

Willis环脑动脉瘤系统的混沌分析及随机相位控制*

古元凤 肖剑†

(重庆大学数学与统计学院, 重庆 401331)

(2014年3月17日收到; 2014年4月8日收到修改稿)

研究了Willis环脑动脉瘤系统各参量对系统的影响. 计算了含有随机相位的Willis环脑动脉瘤系统的Lyapunov指数, 分析了随机相位和不同噪声强度对Willis环脑动脉瘤系统的影响. 对相图、Poincaré截面的分析表明, 可以利用随机相位对Willis环脑动脉瘤系统进行控制.

关键词: 脑动脉瘤, 随机相位, 混沌控制

PACS: 05.45.Gg, 05.45.Pq

DOI: 10.7498/aps.63.160506

1 引言

脑动脉瘤是由于多种原因造成脑动脉血管壁上的异常膨出, 多形如囊状. 由于瘤壁不健全, 常发生破裂, 引起蛛网膜下腔出血, 临床表现为急骤起病的剧烈头痛、呕吐、意识障碍、脑膜刺激症和血性脑脊液. Willis环(颅底动脉环)是脑动脉瘤的高发区, 因此通过研究Willis环上的脑动脉瘤的数学模型来分析和控制脑动脉瘤的形成和生长非常必要.

Willis环脑动脉瘤系统是一类近些年才发展起来的具有代表性的非线性生物系统, 该系统建立在临床观测和体外模拟实验基础之上, 具有较强的生物和医学背景. 该系统以脑动脉瘤内的血流速度为研究对象, 通过血流动力学参数反映脑动脉瘤的发展情况.

早在1971年, Austin^[1]就采用乳胶和橡胶作为原料进行脑动脉瘤的实验, 他把整个脑动脉瘤视为一个电路结构, 利用电路的理论知识对动脉瘤内的血流速度进行研究, 得到了第一个脑动脉瘤模型. 文献[2, 3]分别用不同的方法提出了Willis环脑动脉瘤的不同数学模型. 文献[4, 5]改进了Austin提

出的脑动脉瘤数学模型, 提出含有阻尼项的Willis环脑动脉瘤模型. 文献[4]用不同于文献[5]的方法证明了Willis环脑动脉瘤模型至少存在一个周期为 $2\pi/\omega$ 的周期解. 文献[6, 7]研究了更具有一般性的脑动脉瘤模型的周期解和概周期解, 从理论上解释了脑动脉瘤患者周期性偏头疼的原因. 杨翠红和朱思铭^[8]用Mel'nikov方法得到了脑动脉瘤模型存在Devaney混沌的条件.

在混沌系统控制的实现中, 最大限度地利用混沌的特性, 对于确定控制目标和选取控制方法非常关键. 1990年, 美国Maryland大学的Ott, Grelogi和Yorke^[9]提出了把小参量扰动控制量加进混沌系统, 使系统状态控制在某一不动点上的OGY控制法. 二十多年来, 混沌控制得到蓬勃发展, 人们提出了多种控制混沌的方法, 如反馈控制、自适应控制、延迟反馈控制、滑模变结构控制、优化控制和模糊控制等^[10]. 周小安等^[11]基于混沌信号的统计特性, 提出了一种通过改善混沌信号的空间关联性实现混沌控制的新方法. 于洪洁和郑宁^[12]提出了基于稳定性准则的半周期延迟非线性反馈控制混沌的方法. 龚礼华^[13]提出了自适应脉冲微扰控制混沌系统的方法. 张晓丹等^[14]选择反馈增益矩阵设计一类混沌控制器成功地控制了金融风险系统的

* 中央高等学校基本科研基金(批准号: CQDXWL-2012-007)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: xj4448@126.com

混沌行为. Gholizadeh 等^[15]提出了基于有限时间控制理论和优化速度控制混沌的方法. 闵富红和马美玲^[16]提出一种基于继电特性函数的准滑动模态控制方法, 对电力系统进行混沌振荡抑制, 使系统快速平滑地到达控制目标. 1995年, Qu 等^[17]发现相位对混沌的控制作用. 此后, 文献^[18, 19]将随机相位应用到混沌控制之中. 在此基础上, 李爽等^[20]利用随机相位实现了 Duffing 系统的混沌控制. 也有部分学者讨论了 Willis 环脑动脉瘤系统的控制问题. 对于参数可变的 Willis 环脑动脉瘤系统, 李医民和于霜^[21]基于自适应控制思想, 通过构造参数自适应律实现了两个参数可变的 Willis 环脑动脉瘤系统的同步. 针对具有不确定性的 Willis 环上的脑动脉瘤系统的控制问题, 彭书华等^[22]提出了一种自适应模糊滑模控制方法. 肖剑等^[23]通过一个线性控制器实现了 Willis 环脑动脉瘤系统的双同步.

