

# 基于不确定性变时滞分数阶超混沌系统的滑模自适应鲁棒的同步控制\*

吴学礼<sup>†</sup> 刘杰 张建华 王英

(河北科技大学电气工程学院, 石家庄 050000)

(2014年2月26日收到; 2014年4月30日收到修改稿)

针对一类含有不确定参数的时变时滞系统的同步控制问题, 提出了一种滑模自适应鲁棒控制方法. 基于 Lyapunov 稳定性理论和滑模自适应控制方法, 设计出滑模自适应鲁棒控制器和参数自适应率. 所设计的单一控制器适用于一类分数阶超混沌系统的同步性控制问题, 它不仅具有较强的抗噪声能力而且对于时变时滞系统也具有较好的控制能力, 因此该控制器具有较好的实用价值. 此外, 通过在系统的输入量中引入一个补偿量, 用以消除系统中所存在的不确定性和外界扰动的影响, 从而实现不确定性分数阶超混沌系统的同步, 并且将系统的同步误差控制在任意小范围内. 最后, 对带有外界噪声扰动、系统参数不确定的时变时滞 Chen 分数阶超混沌系统进行了数值仿真, 经过短暂的时间, 响应系统与驱动系统同步, 进而验证了所提出的控制方法的有效性.

**关键词:** 分数阶超混沌系统, 滑模自适应鲁棒控制, 不确定性变时滞系统

**PACS:** 05.45.Pq, 05.45.-a, 05.45.Xt

**DOI:** 10.7498/aps.63.160507

## 1 引言

分数阶微积分的研究距今已有300多年的历史, 其发展几乎与整数阶微积分同步, 但将其应用到物理学和工程学的研究热潮还是最近几十年兴起的<sup>[1,2]</sup>. 分数阶微分方程是指微分阶次可以是任意的或是分数的方程, 它扩展了整数阶微分方程的描述能力, 是整数阶微分方程的推广<sup>[3,4]</sup>. 分数阶微分方程不仅为研究提供了新的数学工具, 而且为系统提供了更完善的数学模型<sup>[5,6]</sup>. 一方面, 在自然界及许多科学技术领域中存在大量的相似于整数阶微积分动力学描述的分数维现象; 另一方面, 在信息通信加密、生物分子工程、细胞组织工程等一些新兴领域<sup>[7,8]</sup>, 采用传统的微分方程作为动态系统建模的方法存在很大的局限性<sup>[9]</sup>, 分数阶微积分可以提供一种非线性运算模型<sup>[10]</sup>, 通常能取得比较满意的效果.

混沌理论由于其其在信息、生物、物理、化学等领域具有潜在的应用价值而得到了广泛的研究<sup>[11,12]</sup>. 这些研究主要集中于整数阶混沌系统. 然而实际的系统通常是以分数阶形式存在的<sup>[13,14]</sup>, 整数阶混沌系统是对实际混沌系统的理想化处理, 因此研究分数阶混沌系统更具有普遍意义和实用性. 目前人们提出了许多分数阶混沌系统的同步控制方法<sup>[15]</sup>, 如驱动-响应法、滑模控制法、Lyapunov 方程法、自适应控制法、主动控制法、非线性反馈控制法和广义同步法等<sup>[16-22]</sup>. 滑模自适应鲁棒控制不仅具有较快的响应性、良好的动态特性和对外界变化的不灵敏性, 还可对系统中存在的不确定性进行控制以及具有良好的鲁棒性等很多诱人的优点.

最近, 文献<sup>[10]</sup>采用滑模控制法实现了一类三维分数阶混沌系统的同步, 但其控制系统简单, 并且没有考虑在现实应用中可能出现的系统参数未知, 外界对系统的扰动以及时变时滞对系统同步性

\* 国家自然科学基金(批准号: 61273188)和河北省自然科学基金(批准号: F2012208075)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: wuxueli@hebest.edu.cn

的影响. 文献[13]采用滑模控制法实现了分数阶类 Lorenz 系统的同步, 但是其缺乏考虑通信以及自动控制过程中存在的时变时滞性问题, 然而这些问题在现实生活中很难避免. 因此, 研究不确定性变时滞分数阶超混沌系统的同步控制更具有一般性.

针对分数阶混沌系统同步控制方法中存在的不足 [5-24], 根据整数阶混沌系统的滑模自适应同步方法, 本文提出了不确定性变时滞分数阶超混沌系统的滑模自适应鲁棒控制的同步方法, 采用单一控制器实现了分数阶超混沌系统的滑模自适应鲁棒同步. 并且, 针对一类分数阶超混沌系统控制中所存在的时变时滞性、外界扰动以及系统参数不确定性, 采用此控制器也得到了有效的解决. 数值模拟结果验证了本文方法的有效性.

