

# 具有对应分段系统和指数系统的新混沌系统的 Hopf 分岔控制研究\*

张玲梅<sup>1)</sup> 张建文<sup>1)†</sup> 吴润衡<sup>2)</sup>

1) (太原理工大学数学学院, 太原 030024)

2) (北方工业大学理学院, 北京 100041)

(2014年3月23日收到; 2014年5月4日收到修改稿)

为进一步了解一个复杂的有不稳定奇点的三维动力系统在 Hopf 分岔点附近的非线性特性, 采用非线性控制器, 提出了相应的控制系统, 使得受控系统可能发生余维一、余维二和余维三的 Hopf 分岔. 通过严格的数学推导给出了受控系统发生分岔的参数条件, 证明了可控制系统在指定区域内发生退化分岔和可控分岔的稳定性.

**关键词:** 混沌系统, 控制, Hopf 分岔, Lyapunov 系数

**PACS:** 05.45.Gg, 05.45.Pq

**DOI:** 10.7498/aps.63.160505

## 1 引言

自 1963 年气象学家 Lorenz<sup>[1]</sup> 发现第一个三维混沌系统——Lorenz 系统以来, 众多学者开始了对三阶二次系统不断探索和研究, 提出了很多新的三维混沌系统. 对 Rössler 系统<sup>[2]</sup>, Chua 系统<sup>[3]</sup>, Sprott<sup>[4]</sup> 提出的 19 种简单形式的三阶二次混沌系统, Chen 系统<sup>[5]</sup>, Lü 系统<sup>[6]</sup> 等的研究已经相当深入. 近年来, 又有学者不断提出新的系统, 如刘凌等<sup>[7]</sup> 提出的一个新的三维自治混沌系统, Yang 和 Chen<sup>[8]</sup> 共同提出的含有六项的新型混沌系统, Yang 等<sup>[9]</sup> 提出的一个较为简单的混沌系统, 这些系统都极大地丰富了混沌动力学的理论知识及其应用. 不断有学者对这些系统进行深入的研究<sup>[10-17]</sup>, 在系统的同步及反馈控制研究方面得到了一些新的成果. 需要注意的是, 对于三个特定的复杂固定点(一个稳定点和两个不稳定鞍点)而言, 对这类系统实施控制可以进一步了解该系统的非线性特性<sup>[18,19]</sup>. 本文在一个可以进行电路应用并

且同时具备对应的分段系统和指数系统的新三维系统的基础上, 采用非线性状态反馈控制器, 研究了受控系统的余维一、余维二和余维三的 Hopf 分岔的参数条件. 本文研究的系统具有如下形式:

$$\begin{cases} x' = a(x+z) - yz, \\ y' = xz - by, \\ z' = c(x-z), \end{cases} \quad (1)$$

系统初值为

$$\begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 0, \\ z(0) = 0.0000000001. \end{cases}$$

这里,  $a = 11$ ,  $b = 1.8$ ,  $c = 20$ . 根据陈关荣和吕金虎<sup>[20]</sup> 对于广义 Lorenz 系统的定义, 系统(1)属于广义 Lorenz 系统范畴.

分岔广泛存在于物理、化学、生物和地质领域的非线性系统中. 例如交叉应用学科中的 Hopf 分岔在气候动力学中可以使热盐海洋中断, 同时也可以作为灾难的预警信号. 对于这些应用而言, 在理

\* 国家自然科学基金(批准号: 11172194)资助的课题

† 通讯作者. E-mail: zhangjianwen@tyut.edu.cn

论分析中给出了能够使系统保持原有的一些特性的控制系统. 我们引入了反馈控制器

$$u = m(x - z) + n(x - z)^2, \quad (2)$$

这时受控系统具有如下形式:

$$\begin{cases} x' = a(x + z) - yz + u, \\ y' = xz - by, \\ z' = c(x - z), \end{cases} \quad (3)$$

取初值为

$$\begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 0, \\ z(0) = 0.00000000001. \end{cases}$$

## 2 Hopf分岔方法

下面对余维一、余维二、余维三Hopf分岔和Lyapunov稳定性系数进行理论阐述, 相关理论可以参见文献[21—23]. 考虑如下微分方程:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}), \quad (4)$$

