

连续相位板面形的随机特性研究*

吕晨 张蓉竹†

(四川大学电子信息学院, 成都 610064)

(2014年1月27日收到; 2014年3月26日收到修改稿)

根据连续相位板面形分布的随机特性, 利用自相关函数和相关长度对其面形特性进行了分析. 采用一个高斯型随机分布函数推导了相关长度与连续相位板远场分布之间的解析关系. 利用数值算法计算了连续相位板远场分布的方差和能量利用率, 并计算了不同的相关长度对连续相位板远场分布的具体影响. 结果表明, 连续相位板的相关长度越小, 远场分布均匀性越好, 焦斑形态更加接近于目标焦斑, 同时具有较高的能量利用率.

关键词: 连续相位板, 自相关函数, 相关长度, 远场分布

PACS: 42.25.Fx, 42.60.Jf, 42.25.Bs

DOI: 10.7498/aps.63.164203

1 引言

在惯性约束核聚变(ICF)系统^[1]中, 为了抑制由于高温等离子体而产生的瑞利-泰勒不稳定性^[2], 要求入射光对靶场照射的远场分布尽可能均匀^[3-5]. 激光在传输的过程中, 会受到各种调制的影响而产生光束畸变^[6], 这些畸变会导致光的远场光强分布不均匀, 从而不能满足ICF系统要求, 因此需要对光束进行束匀滑处理^[7]. 20世纪80年代初, 人们提出使用不同类型的相位光学元件对光束进行匀滑处理^[8], 通过相位信息^[9]改善激光光束辐照均匀性^[10]. 目前, 已发展出随机相位板^[11]、相息相位板^[12]、分布相位板^[13]、连续相位板(CPP)^[14]等相位板对激光光束远场分布进行匀滑处理. 在这些光学元件中, CPP由于其拥有相位上连续、较高的能量利用率以及对焦斑较为灵活的控制能力等特点^[15], 已成为目前的研究热点之一. CPP的束匀滑特性取决于该相位板的面形分布^[16], 而目前还尚未见到关于CPP本身面形特性研究的详细报道. 本文对CPP面形的随机特性进行了讨论, 采用自相关函数和相关长度分析元件面形特性, 从而为

CPP的设计和改进行提供理论依据.

2 CPP面形的随机特性

CPP在相位上是严格连续的, 因此, 利用CPP对光束进行匀滑处理能够减少能量的损失, 从而提高能量利用率. 利用CPP对入射的畸变光束进行束匀滑处理的原理如图1所示.

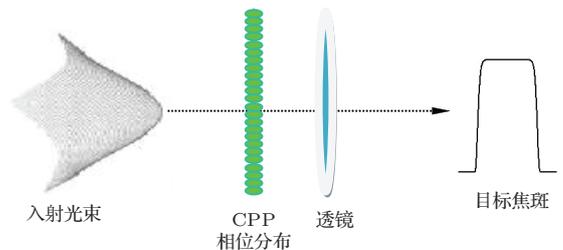


图1 CPP对光束进行匀滑处理的原理图

图2(a)给出了采用改进的Gerchberg-Saxton(G-S)算法^[17]设计得到的CPP的面形相位分布, 图2(b)是在12阶超高斯光束的入射条件下该CPP的远场分布. 这里 x_{nf} 和 y_{nf} 为近场焦斑的空间坐标, x_{ff} 和 y_{ff} 为远场焦斑的空间坐标. 为了得到匀滑效果更好的光束, 要求CPP本身具有尽可能

* 国家高技术研究发展计划(批准号: 2013AA8042038)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: zhang_rz@scu.edu.cn

均匀的远场分布, 这给元件的设计提出了很高的要求.

从图 2 可以明显地看出, CPP 面形的基本特征是分布连续、完全随机, 因此, 可以把该元件表面高度看作一个以空间位置为坐标的随机函数. 这样我们可以利用统计学的相关理论对 CPP 面形进行统计分析.