## 2 分数阶超混沌系统

本文所研究的分数阶超混沌系统如下:

$$D_t^q x = Ax(t) + f(x(t), x(t-h(t)))$$

$$(x(0) = x_0, 0 < q < 1). \quad (1)$$

根据分数阶微分算子条件, 系统状态初值  $x(0)$  已知,  $x(0) = x_0$ , 所以选用 Caputo 微分算子 [23]  $D_t^q$  ( $D_t^q = d^q/dt^q$ ) 作为系统微分算子.  $x(t)$  为系统的状态变量,  $x(t) \in \mathbf{R}^n$ ;  $x_0$  为初始值; 系统矩阵  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 非线性函数  $f(x(t), x(t-h(t)))$  为  $n \times 1$  矩阵; 变时滞  $h(t)$  满足  $0 \leq h(t) \leq h$ ,  $|\dot{h}(t)| \leq d \leq 1$ .

响应系统为

$$D_t^q y = Ay(t) + f(y(t), y(t-h(t)))$$

$$+ \Delta + u \quad (y(0) = y_0, 0 < q < 1). \quad (2)$$

这里  $y$  为系统的状态变量,  $y \in \mathbf{R}^n$ ;  $y_0$  为初始值; 系统矩阵  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 非线性函数  $f(y(t), y(t-h(t)))$  为  $n \times 1$  矩阵; 变时滞  $h(t)$  满足  $0 \leq h(t) \leq h$ ,  $|\dot{h}(t)| \leq d \leq 1$ ;  $u$  为系统控制的输入,  $u \in \mathbf{R}^n$ ; 不确定项  $\Delta$  为  $n \times 1$  矩阵,  $\Delta = [\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n]^T$ . 假定不确定项有界且满足  $\|\Delta_i\| \leq \rho_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , 其中  $\rho_i$  为已知常数, 记  $\rho = [\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n]^T$ .

令  $e_i = y_i - x_i$ , 则误差系统为

$$D_t^q e = Ae(t) + f(y(t), y(t-h(t)))$$

$$- f(x(t), x(t-h(t))) + \Delta + u. \quad (3)$$

进一步, 令  $D_t^q e = g(e) + \Delta$ , 系统 (3) 可写为

$$D_t^q e_1 = g_1(e_1, e_2, e_3, e_4),$$

$$D_t^q e_2 = g_2(e_1, e_2, e_3, e_4),$$

$$D_t^q e_3 = g_3(e_1, e_2, e_3, e_4),$$

$$D_t^q e_4 = g_4(e_1(t-h(t)), e_2, e_3, e_4) + \Delta_4. \quad (4)$$

**假设 1** 对于分数阶超混沌系统  $D_t^q x = Ax(t) + f(x(t), x(t-h(t)))$ , 若系统 (3) 和系统 (4) 在  $e_4 = 0$  的邻域内光滑连续, 并且

$$D_t^q e_1 = g_1(e_1, e_2, e_3, 0),$$

$$D_t^q e_2 = g_2(e_1, e_2, e_3, 0),$$

$$D_t^q e_3 = g_3(e_1, e_2, e_3, 0) \quad (5)$$

满足  $e_1 = 0, e_2 = 0$ , 则  $e_3 = 0$ , 于是在  $e_4 = 0$  的邻域内, 系统误差是一致指数渐近稳定的.

**假设 2** 对于误差系统 (3), 存在正数  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4$  并满足

$$g_4(e_1, e_2, e_3, e_4)$$

$$\leq \lambda_1 |e_1(t-h(t))| + \lambda_2 |e_2| + \lambda_4 |e_4|. \quad (6)$$

为了使误差系统稳定在平衡点  $e = 0$  (即系统同步) 可采用如下控制法:

$$D_t^q e_1 = g_1(e_1, e_2, e_3, e_4),$$

$$D_t^q e_2 = g_2(e_1, e_2, e_3, e_4),$$

$$D_t^q e_3 = g_3(e_1, e_2, e_3, e_4),$$

$$D_t^q e_4 = g_4(e_1(t-h(t)), e_2, e_3, e_4) + \Delta_4 + u. \quad (7)$$

本文所设计的控制器为

$$u = u_1 + u_2. \quad (8)$$

$$u_1 = -(\hat{k}_1 |e_1| + \hat{k}_2 |e_2| + \hat{k}_4 |e_4|) \text{sign}(s)$$

$$- rs + \delta. \quad (9)$$

这里,  $s$  为滑模面,

$$s = D_t^{q-1} e_4 + \int_0^t c_4 e_4(\tau) d\tau, \quad (10)$$

其中  $c_4$  为常数;  $r$  为一个任意小的正常数;  $\hat{k}_1, \hat{k}_2, \hat{k}_4$  分别为自适应估计参数  $k_1, k_2, k_4$  的估计值,  $\hat{k}_1, \hat{k}_2, \hat{k}_4$  分别为  $k_1, k_2, k_4$  的自适应率,

