离散变质量完整系统的Noether对称性与Mei对称性*

王菲菲 方建会† 王英丽 徐瑞莉

(中国石油大学理学院, 青岛 266555)

(2014 年 4 月 10 日收到; 2014 年 4 月 27 日收到修改稿)

本文研究离散变质量完整系统的Noether对称性与Mei对称性. 首先用差分离散变分的方法, 建立起离散变质量完整系统的运动方程和能量演化方程. 然后给出该系统的Noether对称性和Mei对称性的定义及离散Noether守恒量的形式. 得到系统的Noether对称性与Mei对称性导致离散Noether守恒量的条件. 最后举例说明结果的应用.

关键词: 差分离散变分, 变质量, Noether对称性, Mei对称性

PACS: 02.20.Sv, 11.30.–j, 45.05.+x **DOI:** 10.7498/aps.63.170202

1 引 言

力学系统的对称性与守恒量具有重要的理论意义, 对物理、数学、力学等领域都很有价值. 分析力学的近代对称性理论主要有Noether对称性[1], Lie对称性[2]和Mei对称性[3]. 这三种对称性直接或者间接导致的守恒量主要有Noether守恒量、Hojman守恒量以及Mei守恒量. 国内外对这三种对称性及其守恒量的研究已取得了一系列重要成果[4−15].

在连续约束力学系统的动力学理论和对称性与守恒量理论不断完善的基础上, 基于离散模型的离散力学系统的对称性与守恒量理论成为近年来分析力学研究的一个重要方向[16,17], 其主要思想是利用离散力学的变分原理把原来连续的系统离散, 并尽量保留原有系统的结构和性质. 关于离散变分有多种不同的方法.Cadzow[18]在1970年提出了离散变分原理, 给出了离散运动方程.Lee[19,20]把时间看做一个动力学变量, 将其与空间变量一起离散, 给出了差分变分原理, Chen等[21,22]将此变分思想运用于Lagrange系统与Hamilton系统, 得到了离散力学系统的Euler-Lagrange方程、正则方程以及能量演化方程. 文献[23]对各类离散力学系统的对称性与守恒量做了系统的研究. 2002年, 郭汉英等[24,25]将差分看做一个几何对象,提出了差分离散变分方法, 运用这种变分方法, 文献[26]和文献[27]分别研究了相空间与事件空间中离散完整系统的Noether对称性与Mei对称性, 给出了相应的离散守恒量. 2006年, Liu等[28]给出了离散非保守完整力学系统的变分原理, 得到了离散非保守完整系统的动力学方程. Fu等[29]研究了离散非完整动力学系统的Noether对称性, 张宏彬等[30]提出了一种保完整约束力学系统Lie点对称性的差分格式. 本文应用差分离散变分原理, 研究离散变质量完整系统的Noether对称性和Mei对称性, 给出离散形式的Noether守恒量, 得到分别由Noether对称性和Mei对称性导致离散Noether守恒量的条件, 并举例说明结果的应用.

2 系统的离散动力学方程

假设系统由 N 个质点组成, 在 t 时刻, 第 i 个质点的质量为 m_i $(i = 1, 2, \cdots, N)$, 在瞬时 $t + \mathrm{d}t$ 由

* 山东省自然科学基金 (批准号: ZR2011AM012) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: fangjh@upc.edu.cn

质点分离(或并入)的微粒质量为 $\mathrm{d}m_i$, 系统的位形由 n 个广义坐标 q_s $(s=1,\cdots,n)$ 来确定, 质点质量依赖于时间和广义坐标

$$m_i = m_i(t, q_s), \quad (i = 1, 2, \cdots, N). \tag{1}$$

系统的运动微分方程的形式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s + P_s, \quad (s = 1, \cdots, n), \tag{2}$$

其中 $L = L(t, q_s, \dot{q}_s)$ 为系统的 Lagrange 函数, $Q_s = Q_s(t, q_s, \dot{q}_s)$ 为非势广义力, P_s 为广义反推力

$$P_s = \dot{m}_i(\boldsymbol{u}_i + \dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} - \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial m_i}{\partial q_s}, \tag{3}$$

式中的 $\boldsymbol{r}_i$, $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 分别为第 i 个质点的矢径和速度, $\boldsymbol{u}_i$ 为微粒相对第 i 个质点的相对速度.