其中,  $\mathbf{X}$  和  $\boldsymbol{\mu}$  分别为状态量和控制参数,  $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^3$  和  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbf{R}^5$ . 这里  $\mathbf{R}^3$  为三维实向量空间,  $\mathbf{R}^5$  为五维控制参数实向量空间. 假设  $\mathbf{f} \in C^\infty$  ( $C^\infty$  为扩充复平面) 且在  $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$  时有一个奇点  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0$ . 通过平移将奇点移动至原点, 则系统变为

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}_0). \quad (5)$$

在  $\mathbf{X} = \mathbf{0}$  的附近, (5) 式的 Taylor 展开式如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{X}) = & \mathbf{A}\mathbf{X} + \frac{1}{2}\mathbf{B}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + \frac{1}{6}\mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{X}) \\ & + \frac{1}{24}\mathbf{D}(\mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{X}) + O(\|\mathbf{X}\|^8), \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{A} = \mathbf{f}_x(0, \boldsymbol{\mu}_0)$ , 且对  $i = 1, 2, 3$  有

$$\mathbf{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{j,k=1}^3 \left. \frac{\partial^2 F_i(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \right|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}} X_j Y_k,$$

类似地可以给出  $\mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{X})$  和  $\mathbf{D}(\mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{X})$  的表达式. 假设奇点处 Jacobian 矩阵有一对实部为0的共轭特征根  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ , 设向量  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{C}^3$  ( $\mathbf{C}^3$  为三维复空间), 且满足下式

$$\mathbf{A}\mathbf{q} = i\omega_0\mathbf{q}, \quad \mathbf{A}^T\mathbf{p} = -i\omega_0\mathbf{p}, \quad \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 1.$$

令特征值  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  对应的特征空间为  $\mathbf{T}^c$ , 对于  $\mathbf{T}^c$  中的向量  $\mathbf{y} = \boldsymbol{\omega}\mathbf{q} + \bar{\boldsymbol{\omega}}\bar{\mathbf{q}}$ , 其中  $\boldsymbol{\omega} = \langle \mathbf{p}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbf{C}$  ( $\mathbf{C}$  为复数集), 系统 (4) 的二维中心流形可以通过

$\mathbf{X} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\omega}, \bar{\boldsymbol{\omega}})$  表示, 这里  $\mathbf{H} : \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  ( $\mathbf{C}^2$  为二维复平面),  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\omega}, \bar{\boldsymbol{\omega}})$  有如下的 Taylor 展开式:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\boldsymbol{\omega}, \bar{\boldsymbol{\omega}}) = & \boldsymbol{\omega}\mathbf{q} + \bar{\boldsymbol{\omega}}\bar{\mathbf{q}} + \sum_{2 \leq j+k \leq 7} \frac{1}{j!k!} h_{jk} \boldsymbol{\omega}^j \bar{\boldsymbol{\omega}}^k \\ & + O(|\boldsymbol{\omega}|^8). \end{aligned} \quad (6)$$

将 (6) 式代入 (4) 式可以得到下面的方程:

$$\mathbf{H}_\omega \boldsymbol{\omega}' + \mathbf{H}_{\bar{\omega}} \bar{\boldsymbol{\omega}}' = \mathbf{F}(\mathbf{H}(\boldsymbol{\omega}, \bar{\boldsymbol{\omega}})), \quad (7)$$

进而可以得到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}' = & i\omega_0\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\mathbf{G}_{21}\boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{\omega}|^2 + \frac{1}{12}\mathbf{G}_{32}\boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{\omega}|^4 \\ & + \frac{1}{144}\mathbf{G}_{43}\boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{\omega}|^6 + O(|\boldsymbol{\omega}|^8), \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{G}_{ij} \in \mathbf{C}$ . 这样可以得到第一 Lyapunov 系数的表达式:

$$l_1 = \frac{1}{2}\text{Re}\mathbf{G}_{21},$$

其中

$$\mathbf{G}_{21} = \langle \mathbf{p}, \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) + \mathbf{B}(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{h}_{20}) + 2\mathbf{B}(\mathbf{q}, \mathbf{h}_{11}) \rangle,$$

定义  $\boldsymbol{\psi}_{32}$  和  $\boldsymbol{\psi}_{43}$  后可以计算出第二和第三 Lyapunov 系数的表达式:

$$l_2 = \frac{1}{12}\text{Re}\mathbf{G}_{32}, \quad l_3 = \frac{1}{144}\text{Re}\mathbf{G}_{43},$$

其中  $\mathbf{G}_{32} = \langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\psi}_{32} \rangle$  和  $\mathbf{G}_{43} = \langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\psi}_{43} \rangle$ . 由于  $\boldsymbol{\psi}_{32}$  和  $\boldsymbol{\psi}_{43}$  的表达式十分庞大, 这里不再赘述, 可以见文献[21—23].

