), (b) 所示. 其中黑色细实线为解析解, 灰色粗实线为有限体积解, 黑色点线为有限体积法采用差异场方法处理后的数值解. 图 4(c) 和 (d) 为直接计算的有限体积解与采用差异场方法处理后的振幅和相位的相对误差对比. 从图中可知, 直接采用有限体积法, 在远离源的区域, 其计算结果与解析解重合得很好, 在源附近则存在着较大的误差. 而采用差异场处理后得到的数值结果, 不仅有效的消除了源附近的误差, 而且也进一步的减小了整体区域的误差, 其振幅与解析解的相对误差小于 2%, 相位与解析解的相对误差小于 5%. 这说明结合差异场处理方法的有限体积法, 能够得到非常精确的计算结果.

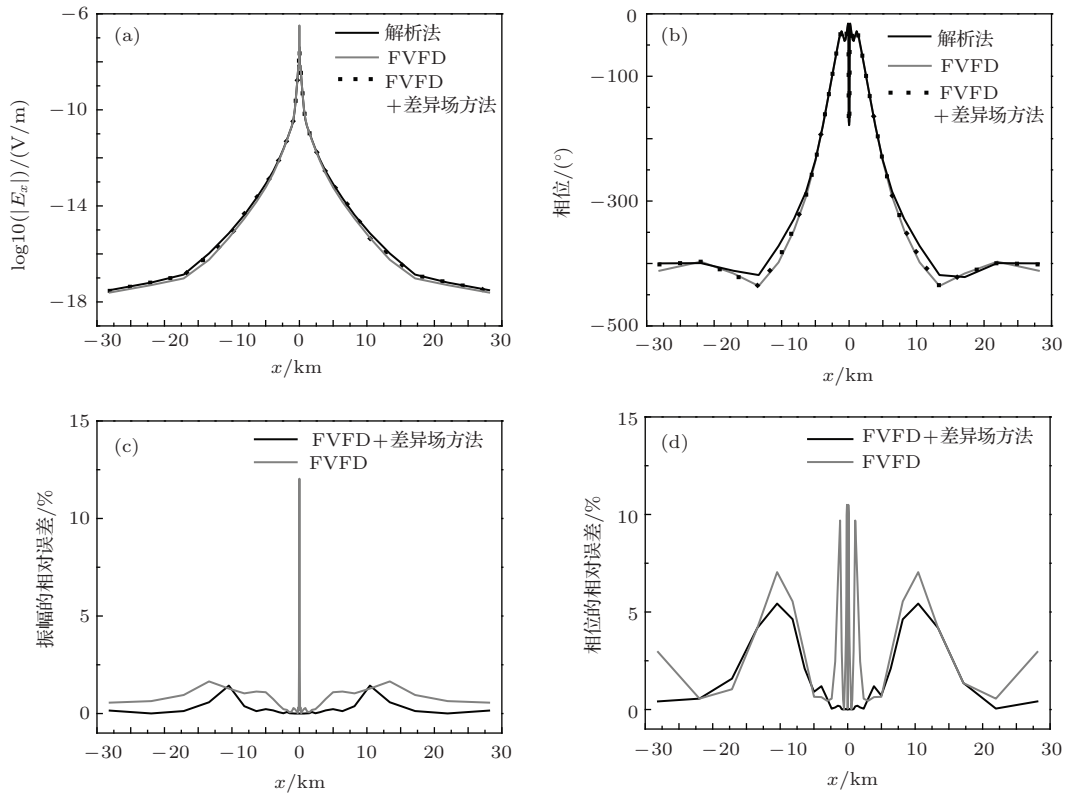


图4 1D模型的海底CSEM的inline方向的电场响应 (a) 振幅; (b) 相位; (c) 和 (d) 分别为有限体积解与采用差异场方法处理后的振幅和相位的相对误差

### 3.2 各向异性的影响

考虑如图5所示的三维储层模型, 发射源为  $x$  方向的水平电偶极子, 电偶极距为1 A·m, 距海底表面100 m, 发射频率为0.25 Hz, 油气藏为高阻薄层圆盘状异常体, 厚度为100 m, 圆盘半径为2500 m. 接收机位于海底表面, 沿 inline 方向接收.