在统计学中, 将一个有序的随机变量与其自身相比较的相似程度定义为自相关函数.

若相位板面形为 $\varphi(x)$, 则其在空域中的自相关函数可以表示为

$$\begin{aligned} R_\varphi(x) &= \varphi(x) * \varphi^*(-x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta x + x) \varphi^*(\Delta x) d\Delta x \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta x) \varphi^*(\Delta x - x) d\Delta x, \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $\varphi^*(x)$ 为 $\varphi(x)$ 的共轭. (1) 式表明自相关函数 $R_\varphi(x)$ 其实是不同位置 x 处相位板面形 $\varphi(x)$ 与其复共轭的卷积, 在物理上反映了相位板面形 $\varphi(x)$ 在不同位置的相关程度.

对 CPP 而言, 其自相关函数反映了 CPP 面形中不同位置的相关性. 利用 Wiener-Khinchin 定理 [18] 可以得到自相关函数的具体计算式,

$$\begin{aligned} R_\varphi(x) &= F^{-1}\{G(\omega)\} \\ &= F^{-1}\{F\{\varphi(x)\} \cdot F\{\varphi^*(x)\}\}, \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $G(\omega)$ 为面形 $\varphi(x)$ 的功率谱密度, $F\{\cdot\}$ 表示傅里叶变换, $F^{-1}\{\cdot\}$ 表示傅里叶逆变换. 同时, 由功率谱密度的定义式还可得

$$\begin{aligned} R_\varphi(x) &= F^{-1}\{G(\omega)\} \\ &= F^{-1}\left\{\lim \frac{1}{2M} E[|x(\omega)|^2]\right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

利用 (3) 式计算所得到的自相关函数可以给出相关长度的具体定义, 即相关长度为相关函数的半高全

宽. 它能够定量地表示不同随机变量内在相关性的大小.

由于 G-S 算法本身不具备直接的解析分析能力, 因此, 很难使用一个或几个简单的解析公式表征采用 G-S 算法设计得到的 CPP 面形. 为了得到一个具有一般性的面形分析模型, 我们首先借用高斯型 CPP 进行解析推导, 然后将其推广到实际 CPP 面形的分析中. 为了简化公式推导过程, 以如下二维高斯型 CPP 的面形分布为出发点:

$$\varphi(x) = A \cdot \text{random}(-1, 1) * \exp\left[\frac{-x^2}{p_\varphi^2}\right], \quad (4)$$

其中, A 为控制面形深度的系数, p_φ 为面形的相关长度的一半, $\text{random}(-1, 1)$ 表示在区间 $(-1, 1)$ 取值的随机函数数组.

利用 (1) 式对一个 $A = 0.9$, $p_\varphi = 10 \text{ mm}$ 的一维高斯型 CPP 进行模拟. 将高斯型 CPP 面形信息代入 (2) 式求得其自相关函数, 得到的高斯型 CPP 面形及其自相关函数如图 3 所示. 图 3(a) 为一维高斯型 CPP 的相位分布, 图 3(b) 为该相位板的自相关函数分布图.

3 自相关函数对 CPP 面形的影响

下面分析相位板远场分布与相关长度的关系. 当入射光束为平行光时, CPP 的透过率函数

$$t(x) = \exp[jk\varphi(x)], \quad (5)$$

其中 k 为传播系数. 平面光入射条件下该相位板的远场分布函数, 即 CPP 自身的远场分布可以记为

$$\begin{aligned} U_{\text{inf}}(\omega) &= F\{t(x)\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} t(x) \exp[-jk\omega x] dx = T(\omega), \end{aligned} \quad (6)$$

其中, ω 为空间频率, $T(\omega)$ 为 $t(x)$ 的傅里叶谱.