$$\dot{\hat{k}}_1 = |e_1| |s|,$$

$$\dot{\hat{k}}_2 = |e_2| |s|,$$

$$\dot{\hat{k}}_4 = |e_4| |s|; \quad (11)$$

$\delta$  为引入的不确定项的控制补偿量,

$$\delta = [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n]^T$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon} [\rho_1^2 s, \rho_2^2 s, \dots, \rho_n^2 s]^T$$

( $\varepsilon$  为任意小正数).

$$u_2 = (\beta|e_1(t)| - [1 - d]\beta|e_1(t - h)|)|s|, \quad (12)$$

其中  $\beta = \frac{\lambda_1}{1 - d}$ .

**定理** 对于从任意值出发的受控误差系统, 当  $t \rightarrow \infty$ , 其轨线收敛于零, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i = 0 (i = 1, 2, 3, 4)$ , 在滑模自适应控制器的作用下分数阶系统渐近同步.

**证明** 当系统发生滑模运动时, 所设计的滑模面  $s$  需满足如下条件:

$$s = D_t^{q-1} e_4 + \int_0^t c_4 e_4(\tau) d\tau = 0, \quad (13)$$

$$\dot{s} = D_t^q e_4 + c_4 e_4 = 0, \quad (14)$$

由此可得

$$D_t^q e_4 = -c_4 e_4.$$

显然选取  $c_4 > 0$ , 误差  $e_4$  渐近稳定, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_4 = 0. \quad (15)$$

由假设1可知, 在  $e_4 = 0$  的邻域内,  $e_1, e_2$  满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_1 = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} e_2 = 0$  时,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_3 = 0$ , 记  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i = 0 (i = 1, 2, 3, 4)$ . 综上可知  $s = 0$ , 且  $\dot{s} = 0$ .

下面证明从任意初始条件出发的误差系统满足滑模条件  $s = 0$ .

**引理1** 设  $p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , 则  $\forall m, n \geq 0$ , 必有

$$m \cdot n \leq \frac{m^p}{p} + \frac{n^q}{q},$$

其中等号成立的充分必要条件为  $m^p = n^q$ . 此引理即为 Young 不等式.

**证明** 设  $y = l(x) = x^{p-1}$ , 则  $l(x)$  在  $[0, +\infty]$  上是严格单调递增的连续函数, 且  $l(0) = 0$ , 其反函数为  $x = l^{-1}(y) = y^{\frac{1}{p-1}} = y^{q-1}$ , 曲线  $y = l(x)$  与  $x$  轴、 $y$  轴所围成的面积为  $T_1, T_2$ , 两者与矩形面积相比较得到  $m \cdot n \leq T_1 + T_2$ , 并且

$$T_1 = \int_0^m x^{p-1} dx = \frac{m^p}{p},$$

$$T_2 = \int_0^n y^{q-1} dy = \frac{n^q}{q},$$

$$\text{故 } m \cdot n \leq \frac{m^p}{p} + \frac{n^q}{q}.$$

**引理2** 对于自治系统  $\frac{d^q x}{dt^q} = Ax$ , 其中, 系统状态变量  $x = (x_1, x_2, \dots, x_i)$ ,  $A$  为系数矩阵, 当  $0 < q < 1$  时其为真分数阶系统. 如果系数矩阵  $A$  的任意特征值  $\lambda$  满足  $|\arg(\lambda)| \geq \frac{q\pi}{2}$ , 则系统  $\frac{d^q x}{dt^q} = Ax$  稳定 [24].

**证明** 尽管整数阶系统中状态变量  $x$  与分数阶系统中状态变量  $x$  的混沌吸引子不同, 但分数阶系统的系数矩阵  $A$  中的状态变量  $x$  和整数阶系统的系数矩阵  $A$  中的状态变量  $x$  都在实数域内变化. 如果能证明整数阶混沌系统全局稳定时  $A$  的所有特征值都具有不大于零的实部, 则可判定分数阶混沌系统稳定, 然而对于整数阶非线性系统稳定性的判定, 使用的主要依据是 Lyapunov 稳定定理, 所以分数阶超混沌系统中系数矩阵  $A$  的任意特征值  $\lambda$  满足  $|\arg(\lambda)| \geq \frac{q\pi}{2}$  时, 系统  $\frac{d^q x}{dt^q} = Ax$  稳定, 即分数阶混沌系统的稳定性证明可转换为整数阶混沌系统的 Lyapunov 稳定性证明.