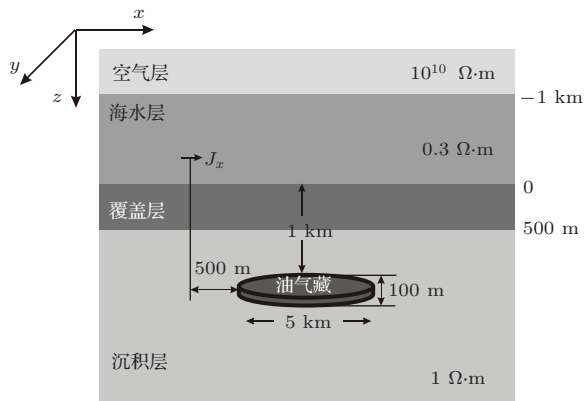


图5 3D模型

首先考虑油气藏各向异性对沿测线方向的电场  $E_x$  的影响. 沿测线方向的电场  $E_x$  的振幅, 相位

和归一化振幅如图6(a), (b)和(c)所示, 归一化振幅为存在油气藏时的电场振幅与不存在油气藏时的电场振幅之比. 其中灰色实线为不存在油气藏时的电场响应, 黑色实线为各向同性油气藏的电场响

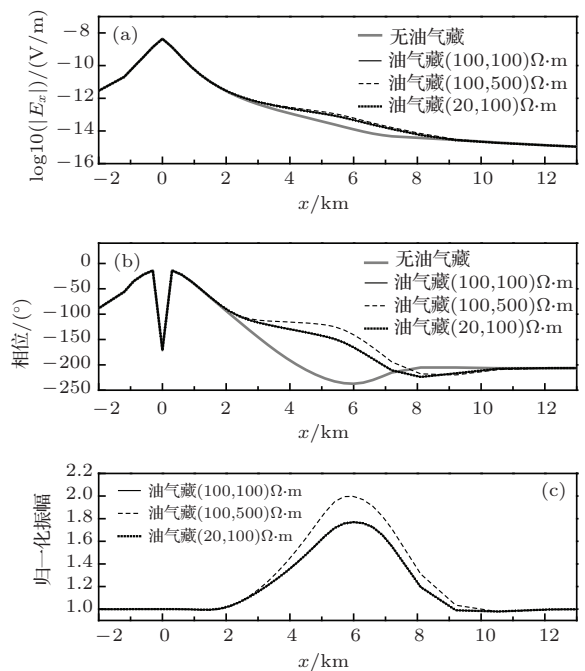


图6 油气藏存在各向异性的3D模型的海底CSEM的沿测线方向的电场响应 (a) 振幅; (b) 相位; (c) 归一化的振幅



应, 黑色虚线为油气藏横向电阻率不变, 纵向电阻率变化 ( $\rho_h = 100 \Omega \cdot m, \rho_v = 500 \Omega \cdot m$ ) 的电场响应, 黑色粗点线为油气藏纵向电阻率不变, 横向电阻率变化 ( $\rho_h = 20 \Omega \cdot m, \rho_v = 100 \Omega \cdot m$ ) 的电场响应. 从图中可知, 高阻的油气藏的横向电阻率的变化对  $E_x$  没有影响, 而纵向电阻率的变化对  $E_x$  影响明显. 并且, 随着纵向电阻率的增大,  $E_x$  的异常响应增大. 图 7 给出了  $E_x$  实部在  $oxz$  平面的空间分布图, 其中箭头表示电场方向, 颜色表示电场大小. 图 7 中可以清晰的看到,  $E_x$  在油气藏区域, 主要是沿水平方向, 受纵向电阻率的影响. 随着油气藏纵向电阻率的增大,  $E_x$  在油气藏区域的衰减变慢 (图 7 (b)), 海底表面接收的  $E_x$  也随之增大.

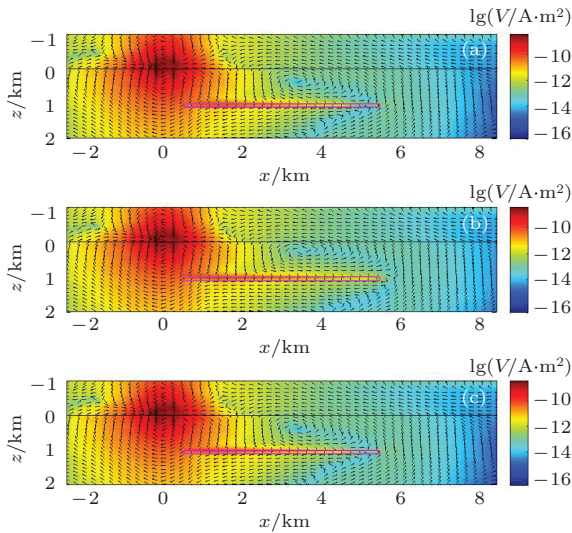


图 7 (网刊彩色) 油气藏存在各向异性的 3D 模型的海洋 CSEM 的沿测线方向电场实部在  $oxz$  平面的空间分布图 (其中箭头表示电场方向, 颜色表示电场大小) (a) 油气藏,  $\rho = (100, 100) \Omega \cdot m$ ; (b) 油气藏,  $\rho = (100, 500) \Omega \cdot m$ ; (c) 油气藏,  $\rho = (20, 100) \Omega \cdot m$