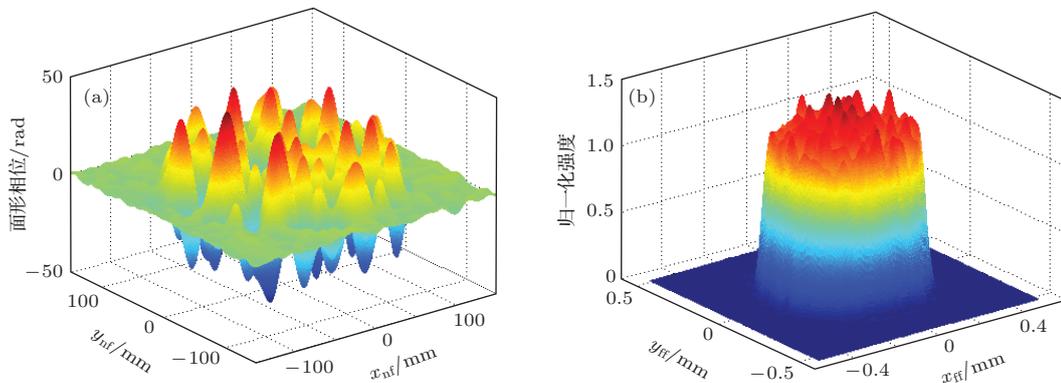


图 2 CPP 的面形相位和远场分布 (a) 相位分布; (b) 远场分布

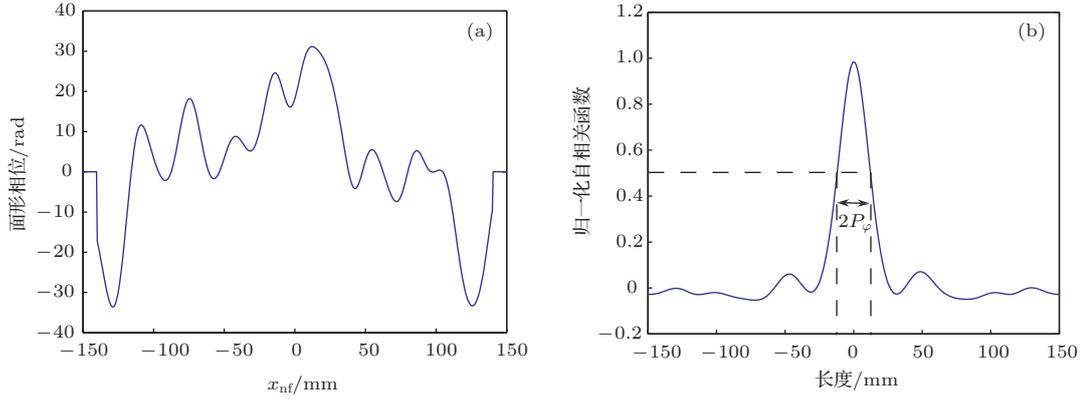


图3 一维高斯型 CPP 的面形相位分布及其自相关函数 (a) 相位分布; (b) 自相关函数

远场光强分布的方差 $D[U_{\text{inf}}(\omega)]$ 反映了远场分布的不均匀性, $D[U_{\text{inf}}(\omega)]$ 可表示为^[19]

$$\begin{aligned} D[U_{\text{inf}}(\omega)] &= E\{\overline{U_{\text{inf}}(\omega)}U_{\text{inf}}(\omega)\} \\ &\quad - \overline{E\{U_{\text{inf}}(\omega)\}}E\{U_{\text{inf}}(\omega)\} \\ &= F\{R_u(x)\} * |T(\omega)|^2 \\ &\quad - |F\{E[u(x)]\} * T(\omega)|^2, \end{aligned} \quad (7)$$

其中, $u(x)$ 为入射光的复振幅, $R_u(x)$ 为入射光的自相关函数. 在平行光入射条件下, $F\{R_u(x)\} = M\delta(\omega)$, 其中 M 是一个归一化常量, 因此, (7) 式可简化为

$$D[U_{\text{inf}}(\omega)] = (M - u_0^2)|T(\omega)|^2, \quad (8)$$

其中 u_0 为入射光光强的期望值, 也是一个常数. 由方差的非负性可知, $D[U_{\text{inf}}(\omega)]$ 与 $|T(\omega)|^2$ 成正比例关系. 综上所述, $|T(\omega)|^2$ 越小, CPP 的傅里叶谱越宽, 输出光的远场强度分布变化越小.