系统的 Hamilton 作用量可表示为

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_s, \dot{q}_s)\mathrm{d}t. \tag{4}$$

取参数 t 和变量 q_s 的无限小群变换

$$t^* = t + \delta_t t = t + \varepsilon\xi_0(q_s, \dot{q}_s, t),$$

$$q_s^*(t^*) = q_s(t) + \delta_t q_s = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(q_s, \dot{q}_s, t), \tag{5}$$

其中 ε 是无限小参数, δ_t 表示全变分, ξ_0, ξ_s 为无限小群变换的生成元函数. 如果无限小变换是系统 (2) 的广义准对称变换, 则有

$$\delta_t S = -\int_{t_1}^{t_2}(Q_s + P_s)\delta q_s\mathrm{d}t. \tag{6}$$

在离散情况下, t 被离散为间隔为 (t_1, t_2) 的点序列 $\{t_k\}\{k = 1, \cdots, N\}$. 离散的 $q_s(t)$, $Q_s(t, q_s, \dot{q}_s)$, $P_s(t, q_s, \dot{q}_s)$ 和 $L(t, q_s, \dot{q}_s)$ 分别变为

$$\begin{aligned}
q_s^k &= q_s(t_k),\\
Q_s^k &= Q_s\left(t_k, q_s^k, \frac{q_s^{k+1} - q_s^k}{t_{k+1} - t_k}\right),\\
P_s^k &= P_s\left(t_k, q_s^k, \frac{q_s^{k+1} - q_s^k}{t_{k+1} - t_k}\right),\\
L_{\mathrm{D}}^k &= L_{\mathrm{D}}\left(t_k, q_s^k, \frac{q_s^{k+1} - q_s^k}{t_{k+1} - t_k}\right),
\end{aligned}$$

定义离散导数 $\Delta q_s^k = \dfrac{q_s^{k+1} - q_s^k}{t_{k+1} - t_k}$.

取离散时间 t_k 和离散变量 q_s^k 的无限小变换

$$\begin{aligned}
t_k^* &= t_k + \delta_t t_k = t_k + \varepsilon\xi_0^k(q_s^k, \Delta q_s^k, t_k),\\
q_s^{k*} &= q_s^k + \delta_t q_s^k = q_s^k + \varepsilon\xi_s^k(q_s^k, \Delta q_s^k, t_k),
\end{aligned} \tag{7}$$

其中 ε 是无限小参数, ξ_0^k, ξ_s^k 为离散无限小生成元.

在无限小变换 (7) 的作用下, 方程 (4) 和 (6) 分别被离散为

$$S_{\mathrm{D}} = \sum_k (t_{k+1} - t_k)L_{\mathrm{D}}^k, \tag{8}$$

$$\delta_t S_{\mathrm{D}} = -\sum_k (t_{k+1} - t_k)(Q_s^k + P_s^k)\delta q_s^k, \tag{9}$$

δq_s^k 为离散虚位移, 其满足如下关系式:

$$\delta q_s^k = \delta_t q_s^k - \delta_t t_k \Delta q_s^k. \tag{10}$$

将 (8) 式代入 (9) 式, 整理得

$$\begin{aligned}
&\delta_t\Big[\sum_k (t_{k+1} - t_k)L_{\mathrm{D}}^k\Big]\\
&\quad + \sum_k (t_{k+1} - t_k)(Q_s^k + P_s^k)\delta q_s^k\\
&= \sum_k \Big[L_{\mathrm{D}}^k\delta_t(t_{k+1} - t_k) + (t_{k+1} - t_k)\delta_t L_{\mathrm{D}}^k\Big]\\
&\quad + \sum_k (t_{k+1} - t_k)(Q_s^k + P_s^k)\delta q_s^k\\
&= \sum_k \Big[L_{\mathrm{D}}^k\delta_t(t_{k+1} - t_k) + (t_{k+1} - t_k)\delta_t L_{\mathrm{D}}^k\Big]\\
&\quad + \sum_k (t_{k+1} - t_k)(Q_s^k + P_s^k)(\delta_t q_s^k - \delta_t t_k \Delta q_s^k)\\
&= 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