选取 Lyapunov 函数为

$$V(t) = \frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{2} \tilde{k}_1^2 + \frac{1}{2} \tilde{k}_2^2 + \frac{1}{2} \tilde{k}_4^2, \quad (16)$$

其中,

$$\begin{aligned} \tilde{k}_1 &= k_1 - \hat{k}_1, \\ \tilde{k}_2 &= k_2 - \hat{k}_2, \\ \tilde{k}_4 &= k_4 - \hat{k}_4. \end{aligned} \quad (17)$$

(16) 式等号两端对时间求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= s\dot{s} + (k - \hat{k})(-\dot{\hat{k}}) \\ &= (D_t^q e_4 + c_4 e_4)s - \tilde{k}_1 \dot{\hat{k}}_1 - \tilde{k}_2 \dot{\hat{k}}_2 - \tilde{k}_4 \dot{\hat{k}}_4 \\ &= (g_4(e_1(t - h(t)), e_2, e_3, e_4) \\ &\quad - \Delta + u + c_4 e_4)s - \tilde{k}_1 \dot{\hat{k}}_1 - \tilde{k}_2 \dot{\hat{k}}_2 - \tilde{k}_4 \dot{\hat{k}}_4 \\ &\leq (\lambda_1 |e_1(t - h(t))| + \lambda_2 |e_2| + \lambda_4 |e_4| \\ &\quad - \Delta - (\hat{k}_1 |e_1| + \hat{k}_2 |e_2| + \hat{k}_4 |e_4|) \text{sign}(s) \\ &\quad + \delta - rs + c_4 e_4)s \\ &\quad - \tilde{k}_1 \dot{\hat{k}}_1 - \tilde{k}_2 \dot{\hat{k}}_2 - \tilde{k}_4 \dot{\hat{k}}_4 + u_2 \\ &\leq (\lambda_1 |e_1(t - h)| - \hat{k}_1 |e_1|)|s| \\ &\quad + (\lambda_2 - \hat{k}_2)|e_2||s| \\ &\quad + (\lambda_4 - \hat{k}_4 + c_4)|e_4||s| + (\delta - \Delta)|s| \\ &\quad - rs^2 - \tilde{k}_1 \dot{\hat{k}}_1 - \tilde{k}_2 \dot{\hat{k}}_2 - \tilde{k}_4 \dot{\hat{k}}_4 \\ &\quad + (\beta|e_1(t)| - [1 - d]\beta|e_1(t - h)|)|s|. \end{aligned} \quad (18)$$

当取  $k_1 = \beta, k_2 = \lambda_2, k_4 = \lambda_4 + c_4$  时, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= (\lambda_1|e_1(t-h)| - \hat{k}_1|e_1|)|s| \\ &\quad + (\lambda_2 - \hat{k}_2)|e_2||s| \\ &\quad + (\lambda_4 - \hat{k}_4 + c_4)|e_4||s| \\ &\quad + (\delta - \Delta)|s| - \tilde{k}_1\dot{k}_1 - \tilde{k}_2\dot{k}_2 - \tilde{k}_4\dot{k}_4 \\ &\quad + \lambda_1|e_1||s| - [1-d]\lambda_1|e_1(t-h)||s| \\ &= (\lambda_1|e_1(t-h)| - \hat{k}_1|e_1|)|s| \\ &\quad + \tilde{k}_2|e_2||s| + \tilde{k}_4|e_4||s| \\ &\quad + (\delta - \Delta)|s| - rs^2 \\ &\quad - \tilde{k}_1\dot{k}_1 - \tilde{k}_2\dot{k}_2 - \tilde{k}_4\dot{k}_4 + \beta|e_1||s| \\ &\quad - [1-d]\beta|e_1(t-h)||s| \\ &\leq (\beta - \hat{k}_1)|e_1||s| - \tilde{k}_1\dot{k}_1 - rs^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{2\varepsilon}[\rho_1^2s, \rho_2^2s, \dots, \rho_n^2s]^T - \Delta^T\right)|s| \\ &\leq -rs^2 + \left(\frac{1}{2\varepsilon}[\rho_1^2s, \rho_2^2s, \dots, \rho_n^2s]^T \right. \\ &\quad \left. - \Delta^T\right)|s|. \end{aligned} \tag{19}$$