不同于已有文献, 本文采用控制变量法讨论脑动脉瘤系统^[4,5]各参量对脑动脉瘤系统的影响, 将随机相位控制法应用于脑动脉瘤系统的混沌控制中. 由于 Lyapunov 指数是刻画混沌的重要指标, 本文通过基于 Matlab 的 Let 混沌工具箱计算出脑动脉瘤系统的 Lyapunov 指数, 进而根据 Lyapunov 指数符号的改变确定混沌的演化. Willis 环脑动脉瘤系统是一个二维非自治系统, 有 3 个 Lyapunov 指数, 只要其中有一个为正即可说明系统处于混沌状态. 本文还结合相图和 Poincaré 截面的演化, 表明利用随机相位进行混沌控制是可行的.

2 Willis 环脑动脉瘤系统的参数分析

1971 年, Austin^[1]通过实验建立了下列 Willis 环脑动脉瘤模型:

$$\ddot{x} + \alpha x - \beta x^2 + \gamma x^3 = F \cos(\omega t). \quad (1)$$

1993 年, 曹进德和刘天一^[4]改进上述模型, 得到了比较切合实际的具有阻尼项的脑动脉瘤模型

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} + \alpha x - \beta x^2 + \gamma x^3 = F \cos(\omega t). \quad (2)$$

这里, x 为脑动脉瘤内的血流速度; \dot{x} 为血流变化率; \ddot{x} 为血流变化的加速度; 系数 α, β, γ 的取值与血流阻力及血管壁的弹性有关; μ 为血流阻尼系数,

$$\mu = \left(\frac{1}{R_3 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{\alpha}{R_2 R_3} \right),$$

其中 $R_i (i = 1, 2, 3)$ 为身体不同部位血液流动的阻抗, C_1 为动脉管壁强度; F 为脉冲压,

$$F = \frac{F_1}{C_1 R_1 R_2},$$

其中 F_1 为血压振幅; ω 为心率的倒数; $F \cos(\omega t)$ 为中心血压的变化率. 需要说明的是, 这些参量都与人的生理构造和动脉瘤状况有关, 通称为生理参量.

经实验发现, 选取不同的参量值对系统的影响不同, 而瘤内血流速度是影响瘤破裂的重要原因. 本文采用控制变量法讨论不同生理参量对脑动脉瘤系统的影响, 重点讨论脉冲压 F 、阻尼系数 μ 、心率倒数 ω 三种参量对脑动脉瘤的影响.

2.1 在稳定状态下和不稳定状态下系统的特征

下面研究在稳定状态下和不稳定状态下系统的特征. 对于系统(2), 要求其原函数的难度很大, 因此我们对该系统进行数值仿真, 观察系统在不同参量值下的变化.

2.1.1 在稳定状态下

首先研究脑动脉瘤在稳定状态下系统的特征, 参量值取为 $\mu = 0.1, \alpha = 1, \beta = 3, \gamma = 2, F = 0.01, \omega = 1$.

在上述给定的参量值下系统 Lyapunov 指数随时间的变化曲线如图 1(a) 所示. 从图 1(a) 可以看出, 当 $t > 10$ 时, $L_1 < 0, L_2 < 0, L_3 = 0$, 表明系统是稳定的. 为证实这一点, 图 1(b)—(e) 分别给出了系统的血流变化曲线、相图、时间历程及 Poincaré 截面. 从图 1(b) 可以看出, x 和 \dot{x} 经过一小段时间后马上被限制在一个小范围内做周期性波动, 振幅很小, 只有 0.2 左右. 由图 1(c) 相图也可以看出, x 和 \dot{x} 收敛于一个小范围内做周期性摆动. 由此可知, 当选取上述参量值时, 脑动脉瘤内的血流流速长时间保持在一个很小且固定的范围内做周期性波动, 其振幅相当小, 可以近似认为流速恒定. 这种流速和流速变化率都稳定的状况对于脑动脉瘤患者是十分有利的, 说明病情稳定, 脑动脉瘤不易破裂.

2.1.2 在不稳定状态下

下面研究在不稳定状态下系统的混沌特征, 生理参量值取为 $\mu = 0.1, \alpha = 0.9, \beta = 3, \gamma = 2, F = 0.1, \omega = 1$. 图 2 是脑动脉瘤在不稳定状态下

的Lyapunov指数谱、 $x-t$ 和 $\dot{x}-t$ 曲线、相图、时间历程、Poincaré截面。

图2(a)给出了参量值为 $\mu = 0.1, \alpha = 0.9, \beta = 3, \gamma = 2, F = 0.1, \omega = 1$ 时的Lyapunov指数谱,由此可以看出,当 $t > 50$ 时, $L_1 > 0, L_2 < 0, L_3 = 0$,脑动脉瘤系统处于混沌状态.由图2(b)—(e)给出的血流变化、相图、时间历程及Poincaré截面可见,此时系统的运动轨线非常混乱.从图2(b)可以看出, x 和 \dot{x} 随着时间增长并没有表现出恒定或者稳定的周期,而是毫无规则,振幅不定,摆动剧烈. \dot{x} 在 -1 至 2 之间随意摆动说明动脉瘤内的血液流速紊乱.从图2还可以看出:相图中的轨线并不收敛,出现了混沌的情况;时间历

程图很不规则,没有确定的规律;Poincaré截面具有一定的形状和层次结构.这些特征充分说明在上述参量取值条件下系统(2)处于混沌运动状态.