运用关系式

$$\delta_t(t_{k+1} - t_k) = (t_{k+1} - t_k)\cdot\Delta\delta_t t_k. \tag{12}$$

(11) 式可写为

$$\begin{aligned}
&\sum_k (t_{k+1} - t_k)[(\delta_t L_{\mathrm{D}}^k + L_{\mathrm{D}}^k\cdot\Delta\delta_t t_k)\\
&\quad + (Q_s^k + P_s^k)(\delta_t q_s^k - \delta_t t_k \Delta q_s^k)] = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

利用 Leibniz 法则

$$\Delta(f_k g_k) = \Delta f_k\cdot g_k + f_{k+1}\cdot\Delta g_k \tag{14}$$

及关系式

$$\delta_t\Delta q_s^k = \Delta\delta_t q_s^k - \Delta q_s^k \Delta\delta_t t_k. \tag{15}$$

方程 (13) 变为

$$\begin{aligned}
&\sum_k (t_{k+1} - t_k)\bigg[L_{\mathrm{D}}^k\cdot\Delta\delta_t t_k + \frac{\partial L_{\mathrm{D}}^k}{\partial t_k}\delta_t t_k\\
&\quad + \frac{\partial L_{\mathrm{D}}^k}{\partial q_s^k}\delta_t q_s^k + \frac{\partial L_{\mathrm{D}}^k}{\partial \Delta q_s^k}\delta_t\Delta q_s^k\\
&\quad + (Q_s^k + P_s^k)(\delta_t q_s^k - \delta_t t_k \Delta q_s^k)\bigg]\\
&= \sum_k (t_{k+1} - t_k)\bigg[L_{\mathrm{D}}^k\cdot\Delta\delta_t t_k + \frac{\partial L_{\mathrm{D}}^k}{\partial t_k}\delta_t t_k\\
&\quad + \frac{\partial L_{\mathrm{D}}^k}{\partial q_s^k}\delta_t q_s^k + \frac{\partial L_{\mathrm{D}}^k}{\partial \Delta q_s^k}(\Delta\delta_t q_s^k - \Delta q_s^k \Delta\delta_t t_k)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(Q_s^k+P_s^k)(\delta_t q_s^k-\delta_t t_k\Delta q_s^k)\Big]\\
=&\sum_k (t_{k+1}-t_k)\Big[\Delta(L_{\mathrm{D}}^{k-1}\cdot\delta_t t_k)\\
&-\Delta L_{\mathrm{D}}^{k-1}\cdot\delta_t t_k+\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^k}{\partial q_s^k}\delta_t q_s^k+\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^k}{\partial t_k}\delta_t t_k\\
&+\Delta\left(\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^{k-1}}{\partial\Delta q_s^{k-1}}\delta_t q_s^k\right)-\left(\Delta\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^{k-1}}{\partial\Delta q_s^{k-1}}\right)\delta_t q_s^k\\
&-\Delta\left(\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^{k-1}}{\partial\Delta q_s^{k-1}}\Delta q_s^{k-1}\cdot\delta_t t_k\right)\\
&+\Delta\left(\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^{k-1}}{\partial\Delta q_s^{k-1}}\Delta q_s^{k-1}\right)\delta_t t_k\\
&+(Q_s^k+P_s^k)(\delta_t q_s^k-\delta_t t_k\Delta q_s^k)\Big]\\
=&\sum_k (t_{k+1}-t_k)\bigg\{\Delta\bigg(L_{\mathrm{D}}^{k-1}\cdot\delta_t t_k+\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^{k-1}}{\partial\Delta q_s^{k-1}}\delta_t q_s^k\\
&-\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^{k-1}}{\partial\Delta q_s^{k-1}}\Delta q_s^{k-1}\cdot\delta_t t_k\bigg)+\bigg[-\Delta L_{\mathrm{D}}^{k-1}+\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^k}{\partial t_k}\\
&+\Delta\left(\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^{k-1}}{\partial\Delta q_s^{k-1}}\Delta q_s^{k-1}\right)-(Q_s^k+P_s^k)\Delta q_s^k\bigg]\delta_t t_k\\
&+\left(\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^k}{\partial q_s^k}-\Delta\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^{k-1}}{\partial\Delta q_s^{k-1}}+Q_s^k+P_s^k\right)\delta_t q_s^k\bigg\}\\
=&\,0. \qquad (16)
\end{aligned}
$$