根据引理 1 (Young 不等式) 可知

$$\frac{\rho_i^2s^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \geq \rho_i|s| \geq \Delta_i|s|, \tag{20}$$

$i = 1, 2, \dots, n$  且  $\varepsilon$  为任意小正数, 因而有

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -rs^2 + \left(\Delta^T - \sum_{i=1}^n \rho_i\right)|s| \\ &\leq 0. \end{aligned} \tag{21}$$

这表明从任意初始时刻出发的误差系统满足滑模条件. 在滑模面上  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i = 0$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 成立, 从而实现误差系统稳定在平衡点即驱动系统和受控系统达到同步.

### 3 仿真实例

为了验证所提出理论的正确性, 我们首先选取了一个 Chen 分数阶超混沌系统进行数值模拟. Chen 分数阶超混沌系统为

$$\begin{aligned} D_t^q x_1 &= (25\alpha + 10)(x_2 - x_1), \\ D_t^q x_2 &= -0.3x_2 + 0.3x_4, \\ D_t^q x_3 &= -\frac{\alpha + 8}{3}x_3 + x_1x_2, \\ D_t^q x_4 &= -ax_1(t-h(t)) - bx_2 - cx_4, \end{aligned} \tag{22}$$

其中,  $\alpha \in [0, 1], 0 < q < 1$ . 当  $\alpha = 1$  时即为 Chen 系统. 响应系统为

$$\begin{aligned} D_t^q y_1 &= (25\alpha + 10)(y_2 - y_1), \\ D_t^q y_2 &= -0.3y_2 + 0.3y_4, \\ D_t^q y_3 &= -\frac{\alpha + 8}{3}y_3 + y_1y_2, \\ D_t^q y_4 &= -ay_1(t-h(t)) - by_2 - cy_4 \\ &\quad + \Delta_4 + u. \end{aligned} \tag{23}$$

图 1 为 Chen 分数阶超混沌系统的图像.

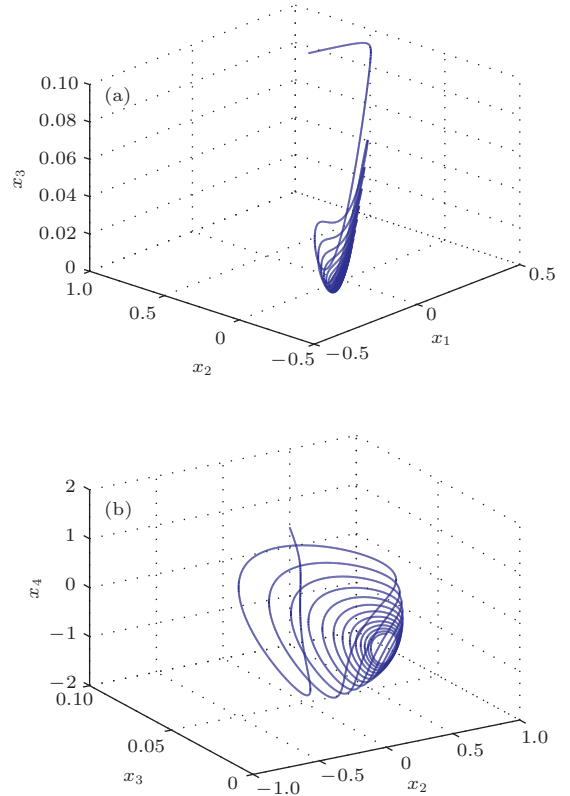


图 1 Chen 分数阶超混沌系统 (a) 状态变量为  $x_1, x_2, x_3$  的模型; (b) 状态变量为  $x_2, x_3, x_4$  的模型

误差系统 ( $e_i = y_i - x_i$ ) 为

$$\begin{aligned} D_t^q e_1 &= (25\alpha + 10)(e_2 - e_1), \\ D_t^q e_2 &= -0.3e_2 + 0.3e_4, \\ D_t^q e_3 &= -\frac{\alpha + 8}{3}e_3 + y_1y_2 - x_1x_2, \\ D_t^q e_4 &= -ae_1(t-h(t)) - be_2 - ce_4 \\ &\quad + \Delta_4 + u. \end{aligned} \tag{24}$$