2.2 影响混沌的因素分析

在分析脑动脉瘤内产生血流混沌的因素时,我们主要是从 μ, F, ω 等生理参量上进行研究,这些生理参量表征了不同的血流流动状态,通过改变它们的取值研究系统是否产生混沌.我们采用控制变量法进行分析.以生理参量 $\mu = 0.1, \alpha = 1, \beta = 3, \gamma = 2, F = 0.01, \omega = 1$ 作为初始值,当研究某一参量时,只让该参量变化,而其余参量保持正常值.

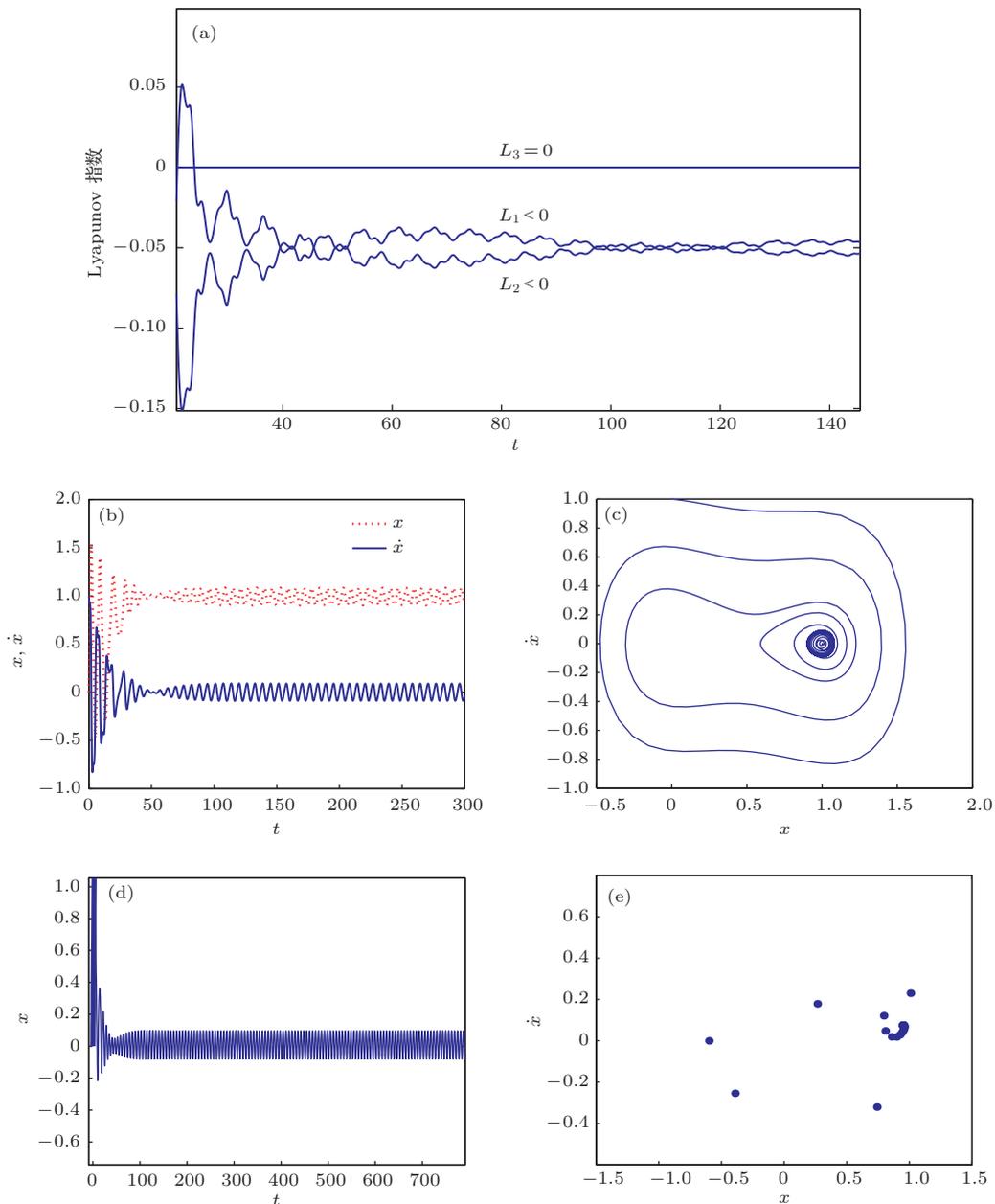


图1 脑动脉瘤在稳定状态下的Lyapunov指数谱、 $x-t$ 和 $\dot{x}-t$ 曲线、相图、时间历程、Poincaré截面 (a) Lyapunov指数谱; (b) $x-t$ 和 $\dot{x}-t$ 曲线; (c) 相图; (d) 时间历程; (e) Poincaré截面