由 (3) 式可以得到

$$\begin{aligned} G(\omega) = F\{R_\varphi\} &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M} \\ &\quad \times \frac{E|T(\omega)|^2}{\left| E\left\{ \int \exp[-jk\omega x] dx \right\} \right|^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

若 $|T(\omega)|^2$ 越小, 则 (9) 式右端的值越小, 这意味着面形 $\varphi(x)$ 的功率谱密度越小, 即 R_φ 的傅里叶谱强度越小时, CPP 输出光的远场分布变化越小.

CPP 面形函数 $\varphi(x)$ 可以表示为一个确定的随机函数, 服从高斯分布. 若 σ 为随机函数的方差, 则 $\varphi(x)$ 的自相关函数为

$$R_\varphi(s) = \sigma^2 \exp\left[-\left(\frac{s^2}{p_\varphi^2}\right)\right]. \quad (10)$$

根据傅里叶空域与频域变换性质^[20], 若

$$h(t) \xleftrightarrow{F\{\cdot\}} H[\omega], \quad \text{则}$$

$$h(at) \xleftrightarrow{F\{\cdot\}} \frac{1}{|a|} H\left[\frac{\omega}{a}\right],$$

如果 $a > 0$, 而 $F\{R_\varphi\}$ 变小, 说明 $|a| > 1$, 由于 s 没变, 所以自相关函数的变化相当于

$$\begin{aligned} R_\varphi(s) &= \sigma^2 \exp\left[-\left(\frac{as}{p_\varphi}\right)^2\right] \\ &= \sigma^2 \exp\left[-\left(\frac{s}{p_\varphi/a}\right)^2\right]. \end{aligned} \quad (11)$$

由于 $a > 1$, 则 $p_\varphi/a < p_\varphi$, 所以 R_φ 的傅里叶谱宽较小时, $\varphi(x)$ 的相关长度较小. 同理可得 R_φ 的傅里叶谱宽较大时, $\varphi(x)$ 的相关长度较大. 由此可知, 面形函数的相关长度较小时, R_φ 的傅里叶谱宽较小, 进而高斯型 CPP 的输出光远场分布变化较小. 虽然无法写出 G-S 算法设计的 CPP 面形分布解析表达式, 但是利用数值计算可以算出其随机面形的统计特性, 因此可以将这一分析方法推广到 G-S 算法设计的 CPP 面形分析中.

4 不同自相关长度 CPP 的远场特性分析

根据 G-S 算法的收敛性, 我们在设计过程中选择循环迭代次数为 10000 次, 得到了 4 个 CPP 面形, 再利用 (2) 式计算出相应的自相关函数, 并通过自相关函数求得所设计的 CPP 的相关长度分别为 8.92, 16.79, 19.62 和 26.84 mm, 它们的面形分布如图 4 所示.

从图 4 可以看出, 在相同的几何尺寸下, 相关长度越小, 表面随机起伏越多, 所包含的相位信息也越多. 图 5 给出了不同相关长度下 CPP 的远场分布.