## 3 受控系统的 Hopf 分岔

当  $ab > 0$  时, 系统 (1) 有如下三个平衡点:

$$\begin{aligned} S_1 &= (0, 0, 0), \\ S_2 &= (\sqrt{2ab}, 2a, \sqrt{2ab}), \\ S_3 &= (-\sqrt{2ab}, 2a, -\sqrt{2ab}). \end{aligned}$$

显然, 控制器 (2) 保持平衡点的结构不发生变化并且没有改变系统的分岔性质. 不考虑简单原点, 对于受控系统与原系统类似的两个对称平衡点, 本文只讨论  $S_2$ .

**定理 1** 当  $c > 0, b > 2a > 0, m = m_0, n \neq n_0$  时, 系统在  $S_2$  点有 Hopf 分岔, 其中

$$\begin{aligned} m_0 &= \frac{1}{2} \left[ b + 2c - \sqrt{(b - 2a)^2 + 16ac} \right], \\ n_0 &= -\frac{\varphi(a, b, c, d)}{\phi(a, b, c, d)}, \end{aligned}$$

这里,

$$d = \sqrt{ab + bc - \frac{b}{2}[b + 2c - \sqrt{(b - 2a)^2 + 16ac}]},$$

$$\begin{aligned} \varphi(a, b, c, d) = & -4abc\sqrt{abc}[8bcd^2(b + c - a - m_0) - 8ab^2c^2 + 4d^3(b + c - a - m_0) \\ & - 4abcd + 16cd - 4bcd^2(a + c - m_0) - 8bd^4 + 2b^2d^2(a + c - m_0)][(d^2 + bm_0 - ab)^2 \\ & - (b - a - m_0)^2d^2] \left[ \frac{2bc^2\sqrt{2ab}}{b^2 + d^2}(2bc + d) + 2c^3\sqrt{2ab} \right] \{ [4d^2(b + c - a - m_0) - 4abc]^2 \\ & + 4d^2[4d^2 - b(a + c - m_0)]^2 \} \{ [d^2(2c - b) - b(2bc + d)](d^2 + bm_0 - ab) - [(2bc + d)d \\ & - bd(b - 2c)][(a + m_0 - b)d] \} + 2c^3\sqrt{2ab}(2bc + d)[(b - a - m_0)d^2 - b(d^2 + bm_0 - ab)] \\ & \times \{ [4d^2(b + c - a - m_0) - 4abc]^2 + 4d^2[4d^2 - b(a + c - m_0)]^2 \} + (b^2 + d^2)[2c(d^2 + bm_0 - ab) \\ & + (b - a - m_0)d^2] \{ [4d^2(b + c - a - m_0) - 4abc]^2 + 4d^2[4d^2 - b(a + c - m_0)]^2 \} \\ & \times \left[ -\frac{2bc^2\sqrt{2ab}}{b^2 + d^2}(2bc + d) - 2c^3\sqrt{2ab} \right] + 2\sqrt{2abc}^3(2ab + d)[ab^2 - ad^2 - md^2 - b^2m] \\ & - 2c^4\sqrt{2ab}(b^2 + d^2)[4d^2(ab^2 - ad^2 - md^2 - b^2m)(4bd^2 - 4abc - a^2b - 2bcm + bm^2 + bc^2) \\ & - (d^3 - abd + b^2d - abd)(16abd^3 + 16acd^3 - 8a^2d^3 - 16amd^3 + 16cmd^2 - 8m^2d^3 \\ & - 8c^2d^3 - 8abcd - 32d^5)] + 4\sqrt{2ababc}^4(b^2 + d^2)\{8cd^2(d^2 + bm - ab)(b + c - a - m) \\ & - 8abc^2 + 4d^4(b + c - a - m)(b - a - m) - 4abcd^2(b - a - m) - 2d[d(d^2 + bm - ab) \\ & \times (4d^2 - ab - bc + bm) - 2c(b - a - m)(4d^2 - ab - bc + bm)]\}, \\ \phi(a, b, c, d) = & \{16abc^3d^2(b^2 + d^2)[(b - a - m)d^2 - b(d^2 + bm - ab)][4d^2(b + c - a - m) - 4abc] \\ & + 2d^2(d^2 + b^2 - 2ab)[4d^2 - b(a + c - m)]\} - 6c^2d^2(b^2 + d^2)[(b - a - m)d^2 \\ & - b(d^2 + bm - ab)] \{ [4d^2(b + c - a - m) - 4abc]^2 + 4d^2[4d^2 - b(a + c - m)]^2 \} \\ & - 2bcd^2 \{ [4d^2(b + c - a - m) - 4abc]^2 + 4d^2[4d^2 - b(a + c - m)]^2 \} \{ [d^2(2c - b) - b(2bc + d)] \\ & \times [d^2 + bm - ab] - [(2bc + d)d - bd(b - 2c)][d(a + m - b)] \} + 2bcd^2(b^2 + d^2)[2c(d^2 + bm - ab) \\ & + (b - a - m)d^2] \{ [4d^2(b + c - a - m) - 4abc]^2 + 4d^2[4d^2 - b(a + c - m)]^2 \}. \end{aligned}$$