接下来考虑油气藏上方覆盖层的各向异性对沿测线方向的电场  $E_x$  的影响.  $E_x$  的振幅, 相位和归一化振幅如图 8 (a), (b) 和 (c) 所示, 归一化振幅为存在油气藏时的电场振幅与不存在油气藏, 覆盖层为各向同性时的电场振幅之比. 其中灰色实线为不存在油气藏时的电场响应, 黑色实线为存在油气藏, 覆盖层为各向同性的电场响应, 黑色虚线为存在油气藏, 覆盖层横向电阻率不变, 纵向电阻率变化 ( $\rho_h = 1 \Omega \cdot m, \rho_v = 4 \Omega \cdot m$ ) 的电场响应, 黑色粗点线为存在油气藏, 覆盖层纵向电阻率不变, 横向电阻率变化 ( $\rho_h = 0.25 \Omega \cdot m, \rho_v = 1 \Omega \cdot m$ ) 的电场响应. 从图中可知, 覆盖层的横向电阻率和纵向

电阻率的变化对  $E_x$  都有明显的影响. 横向电阻率或纵向电阻率的增大, 都会导致  $E_x$  的异常响应增大. 图 9 给出了  $E_x$  实部在  $oxz$  平面的空间分布图, 其中箭头表示电场方向, 颜色表示电场大小. 由图 9 (a) 中可知,  $E_x$  在覆盖层区域的方向变化比较复杂, 随着覆盖层纵向电阻率的增大,  $E_x$  在覆盖层区域的衰减变慢 (图 9 (b)), 海底表面接收的也随之增大; 随着覆盖层横向电阻率的减小,  $E_x$  在覆盖层区域的衰减变大 (图 9 (c)), 海底表面接收的  $E_x$  也随之减小.