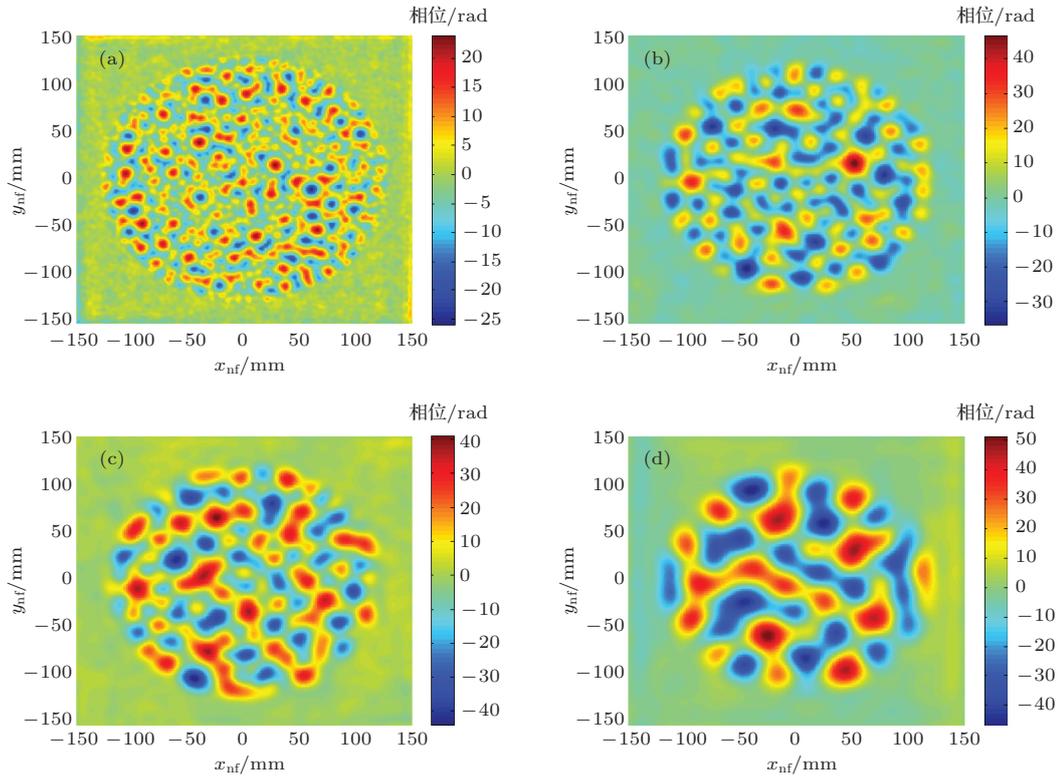


图4 (网刊彩色) 不同相关长度下CPP的面形相位分布 (a) 相关长度为8.92 mm; (b) 相关长度为16.79 mm; (c) 相关长度为19.62 mm; (d) 相关长度为26.84 mm