显然, 若  $e_4 = 0$ , 则系统的二维子系统  $D_t^q e_2 = -0.3e_2 + 0.3e_4$  为

$$D_t^q e_2 = -0.3e_2, \tag{25}$$

所以,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_2 = 0$ . 当  $e_2 = 0$  时, 误差量  $e_1$  是渐近趋于零的, 即  $D_t^q e_1 = -(25\alpha + 10)e_1$ , 因此,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_1 = 0$ , 进而有  $y_1 = x_1, y_2 = x_2$ , 从而二维子系统

$$D_t^q e_3 = -\frac{(\alpha + 8)}{3} e_3. \quad (26)$$

由此可知  $e_3$  是稳定的, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_3 = 0$ . 因此分数阶 Chen 超混沌系统满足假设 1. 其受控误差系统为

$$\begin{aligned} D_t^q e_1 &= (25\alpha + 10)(e_2 - e_1), \\ D_t^q e_2 &= -0.3e_2 + 0.3e_4, \\ D_t^q e_3 &= -\frac{\alpha + 8}{3} e_3 + y_1 y_2 - x_1 x_2, \\ D_t^q e_4 &= -ae_1(t - h(t)) - be_2 - ce_4 + \Delta_4 \\ &\quad - (\hat{k}_1|e_1| + \hat{k}_2|e_2| + \hat{k}_4|e_4|)\text{sign}(s) \\ &\quad - rs - \delta_4. \end{aligned} \quad (27)$$

根据本文的定理, 误差系统在单一控制器的作用下驱动系统与响应系统保持同步.

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 \\ &= -(\hat{k}_1|e_1| + \hat{k}_2|e_2| + \hat{k}_4|e_4|) \\ &\quad \times \text{sign}(s) - rs + \delta_4 + (\beta|e_1(t)| \\ &\quad - [1 - d]\beta|e_1(t - h)|)|s|. \end{aligned} \quad (28)$$

结合分数阶频域近似法、分数阶超混沌的动态仿真法和 Matlab 中的 s 函数进行数值仿真, 选取  $q = 0.9, a = 40, b = -50, c = 1$ , 系统外部扰动不确定项  $\Delta = [\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n]^T$ , 且  $\Delta_i$  的界限为已知, 假定  $\Delta_4 = 2 \cos t$ , 则  $\Delta_i$  界限  $\rho = 1$ . 驱动系统和响应系统的状态变量初始值分别为  $(0.2, 0.5, 0.1, 0.4)^T$  和  $(1, 0.5, 1, 1)^T$ , 变时滞  $h(t) = 0.1 + 0.1 \sin(\pi t)$ . 图 2、图 3 和图 4 分别为  $q = 0.9$  时系统滑模面、系统误差和自适应估计参数  $k_1, k_2, k_4$  的图像.

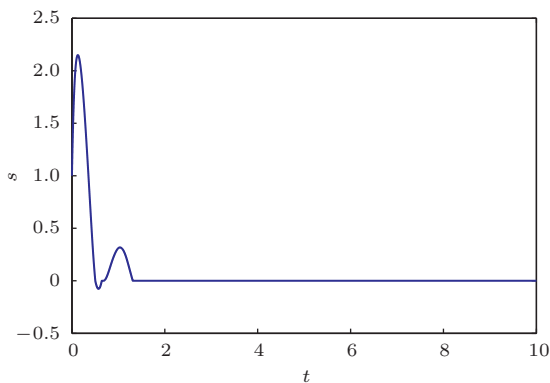


图 2  $q = 0.9$  时的系统滑模面

选取  $q = 0.5, a = 40, b = 50, c = 1$ , 系统外部扰动不确定项  $\Delta = [\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n]^T$ , 且  $\Delta_i$  的界限为已知, 假定  $\Delta_4 = 2 \cos t$ , 则  $\Delta_i$  界限  $\rho = 1$ . 驱动系统和响应系统的状态变量初始值分别为  $(0.2, 0.5, 0.1, 0.4)^T$  和  $(1, 0.5, 1, 1)^T$ , 变时滞  $h(t) = 0.1 + 0.1 \sin(\pi t)$ . 图 5、图 6 和图 7 分别为  $q = 0.5$  时系统滑模面、系统误差以及自适应估计参数  $k_1, k_2, k_4$  的图像.