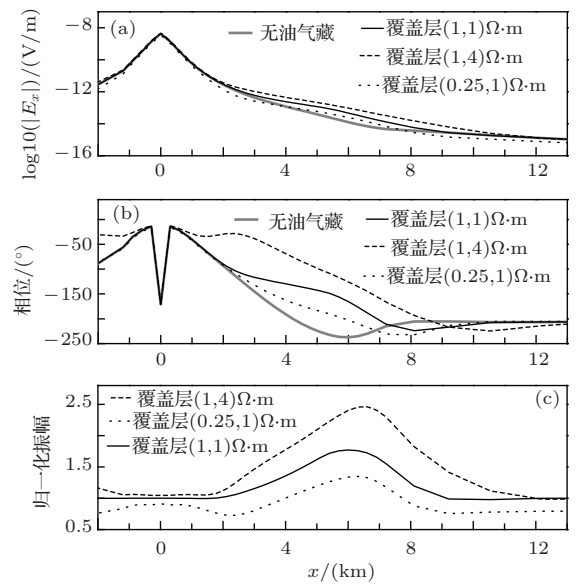


图 8 覆盖层存在各向异性的 3D 模型的海洋 CSEM 的沿测线方向的电场响应 (a) 振幅; (b) 相位; (c) 归一化的振幅

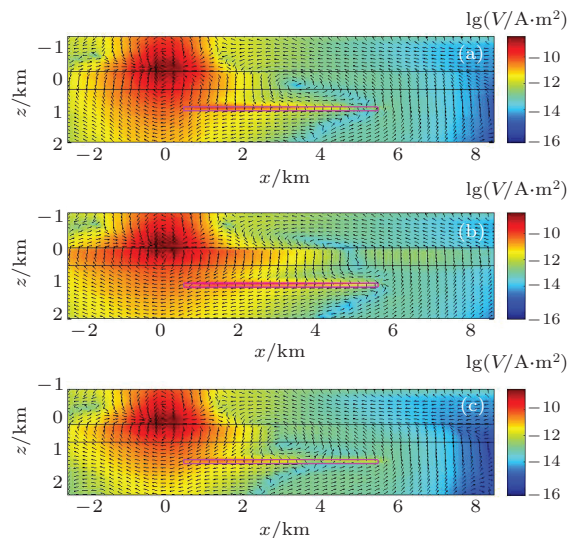


图 9 (网刊彩色) 覆盖层存在各向异性的 3D 模型的海洋 CSEM 的沿测线方向电场实部在  $oxz$  平面的空间分布图 (其中箭头表示电场方向, 颜色表示电场大小) (a) 覆盖层,  $\rho = (1, 1) \Omega \cdot m$ ; (b) 覆盖层,  $\rho = (1, 4) \Omega \cdot m$ ; (c) 覆盖层,  $\rho = (0.25, 1) \Omega \cdot m$



## 4 结 论

为了有效模拟各向异性地层中海洋可控源电磁法的三维响应, 本文建立了一套基于电场矢势与标势分解的耦合势有限体积法. 利用电场的矢势和标势分解, 将电场分解为无散场和无旋场之和, Maxwell方程转换为关于矢势与标势的混合Helmholtz方程, 有效的克服低感应数问题. 在此基础上, 借助Yee氏交错网格和有限体积法推导出旋度和散度的离散公式以及非均质单元中等效电导率的计算公式, 建立混合Helmholtz方程的离散方程. 为保证大范围电磁场分布的稳定精确的求解, 采用直接法求解器PARDISO求解离散方程. 此外, 为了在不明显降低计算效率的情况下尽可能提高近场的计算精度, 采用差异场方法处理各向异性地层3D模拟过程中的源奇异性问题.

对高阻油气藏的各向异性的数值模拟表明, 海洋可控源电磁法沿测线方向的电场 $E_x$ , 随着油气藏的纵向电阻率的增大而增大, 而与油气藏的横向电阻率大小无关, 原因在于 $E_x$ 在油气藏区域, 主要沿水平方向, 受纵向电阻率的影响. 对高阻油气藏上方的覆盖层的各向异性的数值模拟表明, 沿测线方向的电场, 随着覆盖层横向电阻率的增大而增大, 同时随着覆盖层纵向电阻率的增大而增大, 原因在于 $E_x$ 在覆盖层区域的分布比较复杂, 同时受到横向电阻率和纵向电阻率的影响. 因此, 在进行海洋CSEM三维数据解释时, 要特别注意海底各向异性的影响.