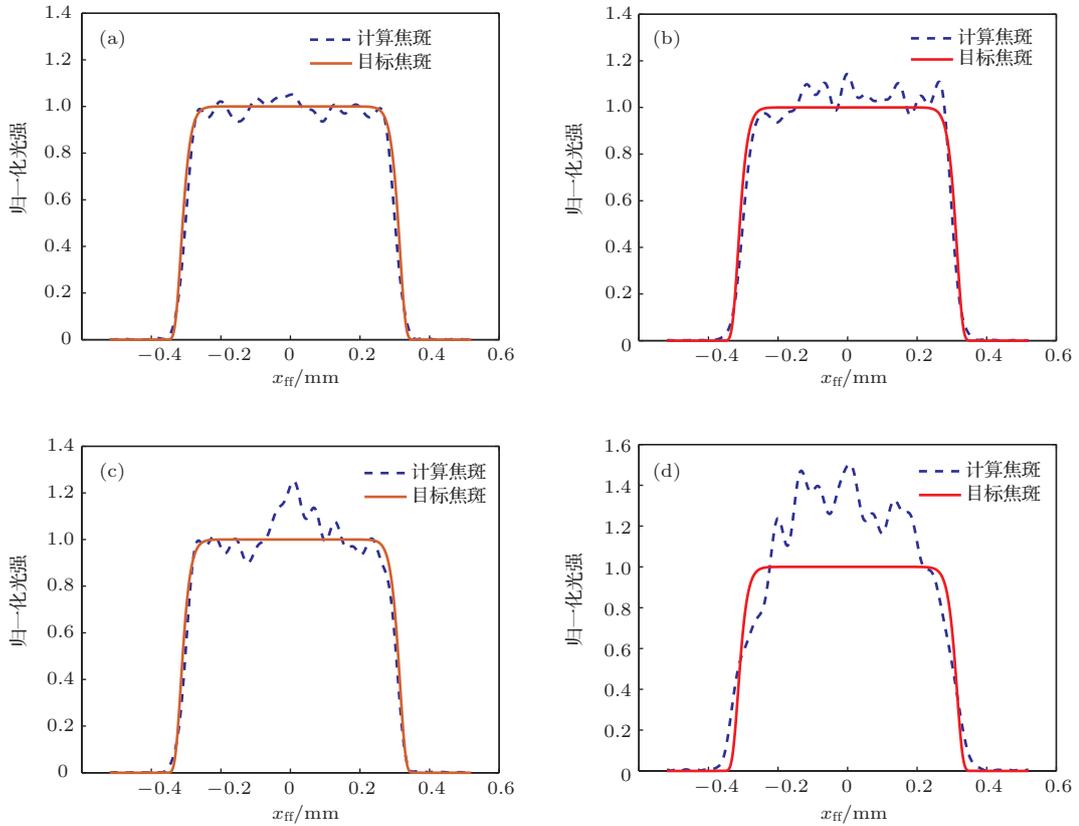


图5 不同相关长度下CPP面形的远场分布 (a) 相关长度为8.92 mm; (b) 相关长度为16.79 mm; (c) 相关长度为19.62 mm; (d) 相关长度为26.84 mm

图 5 还给出了不同相关长度下 CPP 远场分布与目标焦斑形态的比较. 下面使用远场焦斑的顶部分布的方差和能量利用率对 CPP 远场分布进行描述, 结果列于表 1.

表 1 不同相关长度下 CPP 参数比较

相关长度/mm	分布方差	能量利用率
8.92	0.0067	0.9630
16.79	0.0121	0.9592
19.62	0.0133	0.9512
26.84	0.0554	0.9425

从图 5 和表 1 可以看出: 在通光口径相同的情况下, CPP 相关长度越小, CPP 远场分布的方差越小, 意味着其形态更接近于目标焦斑, 能量利用率越大; 而相关长度越大, 远场分布的方差越大, 远场分布更加趋向于不规则, 能量利用率有降低的趋势. 由此可知, 对于相同条件下设计出的 CPP, 相关长度越小时, 其远场焦斑有更好的形态和更高的能量利用率.

5 结 论

本文详细分析和推导了自相关函数和相关长度对于 CPP 的影响, 推导出相关长度与 CPP 面形远场分布的解析关系. 结果表明, 相关长度越小, 输入光经过 CPP 后得到的远场分布变化越小. 给出不同相关长度下 CPP 的面形分布, 并比较了不同相关长度下 CPP 的远场分布的方差和能量利用率. 结果显示: CPP 的相关长度越小, 远场焦斑的顶部越均匀, 焦斑形态越接近于目标焦斑, 同时具有较高的能量利用率.