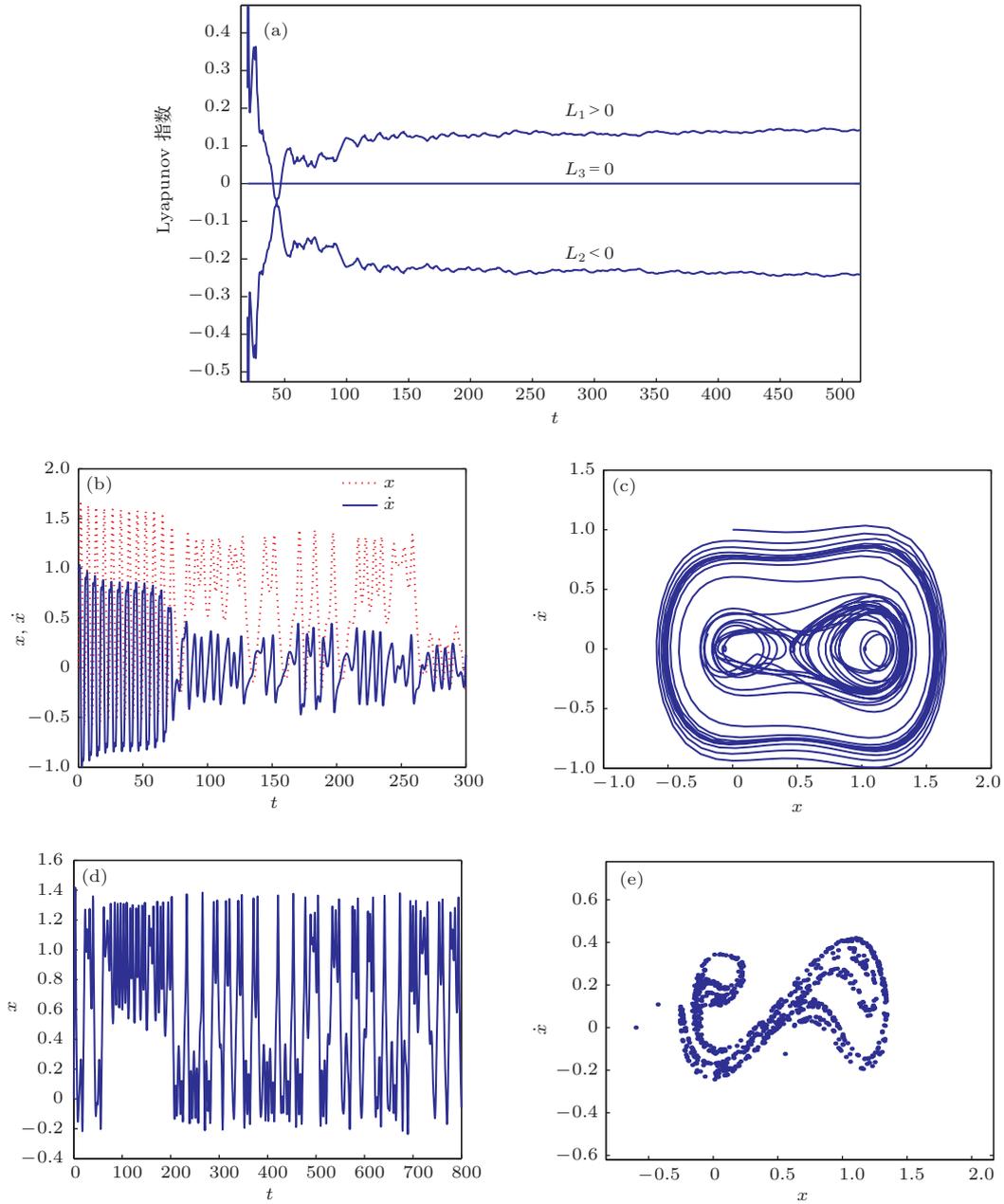


图2 脑动脉瘤在不稳定状态下的Lyapunov指数谱、 $x-t$ 和 $\dot{x}-t$ 曲线、相图、时间历程、Poincaré截面
(a) Lyapunov指数谱; (b) $x-t$ 和 $\dot{x}-t$ 曲线; (c) 相图; (d) 时间历程; (e) Poincaré截面

2.2.1 脉冲压的影响

将系统(2)中生理参量取初始值 $\mu = 0.1$, $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$, $\omega = 1$, 得到

$$\ddot{x} + 0.1\dot{x} + x - 3x^2 + 2x^3 = F \cos t. \quad (3)$$

这里脉冲压的影响主要是指血压对脑动脉瘤系统的影响. 我们应用混沌分岔图(Feigenbaum图)来研究脉冲压 F 对脑动脉瘤系统的影响.