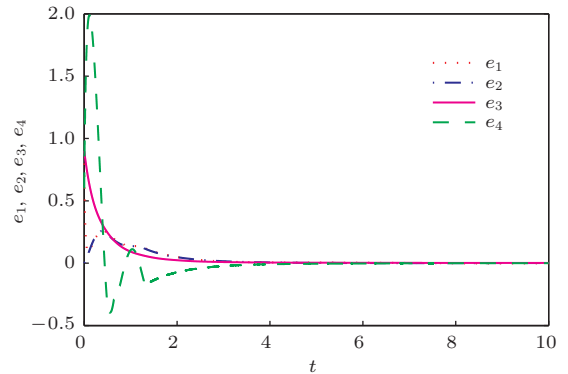


图 3  $q = 0.9$  时的系统误差

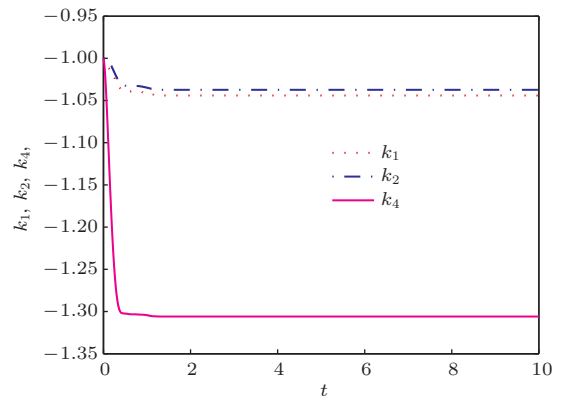


图 4  $q = 0.9$  时的自适应估计参数  $k_1, k_2, k_4$

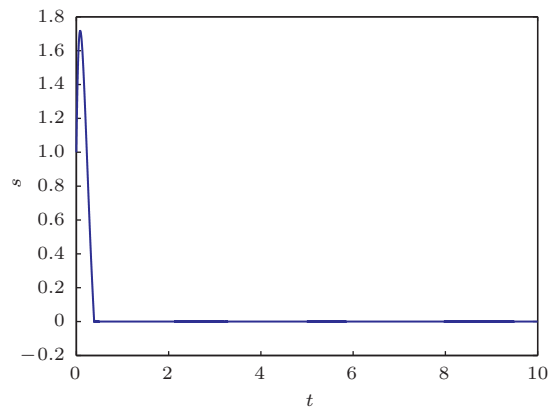


图 5  $q = 0.5$  时的系统滑模面

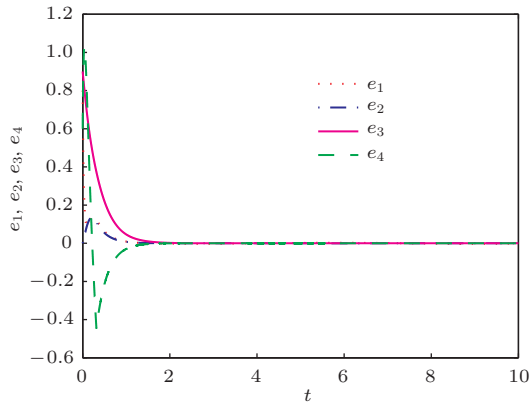


图6  $q = 0.5$  时的系统误差

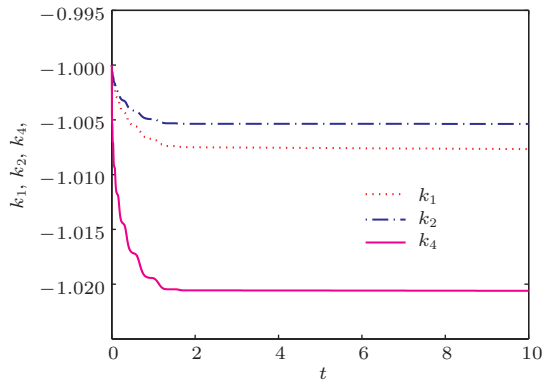


图7  $q = 0.5$  时的自适应估计参数  $k_1, k_2, k_4$

## 4 结 论

基于 Lyapunov 稳定性理论和滑模自适应控制方法, 本文提出了不确定性变时滞分数阶超混沌系统的滑模自适应鲁棒的同步控制方法. 所设计的单一控制器的同步控制方法适用于一类分数阶超混沌系统的同步性控制, 具有较强的抗噪声能力并且对于时变时滞系统也具有良好的控制能力. 因此该控制器的设计较之于其他控制器而言具有更高的实用价值, 同时为整数阶混沌系统的自适应同步方法用于分数阶混沌系统提供了一个范例, 具有一定的理论和现实意义. 数值模拟结果验证了该方法的有效性. 下一步计划将其应用于通信系统的加密中, 对通信信号进行加密, 以验证此方法的实际可操作性和保密性.