参考文献

- [1] Zhao Z Q, He W H, Wang J, Hao Y D, Cao L F, Gu Y Q, Zhang B H 2013 *Chin. Phys. B* **22** 104202
- [2] Ye W H, Zhang W Y, He X T 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 762 (in Chinese) [叶文华, 张维岩, 贺贤士 2000 物理学报 **49** 762]
- [3] Lü S Y, Lü B D 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3883
- [4] Lin Z Q, Lei A L, Fan W, Zhou S L, Wang L 2013 *High Power Laser Sci. Eng.* **1** 110
- [5] Kilkenny J D, Glendinning S G, Haan S W, Hammel B A, Lindl J D, Munro D, Remington B A, Weber S V, Knauer J P, Verdon C P 1994 *Phys. Plasmas* **1** 1379
- [6] Huang X X, Gao F H, Yuan Q, Hu D X, Zhang K, Zhou W, Dai W J, Deng X W 2013 *Acta. Phys. Sin.* **62** 205206 (in Chinese) [黄小霞, 高福华, 袁强, 胡东霞, 张崑, 周维, 代万俊, 邓学伟 2013 物理学报 **62** 205206]
- [7] Rothenberg J E, Auerbach J M, Dixit S N, Haan S W, Pollaine S M, Williams W H 1998 *Third International Conference on Solid State Lasers for Application to Inertial Confinement Fusion* (Monterey: SPIE) SUPPL65
- [8] Li J L, Lü B D 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1840
- [9] Wang Y Y, Liu Z J, Liao Q H, Liu S T 2010 *Chin. Phys. B* **19** 054204
- [10] Yao X, Gao F H, Zhang Y X, Wen S L, Guo Y K, Lin X D 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3130 (in Chinese) [姚欣, 高福华, 张怡霄, 温圣林, 郭永康, 林祥棣 2009 物理学报 **58** 3130]
- [11] Kato Y, Mima K, Miyanaga N, Arinaga S, Kitagawa Y, Nakatsuka M 1984 *Phys. Rev. Lett.* **53** 1057
- [12] Dixit S N, Lawson J K, Manes K R, Powell H T, Nugent K A 1994 *Opt. Lett.* **19** 417
- [13] Lin Y, Kessler T J, Lawrence G N 1995 *Opt. Lett.* **20** 764
- [14] Lin Y, Kessler T J, Lawrence G N 1996 *Opt. Lett.* **21** 1703
- [15] Yang C L, Yan H, Wang J, Zhang R Z 2013 *Opt. Express* **21** 11171
- [16] Feng Y J, Lin Z X, Zhang R Z 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 104202 (in Chinese) [冯友君, 林中校, 张蓉竹 2011 物理学报 **60** 104202]
- [17] Lin Z X, Zhang R Z, Yang C L, Xu Q 2010 *High Power Laser Particle Beams* **22** 2634 (in Chinese) [林中校, 张蓉竹, 杨春林, 许乔 2010 强激光与粒子束 **22** 2634]
- [18] Wang Y D, Wang J 2006 *Stochastic Signal Analysis* (2nd ed.) (Beijing: Publishing House of Electronics Industry) pp77-85 (in Chinese) [王永德, 王军 2006 随机信号分析基础 (第二版) (北京: 电子工业出版社) 第 77—85 页]
- [19] Yang C L, Zhang R Z, Xu Q, Ma P 2007 *Appl. Opt.* **47** 1465
- [20] Oppenheim A V, Willsky A S (translated by Liu S T) 1998 *Signals and Systems* (Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press) p223 (in Chinese) [奥本海姆 A V, 威尔斯基 A S 著 (刘树棠译) 1998 信号与系统 (西安: 西安交通大学出版社) 第 223 页]

Surface stochastic characteristics of continuous phase plate*

Lü Chen Zhang Rong-Zhu[†]

(College of Electronics and Information Engineering, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

(Received 27 January 2014; revised manuscript received 26 March 2014)

Abstract

According to the stochastic behavior of the continuous phase plate (CPP) surface shape distribution, the autocorrelation function and the correlation length are used to analyze its surface shape characteristics. A Gaussian random distribution function is used to derive the analytic relation between the correlation length and the far-field distribution of CPP. Numerical algorithm is used to calculate the variance and the energy usage rate of CPP's far-field distribution, and also the specific influence of correlation length on far-field distribution of CPP. The conclusion is that the smaller the correlation length, the better the homogeneity of far-field distribution is, and the closer to the target spot the shape of the focal spot will be, and at the same time the higher the energy usage rate will be.

Keywords: continuous phase plate, autocorrelation function, correlation length, far-field distribution

PACS: 42.25.Fx, 42.60.Jf, 42.25.Bs

DOI: [10.7498/aps.63.164203](https://doi.org/10.7498/aps.63.164203)

* Project supported by the National High Technology Research and Development Program of China (Grant No. 2013AA8042038).

[†] Corresponding author. E-mail: zhang_rz@scu.edu.cn