证明 通过线性变换

$$\begin{cases} x_1 = x - \sqrt{2ab}, \\ y_1 = y - 2a, \\ z_1 = z - \sqrt{2ab} \end{cases}$$

将  $S_2$  平移到  $O(0, 0, 0)$  后, 系统(1) 变为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_1 + z_1 + 2\sqrt{2ab}) - (y_1 + 2a) \\ \quad (z_1 + \sqrt{2ab}) + m(x_1 - z_1) \\ \quad + n(x_1 - z_1)^2, \\ \dot{y}_1 = (x_1 + \sqrt{2ab})(z_1 + \sqrt{2ab}) \\ \quad - b(y_1 + 2a), \\ \dot{z}_1 = c(x_1 - z_1). \end{cases} \quad (8)$$

系统(8) 在  $O(0, 0, 0)$  的 Jacobian 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} a + m - z_0 & a - m - y_0 \\ z_0 & -b & x_0 \\ c & 0 & -c \end{bmatrix},$$

得到对应的特征方程为

$$\lambda^3 + (b + c - a - m)\lambda^2 + (ab + bc - mb)\lambda + 4abc = 0. \quad (9)$$

假设方程(9) 有一对共轭的纯虚根  $\pm i\omega_0$  ( $\omega_0 > 0$ ), 则可以得到

$$\begin{aligned} m &= m_0 = \frac{1}{2}[b + 2c - \sqrt{(b - 2a)^2 + 16ac}], \\ \omega_0 &= d = ab + bc - \frac{b}{2}[b + 2c - \sqrt{(b - 2a)^2 + 16ac}]. \end{aligned}$$

容易验证

$$\operatorname{Re}\lambda'(m_0) = \frac{b\omega_0^2(b+2c-2m_0)}{2(4abc+\omega_0^4)} > 0,$$

则横截性条件成立. 由

$$\mathbf{J}\mathbf{q} = i\omega_0\mathbf{q}, \quad \mathbf{J}^T\mathbf{p} = -i\omega_0\mathbf{p}, \quad \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 1$$

可以得到

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} c(i\omega_0 - b) \\ c\sqrt{2ab} \\ \omega_0^2 + bm_0 - ab + (b - a - m_0)\omega_0 i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} c + i\omega_0 \\ \frac{\sqrt{2ab}(2bc + \omega_0 + b\omega_0 i - 2c\omega_0 i)}{b^2 + \omega_0^2} \\ c \end{bmatrix}.$$

由(8)式可以得到

$$\mathbf{B}(X, Y) = \begin{bmatrix} 2n(X_1Y_1 + X_3Y_3 - X_1Y_3 - X_3Y_1) - X_2Y_3 - X_3Y_2 \\ X_1Y_3 + X_3Y_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}(X, Y, Z) = \mathbf{0},$$

其中  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathbf{R}^3$ , 将  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  代入计算可以得到第一 Lyapunov 系数

$$l_1 = \frac{[\varphi(a, b, c, d) + n\phi(a, b, c, d)]\{[4d^2(b+c-a-m_0) - 4abc] + 4d^2[4d^2 - b(a+c-m_0)]^2\}^{-1}}{2(b^2 + d^2)[(d^2 + bm_0 - ab)^2 + (b-a-m_0)^2d^2]}.$$

令  $n_0 = -\frac{\varphi(a, b, c, d)}{\phi(a, b, c, d)}$ , 即可得证定理 1.