图3是脑动脉瘤系统的 $x-F$ 混沌分岔图, 图4是脑动脉瘤系统的 $\dot{x}-F$ 混沌分岔图. 从图3和图4可以看出, 流速 x 和流速变化率 \dot{x} 一直处于混

沌状态. 脉冲压 F 的微小改变都能显著地影响混沌的状态. 这说明, 当血压保持稳定时, 脑动脉瘤内的血流也比较平稳. 反之, 如果血压不稳定, 就会导致瘤内的血流处于混沌状态, 脑动脉瘤易发生破裂.

2.2.2 血管阻力和脑动脉瘤阻力的影响

将系统(2)中生理参量取初始值 $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$, $F = 0.01$, $\omega = 1$, 得到

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} + x - 3x^2 + 2x^3 = 0.01 \cos t. \quad (4)$$

这里的血管阻力集中体现在阻尼系数 μ 上, 该系数表征了血管和动脉瘤对血液流动的阻碍作用. 实际上, 动脉瘤对血管阻抗产生的影响微小, 可以忽略, 即可将 R_1 和 R_3 视作常数, 变化的仅仅是动脉瘤所形成的阻抗 R_2 . 在医学研究上, 当动脉瘤较大时, R_2 变大, 使 μ 变小. 下面控制其他参量不变, 只是 μ 从 0 到 2 变化, 得到相应的混沌分岔图. 图 5 是脑动脉瘤系统的 $x-\mu$ 混沌分岔图. 从图 5 可以看出: 当 $\mu > 0.2$ 时, 流速收敛值在 $x = 0$ 和 $x = 1$ 附近做周期摆动, 并且 μ 越大越稳定; 当 $\mu < 0.2$ 时, 则会进入混沌状态. 图 6 是脑动脉瘤系统的 $\dot{x}-\mu$ 混沌分岔图. 从图 6 可以看出: 当 $\mu > 0.2$ 时, 流速变化率在 $\dot{x} = 0$ 附近做周期摆动, 说明脑动脉瘤系统稳定; 当 $\mu < 0.2$ 时, 则会进入混沌状态. 由此可知: 动脉瘤越大, 其阻尼系数 μ 越小, 瘤内血流越容易进入混沌状态; 动脉瘤很小时, 血流较稳定.

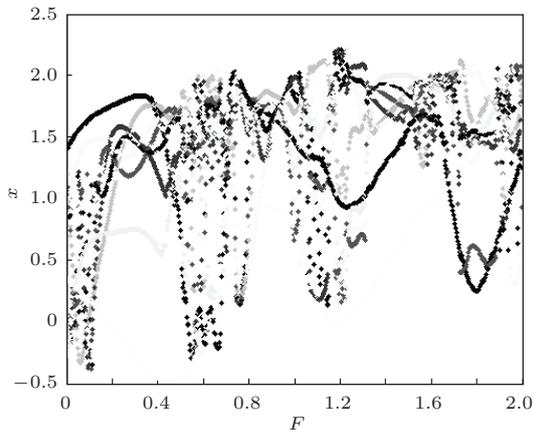


图 3 脑动脉瘤系统的 $x-F$ 混沌分岔图

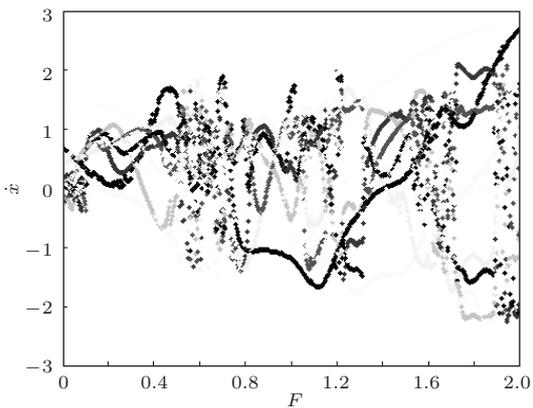


图 4 脑动脉瘤系统的 $\dot{x}-F$ 混沌分岔图

2.2.3 心率倒数的影响

将系统 (2) 中生理参量取初始值 $\mu = 0.1$, $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$, $F = 0.01$, 得到

$$\ddot{x} + 0.1\dot{x} + x - 3x^2 + 2x^3 = 0.01 \cos(\omega t). \quad (5)$$

心率倒数是指中枢血压的频率, 即心脏跳动的频率. 图 7 是脑动脉瘤系统的 $x-\omega$ 混沌分岔图, 图 8 是脑动脉瘤系统的 $\dot{x}-\omega$ 混沌分岔图. 从图 7 和图 8 可以看出, 流速和流速变化率进入周期摆动阶段.