## 参考文献

- [1] Constable S 2010 *Geophysics* **75** 75A67
- [2] Eidesmo T, Ellingsrud S, MacGregor L M, Constable S, Sinha M C, Johansen S, Kong F N, Westerdahl H 2002 *First Break* **20** 144
- [3] Chimedsurong Z, Wang H N 2003 *Chin. J. Comput. Phys.* **20** 161 (in Chinese) [Z其木苏荣, 汪宏年 2003 计算物理 **20** 161]
- [4] Liu C S, Everett M E, Lin J, Zhou F D 2010 *Chin. J. Geophys.* **53** 1940 (in Chinese) [刘长胜, Everett M E, 林君, 周逢道 2010 地球物理学报 **53** 1940]
- [5] Li Y G, Constable S 2010 *Chin. J. Geophys.* **53** 737
- [6] Wang J X, Wang H N, Zhou J M, Yin C C 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 224101 (in Chinese) [汪建勋, 汪宏年, 周建美, 殷长春 2013 物理学报 **62** 224101]
- [7] Hong D C, Yang S D 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 109101 (in Chinese) [洪德成, 杨善德 2011 物理学报 **60** 109101]
- [8] Chen G B, Wang H N, Yao J J, Han Z Y, Yang S W 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1608 (in Chinese) [陈桂波, 汪宏年, 姚敬金, 韩子夜, 杨守文 2009 物理学报 **58** 1608]
- [9] Chen G B, Bi J, Wang J B, Chen X Y, Sun G C, Lu J 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 094102 (in Chinese) [陈桂波, 毕娟, 汪剑波, 陈新邑, 孙贯成, 卢俊 2011 物理学报 **60** 094102]
- [10] Yin C C 2006 *Geophysics* **71** G115
- [11] Wang H N, Yang S D, Wang Y 1999 *Oil Geophys. Prospect.* **34** 649 (in Chinese) [汪宏年, 杨善德, 王艳 1999 石油地球物理勘探 **34** 649]
- [12] Li F Y, Wen H, Fang Z Y 2013 *Chin. Phys. B* **22** 120402
- [13] Wang R, Gui L X, Ma J 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3422
- [14] Zhou J M, Wang H N, Yao J J, Yang S W, Ma Y Z 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 089101 (in Chinese) [周建美, 汪宏年, 姚敬金, 杨守文, 马寅芝 2012 物理学报 **61** 089101]
- [15] Yao D H, Wang H N, Yang S W, Yang H L 2010 *Chin. J. Geophys.* **53** 3026 (in Chinese) [姚东华, 汪宏年, 杨守文, 杨海亮 2010 地球物理学报 **53** 3026]
- [16] Xu Z F, Wu X P 2010 *Chin. J. Geophys.* **53** 1931 (in Chinese) [徐志锋, 吴小平 2010 地球物理学报 **53** 1931]
- [17] Zhang Y, Wang H N, Tao H G, Yang S W 2012 *Chin. J. Geophys.* **55** 2141 (in Chinese) [张焯, 汪宏年, 陶宏根, 杨守文 2012 地球物理学报 **55** 2141]
- [18] Yang B, Xu Y X, He Z X, Sun W B 2011, *Chin. J. Geophys.* **54** 1649 (in Chinese) [杨波, 徐义贤, 何展翔, 孙卫斌 2011 地球物理学报 **54** 1649]
- [19] Chen G B, Wang H N, Yao J J, Han Z Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3848 (in Chinese) [陈桂波, 汪宏年, 姚敬金, 韩子夜 2009 物理学报 **58** 3848]
- [20] Wang H N, Tao H G, Yao J J, Zhang Y 2012 *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* **50** 3383
- [21] Börner R 2010 *Surv. Geophys.* **31** 225
- [22] Yee K S 1966 *IEEE Trans. Antenn. Propag.* **14** 302
- [23] Streich R 2009 *Geophysics* **74** F95
- [24] Schwarzbach C, Börner R, Spitzer K 2011 *Geophys. J. Int.* **187** 63
- [25] Newman G A, Alumbaugh D L 2002 *Geophysics* **67** 484
- [26] Kong F N, Johnstad S, Røsten T, Westerdahl H 2008 *Geophysics* **73** F9
- [27] Schenk O, Gärtner K 2006 *Electron. T. Numer. Ana.* **23** 158
- [28] Schenk O, Gärtner K 2004 *Future Gener. Comp. Sy.* **20** 475

# Efficient simulation of three-dimensional marine controlled-source electromagnetic response in anisotropic formation by means of coupled potential finite volume method\*

Zhou Jian-Mei<sup>1)</sup> Zhang Ye<sup>2)</sup> Wang Hong-Nian<sup>1)†</sup> Yang Shou-Wen<sup>1)</sup> Yin Chang-Chun<sup>3)</sup>

1) (*College of Physics, Jilin University, Changchun 130012, China*)

2) (*School of Science, Changchun University of Science and Technology, Changchun 130022, China*)

3) (*College of Geo-exploration Science and Technology, Jilin University, Changchun 130026, China*)

( Received 8 January 2014; revised manuscript received 14 April 2014 )

## Abstract

A coupled potential finite volume method for simulation of three-dimensional marine controlled-source electromagnetic (CSEM) response in anisotropic formation is developed. To circumvent ill-conditioning and convergence problems, Maxwell's equations are reformulated into coupled scalar-vector potentials with Coulomb gauge and its complement by applying a Helmholtz decomposition to the electric field. Yee's staggered grids, finite volume averaging and interpolation techniques are used to make the Helmholtz equations discrete. The resulting sparse and complex linear system in large-scale models is solved by a direct solver PARDISO. In order to improve the accuracy of the near field results without significantly reducing the computational efficiency, a method using difference fields is proposed to reduce the source singularity effect of anisotropic formation. The anisotropic modeling examples show that marine CSEM response is predominantly sensitive to reservoir vertical resistivity, not to reservoir horizontal resistivity, provided that the reservoir are thin and high-resistive; but the marine CSEM response is sensitive to both horizontal and vertical resistivity of the overburden on top of the reservoir.

**Keywords:** marine controlled-source electromagnetic method, anisotropy, finite volume method, direct method

**PACS:** 91.25.Qi, 02.30.Zz, 41.20.-q

**DOI:** [10.7498/aps.63.159101](https://doi.org/10.7498/aps.63.159101)

---

\* Project supported by the National High Technology Research and Development Program of China (Grant No. 2012AA09A20103).

† Corresponding author. E-mail: [wanghn@jlu.edu.cn](mailto:wanghn@jlu.edu.cn)