**定理 2** 当  $a = c = 11$  时, 若  $b > 2a$ , 则  $l_2 > 0$  且  $S_2$  是不稳定的奇点; 若  $b = 2a$ , 则系统在  $S_2$  有余维三的 Hopf 分岔, 并且有  $l_2 = 0$ , 进而  $l_3 > 0$  且  $S_2$  是不稳定的奇点; 若  $b < 2a$ , 则  $l_2 < 0$  且  $S_2$  是稳定的奇点.

**证明** 这里先考虑  $b = 2a$  的情况. 当  $a = c = \frac{1}{2}b$  时,  $m = 0$ , 经过非常复杂的符号计算可以得到计算  $l_1, l_2, l_3$  的表达式.

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= [11 + 22i \quad 22 \quad 11]', & \mathbf{q} &= [242(i-1) \quad 242 \quad 242(1+i)]', \\ \mathbf{h}_{11} &= [10.1075 \quad 32.105 \quad 10.1075]', \\ \mathbf{h}_{20} &= [3.301 + 0.73333i \quad 31.4333 - 5.86667i \quad 0.36667 - 0.7333i]', \\ \mathbf{G}_{21} &= 16.566723i, \\ \mathbf{h}_{21} &= [-1.3673 + 1.293067i \quad 6.9203 - 8.82918i \quad 2.86745 - 3.920296i]', \\ \mathbf{h}_{30} &= [5.938505 - 2.489504i \quad 3.58594 + 6.78903i \quad 3.5595943 - 2.029182i]', \\ \mathbf{h}_{31} &= [3.84946 - 1.548696i \quad -1.384955 - 2.5940496i \quad 2.385950 - 1.48928i]', \\ \mathbf{h}_{40} &= [-1.285738 + 2.4839i \quad 0.2910258 - 1.93837i \quad 0.2829187 + 0.382375096i]', \\ \mathbf{h}_{22} &= [0.2849576 + 1.29623i \quad 1.82923 - 0.7389264i \quad 0.384756 - 2.28393i]', \\ \mathbf{G}_{32} &= -2.493859i, \\ \mathbf{h}_{41} &= [0.0367948 + 0.02718783i \quad -0.03748 + 0.2837381i \quad 0.498466 - 0.018273i]', \\ \mathbf{h}_{32} &= [-1.12839 + 0.2883i \quad -0.23849 - 0.02384976i \quad -0.39772 + 0.19284i]', \\ \mathbf{h}_{42} &= [0.029384 - 1.92847i \quad 0.017632 - 0.189717i \quad 1.283947091 - 0.08472613i]', \\ \mathbf{h}_{33} &= [0.967847 - 0.0016946i \quad -0.082746 - 0.299378i \quad 0.00283178 - 0.05029i]', \\ \mathbf{G}_{43} &= 0.693024758 + 0.7895756i. \end{aligned}$$

则可以得到

$$l_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} G_{21} = 0,$$

$$l_2 = \frac{1}{12} \operatorname{Re} G_{32} = 0,$$

$$l_3 = \frac{1}{144} \operatorname{Re} G_{43} = 0.0054831638.$$

于是  $b = 2a$  的情形得证. 类似地, 可以证明  $b > 2a$  和  $b < 2a$  的情形.

对于上述的三种情况, 我们给出了三种情形下对应的吸引子图像(图1—图3)及相图(图4—图6). 从图1—图6可以看到, 系统在指定区域内可调控稳定性, 与定理2相符合.