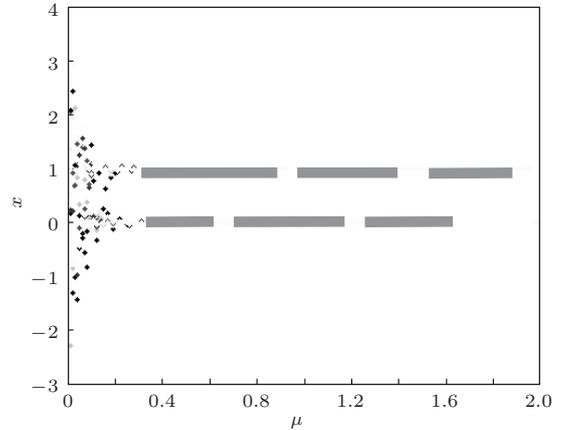


图 5 脑动脉瘤系统的 $x-\mu$ 混沌分岔图

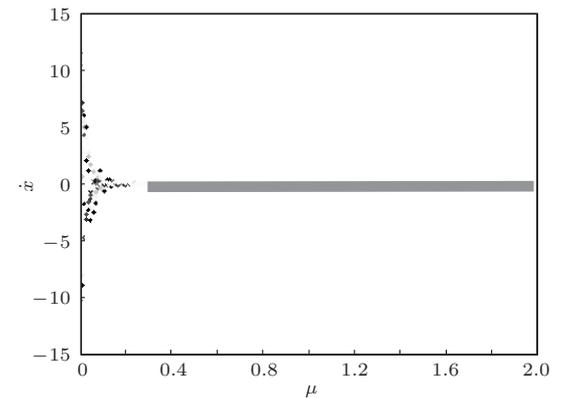


图 6 脑动脉瘤系统的 $\dot{x}-\mu$ 混沌分岔图

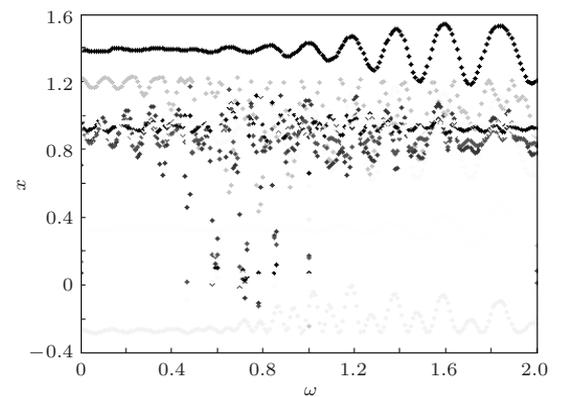


图 7 脑动脉瘤系统的 $x-\omega$ 混沌分岔图

2.2.4 脑动脉瘤系统的混沌状态特征

就系统 (2) 的构造而言, 在极混乱的速度场中脑动脉瘤更易发生破裂. 由以上分析可知, 系统 (2) 的混沌状态表征的是血流不稳定, 适当调整 F, μ, ω

这三个参量的取值, 就可以避免系统出现混沌. 我们发现脑动脉瘤系统的混沌状态有以下两个特征: 一是混沌状态的出现具有拟周期性; 二是混沌不是一个特殊状态, 而是普遍存在的, 只是混乱程度上有所区别.

3 利用随机相位实现脑动脉瘤系统的混沌控制

为了研究随机相位对脑动脉瘤系统的影响, 在系统(2)中加入随机相位后将其改写成如下的形式:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \mu\dot{x} + \alpha x - \beta x^2 + \gamma x^3 \\ = F \cos(\omega t + \sigma\xi(t)). \end{aligned} \quad (6)$$

这里 $\xi(t)$ 为标准 Gauss 白噪声, σ 为其强度. $\xi(t)$ 满足 $E\xi(t) = 0$, $E\xi(t)\xi(t + \tau) = \delta(\tau)$, 其中 $\delta(t)$ 为 Dirac δ 函数. 将系统(6)改写成如下二阶线性方程组:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = -\mu x_2 - \alpha x_1 + \beta x_1^2 - \gamma x_1^3 \\ + F \cos(\omega t + \delta\xi(t)). \end{aligned} \quad (7)$$

选取参量值 $\mu = 0.1$, $\alpha = 0.9$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$, $F = 0.1$, $\omega = 1$, 则系统(7)变为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -0.1x_2 - 0.9x_1 + 3x_1^2 - 2x_1^3 \\ + 0.1 \cos(\omega t + \delta\xi(t)). \end{aligned} \quad (8)$$