## 参考文献

- [1] Pecora L M, Carroll T L 1991 *IEEE Trans. Circ. Syst.* **38** 453
- [2] Tour J M, Tao H 2008 *Nature* **453** 42
- [3] Balasubramaniam P, Lakshmanan S 2009 *Nonlinear Anal. Hybrid Syst.* **3** 749
- [4] Itoh M, Chua L O 2008 *Int. J. Bifur. Chaos* **18** 3183
- [5] Wang D F, Zhang J Y, Wang X Y 2013 *Chin. Phys. B* **22** 100504
- [6] Yuan L G, Yang Q G 2012 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **17** 305
- [7] Li C L, Luo X S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3759 (in Chinese) [李春来, 罗晓曙 2009 物理学报 **58** 3759]
- [8] Zhang R X, Yang S P 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1549 (in Chinese) [张若洵, 杨世平 2010 物理学报 **59** 1549]
- [9] Aghababa M P 2012 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **17** 2670
- [10] Cao H F, Zhang R X 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 050510 (in Chinese) [曹鹤飞, 张若洵 2011 物理学报 **60** 050510]
- [11] Zhen R, Liu J, Wu X L, Wu X J, Zhu Q M, Wang Y, Nouri H 2013 *Int. J. Model. Ident. Control* **20** 164
- [12] Zhu S P, Qian F C, Liu D 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2250 (in Chinese) [朱少平, 钱富才, 刘丁 2010 物理学报 **59** 2250]
- [13] Li R H, Chen W S 2013 *Chin. Phys. B* **22** 040503
- [14] Cui Z H, Cai X J, Zeng J C 2012 *Int. J. Comput. Appl. Technol.* **43** 366
- [15] Zhao L D, Hu J B, Liu X H 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2305 (in Chinese) [赵灵冬, 胡建兵, 刘旭辉 2010 物理学报 **59** 2305]
- [16] Xu B R 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 190506 (in Chinese) [许碧荣 2013 物理学报 **62** 190506]
- [17] Mahmoud G M, Mahmoud E E 2012 *Nonlinear Dyn.* **67** 1613
- [18] Kim S H, Park P, Jeong C 2010 *IET Control Theory Appl.* **4** 1828
- [19] Li Z J, Zeng Y C 2013 *Chin. Phys. B* **22** 040502
- [20] Kiani B A, Fallahi K, Pariz N, Leung H 2009 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **14** 863
- [21] Zhou P, Zhu W 2011 *Nonlinear Anal. RWA* **12** 811
- [22] Ma S Q, Lu Q S, Feng Z S 2010 *Int. J. Nonlinear Mech.* **45** 659
- [23] Qiao Z M 2007 *Ph. D. Dissertation* (Hefei: Anhui University) (in Chinese) [乔宗敏 2007 博士学位论文 (合肥: 安徽大学)]
- [24] Hu J B 2008 *Ph. D. Dissertation* (Taiyuan: North University of China) (in Chinese) [胡建兵 2008 博士学位论文 (太原: 中北大学)]

# Synchronizing a class of uncertain and variable time-delay fractional-order hyper-chaotic systems by adaptive sliding robust mode control\*

Wu Xue-Li<sup>†</sup> Liu Jie Zhang Jian-Hua Wang Ying

(Department of Electrical Engineering, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang 050000, China)

( Received 26 February 2014; revised manuscript received 30 April 2014 )

## Abstract

In view of a class of synchronization problems about uncertain and variable time-delay systems, this paper puts forward a method of adaptive sliding robust control. Based on the Lyapunov stability theory and adaptive sliding mode control methods, the adaptive sliding robust controllers and the parameter adaptive rate are designed. A single controller designed by the synchronous control method is applicable to the synchronizing of a class of fractional-order hyper-chaotic systems, and it has a great ability to resist noise-perturbed. What is more, it can also well control the time-varying time-delay systems. So the controller is of highly practical value. Furthermore, by introducing a certain amount of compensation into the system, the influences of the uncertainty and the noise-disturbance can be eliminated, thus the synchronization of the uncertainty fractional-order hyper-chaotic system is realized. In addition, the control of the synchronous errors of the systems can be stable in arbitrarily small domain. Finally, time-varying and time-delay fractional-order Chen's hyper-chaotic systems with the external noisy disturbances and uncertain parameters are numerically simulated, and the effectiveness of the proposed control method is verified.

**Keywords:** fractional-order hyper-chaotic systems, adaptive sliding robust mode controls, uncertain time-varying-delay systems

**PACS:** 05.45.Pq, 05.45.-a, 05.45.Xt

**DOI:** [10.7498/aps.63.160507](https://doi.org/10.7498/aps.63.160507)

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61273188) and the Natural Science Foundation of Hebei Province, China (Grant No. F2012208075).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [wuxueli@hebust.edu.cn](mailto:wuxueli@hebust.edu.cn)