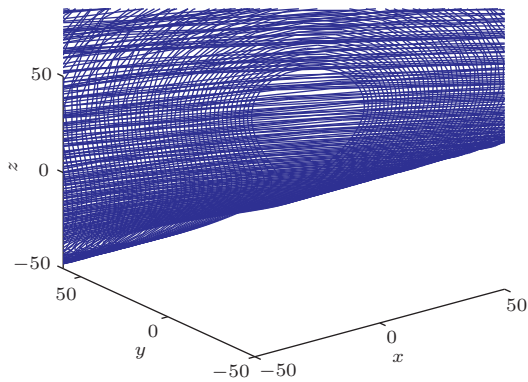


图1  $b = 21.5$  时的吸引子

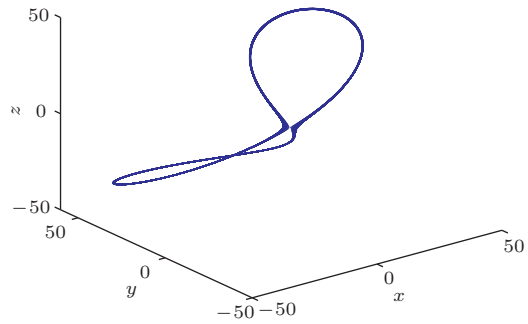


图2  $b = 22$  时的吸引子

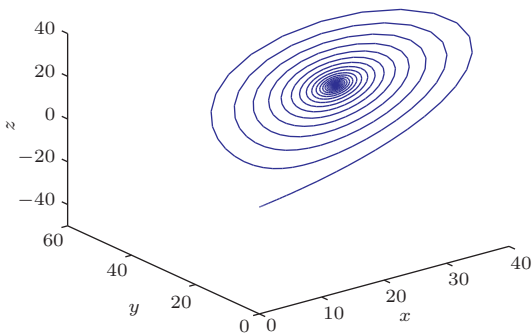


图3  $b = 25$  时的吸引子

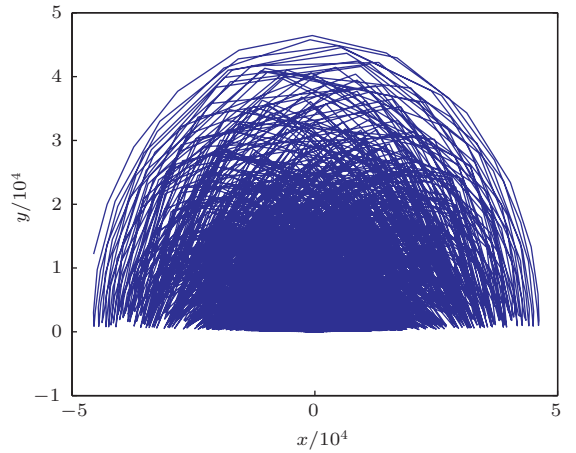


图4  $b = 21.5$  时的相图

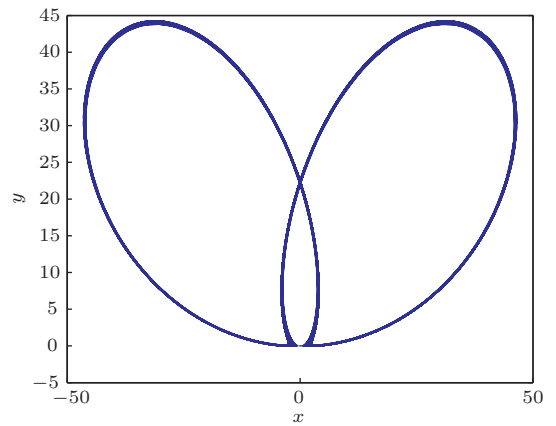


图5  $b = 22$  时的相图

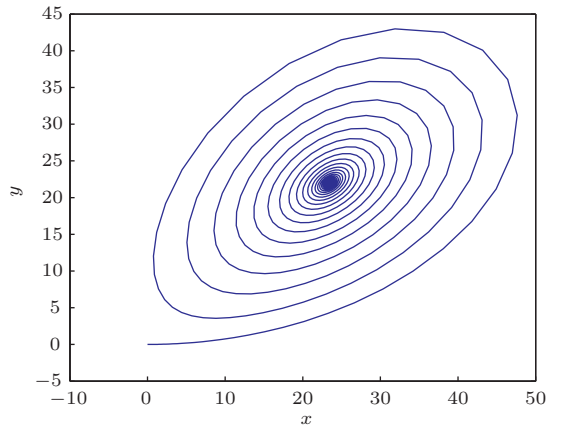


图6  $b = 25$  时的相图

## 4 结 论

本文通过引入控制器, 在参数条件下可以使控制系统在较大的参数区域表现出 Hopf 分岔, 从而使受控系统可能发生余维一、余维二和余维三的 Hopf 分岔, 证明了可以控制系统在指定区域内发生退化分岔和可调控分岔的稳定性. 该系统在工程

方面的实际应用是今后需要研究的方向.