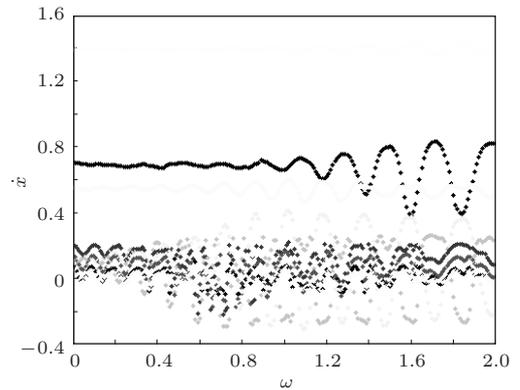


图8 脑动脉瘤系统的 x_1 - ω 混沌分岔图

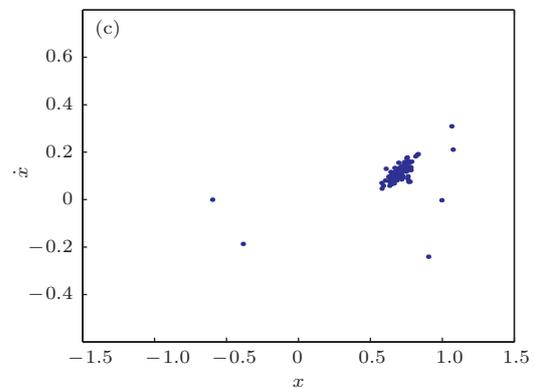
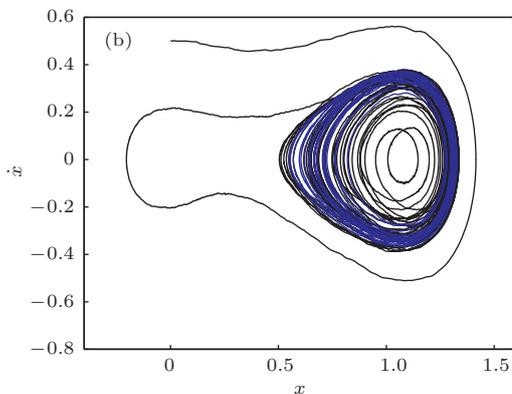
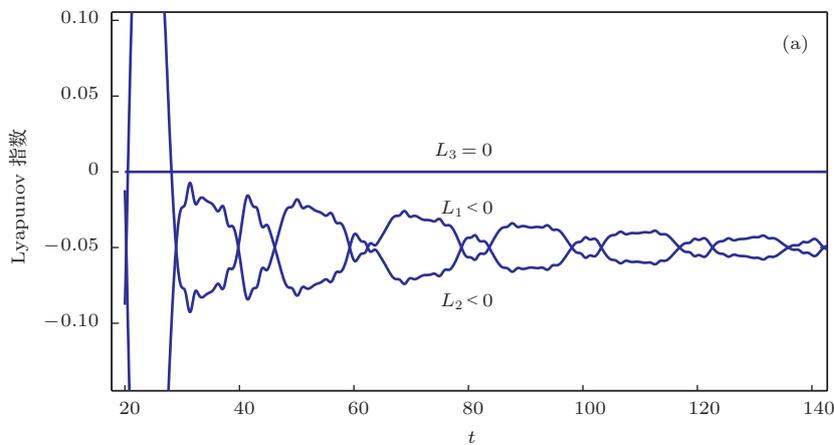


图9 加入随机相位后脑动脉瘤的 Lyapunov 指数谱、相图、Poincaré 截面 (a) Lyapunov 指数谱; (b) 相图; (c) Poincaré 截面

本文选取了不同的噪声强度进行模拟, 噪声强度 σ 依次取为 0.000001, 0.00001, 0.0001, 0.001, 0.002, 0.0025, 0.004, 0.005, 0.01, 0.02, 0.05, 1 dB. 考虑到随机因素的影响, 数值模拟多次, 求得系统 Lyapunov 指数谱. 从模拟结果看, 选取噪声强度在临界值 $\sigma_c = 0.0025$ dB 左右, 能够使系统在较短的时间达到稳定状态, 且系统的摆动幅度较小. 因此, 我们取噪声强度 $\sigma = 0.0025$ dB, 其他参量取值条件为 $\mu = 0.1, \alpha = 0.9, \beta = 3, \gamma = 2, F = 0.1, \omega = 1$, 对系统进行混沌控制, 得到系统 (8) 的 Lyapunov 指数谱、相图和 Poincaré 截面如图 9 所示.

将图 9 与图 2 进行对比可以看出, 在对系统 (2) 进行随机相位控制后, 原来系统在相空间内混乱的相轨被控制成为周期轨道, Poincaré 截面上的混沌吸引子变为稳定吸引子, 当 $t > 30$ 时 Lyapunov 指数随时间的推移没有出现正数. 这说明利用随机相位可以对脑动脉瘤系统进行控制.