### 参考文献

- [1] Lorenz E N 1963 *Atmos. J. Sci.* **20** 130
- [2] Rössler O E 1976 *Phys. Lett. A* **57** 397
- [3] Chua L O, Komuro M, Matsumoto T 1986 *IEEE Trans. Circ. Syst.* **33** 1072
- [4] Sprott J C 1994 *Phys. Rev. E* **50** 647
- [5] Lü J H, Chen G R 2002 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **12** 659
- [6] Lü J H, Chen G R, Cheng D Z 2004 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **14** 1507
- [7] Liu L, Su Y C, Liu C X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1966 (in Chinese) [刘凌, 苏燕辰, 刘崇新 2007 物理学报 **56** 1966]
- [8] Yang Q G, Chen G R 2008 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **18** 1393
- [9] Yang Q G, Wei Z C, Chen G R 2010 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **20** 1061
- [10] Li Z, Han C Z 2002 *Chin. Phys.* **11** 666
- [11] Li R H, Xu W, Li S 2007 *Chin. Phys.* **16** 1591
- [12] Wei Z C, Yang Q G 2011 *Nonlinear Anal-Real.* **12** 106
- [13] Hua C C, Guan X P 2004 *Chin. Phys. Lett.* **21** 1441
- [14] Chen S H, Liu J, Feng J W, Lü J H 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 1257
- [15] Luo X S, Fang J Q 2000 *Chin. Phys.* **9** 333
- [16] Zhang X H, Shen K 1999 *Chin. Phys.* **8** 651
- [17] Fang J Q, Chen G R 1999 *Chin. Phys.* **8** 526
- [18] Wu W G, Gu T X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1922 (in Chinese) [伍维根, 古天祥 2000 物理学报 **49** 1922]
- [19] Chen L Q, Liu Y Z 1996 *Physics* **25** 278 (in Chinese) [陈立群, 刘延柱 1996 物理 **25** 278]
- [20] Chen G R, Lü J H 2003 *Dynamic Analysis, Control and Synchronization of Lorenz System* (Vol. 1) (Beijing: Science Press) pp1-130 (in Chinese) [陈关荣, 吕金虎 2003 Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步 (第一版) (北京: 科学出版社) 第1—130页]
- [21] Kuznetsov Y A 1998 *Elements of Applied Bifurcation Theory* (New York: Springer-Verlag) pp1-20
- [22] Messias M, Braga D C, Mello L F 2009 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **19** 497
- [23] Wei Z C 2010 *Appl. Math. Comput.* **217** 422

# Anti-control of Hopf bifurcation in the new chaotic system with piecewise system and exponential system\*

Zhang Ling-Mei<sup>1)</sup> Zhang Jian-Wen<sup>1)†</sup> Wu Run-Heng<sup>2)</sup>

1) (*College of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China*)

2) (*College of Science, North China University of Technology, Beijing 100041, China*)

( Received 23 March 2014; revised manuscript received 4 May 2014 )

## Abstract

In order to understand the complex three-dimensional dynamical system with the unstable nodes, we propose a nonlinear controller. The corresponding controlling system makes the codimension one, two, and three Hopf bifurcations happen. The mathematical deduction demonstrates that the system can be controlled to produce the degenerate Hopf bifurcation at desired location and stability of controllable bifurcation.

**Keywords:** chaotic system, control, Hopf bifurcation, Lyapunov coefficient

**PACS:** 05.45.Gg, 05.45.Pq

**DOI:** [10.7498/aps.63.160505](https://doi.org/10.7498/aps.63.160505)

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11172194).

† Corresponding author. E-mail: [zhangjianwen@tyut.edu.cn](mailto:zhangjianwen@tyut.edu.cn)