4 结 论

本文研究了稳定和不稳定两种生理状态下脑动脉瘤系统的血流现象. 研究表明, 当个体处于这两种不同生理状态时, 会出现两种不同的结果, 一种是血流运行为有序周期摆动, 另一种是血流运行为无序运动. 利用控制变量法研究了各个参量对脑动脉瘤系统的影响, 说明脑动脉瘤在极混乱的速度场中更易破裂. 最后, 利用随机相位控制方法对脑动脉瘤系统进行控制. 对 Lyapunov 指数谱、相图、Poincaré 截面的分析表明, 随机相位的扰动能够实现混沌的控制, 使脑动脉瘤系统从混沌状态转变为有序状态. 另外, 随机相位控制在强度较小的情况下即可实现, 这在实际使用中既可节省能量, 同时也更为方便简单.

参考文献

[1] Austin G 1971 *Math. Biosci.* **11** 163

[2] Hillen B, Hoogstraten H W, Post L 1986 *J. Biomech.* **19** 187
 [3] Nieto J J, Torres A 1995 *J. Biol. Syst.* **3** 653
 [4] Cao J D, Liu T Y 1993 *J. Biomath.* **8** 9 (in Chinese) [曹进德, 刘天一 1993 生物数学学报 **8** 9]
 [5] Nieto J J, Torres A 2000 *J. Neurosci.* **177** 18
 [6] Feng C H 1998 *J. Biomath.* **13** 61 (in Chinese) [冯春华 1998 生物数学学报 **13** 61]
 [7] Yang Q G, Jiang Y L 2000 *J. Biomath.* **15** 313 (in Chinese) [杨启贵, 江佑霖 2000 生物数学学报 **15** 313]
 [8] Yang C H, Zhu S M 2003 *Acta Sci. Nat. Univ. Sunyatseni* **42** 1 (in Chinese) [杨翠红, 朱思铭 2003 中山大学学报 (自然科学版) **42** 1]
 [9] Ott E, Grelogi C, Yorke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196
 [10] Guan X P, Fan Z P, Peng H P, He Y H 2001 *J. Yanshan Univ.* **25**(Supl) 1 (in Chinese) [关新平, 范正平, 彭海鹏, 何宴辉 2001 燕山大学学报 **25**(Supl) 1]
 [11] Zhou X A, Qian G B, Qiu S S 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3974 (in Chinese) [周小安, 钱恭斌, 丘水生 2006 物理学报 **55** 3974]
 [12] Yu H J, Zheng N 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3782 (in Chinese) [于洪洁, 郑宁 2007 物理学报 **56** 3782]
 [13] Gong L H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3502 (in Chinese) [龚礼华 2005 物理学报 **54** 3502]
 [14] Zhang X D, Liu X D, Zheng Y, Liu C J 2013 *Chin. Phys. B* **22** 030509
 [15] Gholizadeh H, Hassannia A, Azarfar A 2013 *Chin. Phys. B* **22** 010503
 [16] Min F H, Ma M L 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 210505 (in Chinese) [闵富红, 马美玲 2013 物理学报 **62** 210505]
 [17] Qu Z L, Hu G, Yang G J, Qin G 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 1736
 [18] Lei Y M, Xu W, Xu Y, Fang T 2004 *Chaos Solitons Fractals* **21** 1175
 [19] Xu Y, Mahmoud G M, Xu W, Lei Y M 2005 *Chaos Solitons Fractals* **23** 265
 [20] Li S, Xu W, Li R H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1049 (in Chinese) [李爽, 徐伟, 李瑞红 2006 物理学报 **55** 1049]
 [21] Li Y M, Yu S 2008 *J. Biomath.* **23** 235 (in Chinese) [李医民, 于霜 2008 生物数学学报 **23** 235]
 [22] Peng S H, Li D H, Su Z, Li H D 2010 *Comput. Eng. Appl.* **46** 245 (in Chinese) [彭书华, 李邓化, 苏中, 李华德 2010 计算机工程与应用 **46** 245]
 [23] Xiao J, Ma Z Z, Yang Y H 2013 *Sci. World J.* **2013** 159194

Analysis of the Willis chaotic system and the control of random phase^{*}

Gu Yuan-Feng Xiao Jian[†]

(College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China)

(Received 17 March 2014; revised manuscript received 8 April 2014)

Abstract

In this paper, we investigate the influence of each parameter of Willis chaotic system on the system, and calculate the Lyapunov exponent of Willis chaotic system containing chaotic phase. The analysis of the influence of chaotic phase on the Willis system shows that the random phase can control chaos. We also analyze the differences in intensity among various noises. Finally, the effectiveness of the above method is verified through the analysis of integrating phase portraits and Poincaré surface.

Keywords: cerebral aneurysm, random phase, chaos control

PACS: 05.45.Gg, 05.45.Pq

DOI: [10.7498/aps.63.160506](https://doi.org/10.7498/aps.63.160506)

^{*} Project supported by the Fundamental Scientific Research Foundation for the Central Universities of China (Grant No. CQDXWL-2012-007).

[†] Corresponding author. E-mail: xj4448@126.com