考虑到固定边界条件 $\delta_t t_0=\delta_t t_{\mathrm{N}}=0$ 和 $\delta_t q_s^0=\delta_t q_s^N=0$, 由 (16) 式可得

$$
\Delta\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^{k-1}}{\partial\Delta q_s^{k-1}}-\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^k}{\partial q_s^k}=Q_s^k+P_s^k, \qquad (17)
$$

$$
\begin{aligned}
&\Delta L_{\mathrm{D}}^{k-1}-\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^k}{\partial t_k}-\Delta\left(\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^{k-1}}{\partial\Delta q_s^{k-1}}\Delta q_s^{k-1}\right)\\
&+(Q_s^k+P_s^k)\Delta q_s^k=0, \qquad (18)
\end{aligned}
$$

其中 (17) 式为与连续系统的运动微分方程 (2) 相对应的离散系统的运动方程, (18) 式为离散系统的能量演化方程.

3 离散变质量完整系统的Noether对称性和Noether守恒量

Noether对称性是Hamilton作用量在无限小变换下的一种不变性. 由 (16) 式第二个方程可得

$$
\begin{aligned}
&L_{\mathrm{D}}^k\Delta\delta_t t_k+\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^k}{\partial t_k}\delta_t t_k+\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^k}{\partial q_s^k}\delta_t q_s^k\\
&+\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^k}{\partial\Delta q_s^k}(\Delta\delta_t q_s^k-\Delta q_s^k\Delta\delta_t t_k)\\
&+(Q_s^k+P_s^k)(\delta_t q_s^k-\delta_t t_k\Delta q_s^k)=0. \qquad (19)
\end{aligned}
$$

考虑到

$$
\delta_t t_k=\varepsilon\xi_0^k,\quad \delta_t q_s^k=\varepsilon\xi_s^k, \qquad (20)
$$

将 (20) 式代入 (19) 式, 并考虑到 ε 的任意性, 得

$$
\begin{aligned}
&L_{\mathrm{D}}^k\Delta\xi_0^k+\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^k}{\partial t_k}\xi_0^k+\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^k}{\partial q_s^k}\xi_s^k\\
&+\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^k}{\partial\Delta q_s^k}(\Delta\xi_s^k-\Delta q_s^k\Delta\xi_0^k)\\
&+(Q_s^k+P_s^k)(\xi_s^k-\Delta q_s^k\xi_0^k)=0. \qquad (21)
\end{aligned}
$$

于是有以下判据:

判据1 对于满足离散动力学方程 (17) 和 (18) 的离散变质量完整系统, 如果存在离散规范函数 $G_{\mathrm{N}}^k=G_{\mathrm{N}}^k(t_k,q_s^k,\Delta q_s^k)$ 使无限小变换的生成元 ξ_0^k, ξ_s^k 满足如下离散形式的Noether等式:

$$
\begin{aligned}
&L_{\mathrm{D}}^k\Delta\xi_0^k+\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^k}{\partial t_k}\xi_0^k+\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^k}{\partial q_s^k}\xi_s^k\\
&+\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^k}{\partial\Delta q_s^k}(\Delta\xi_s^k-\Delta q_s^k\Delta\xi_0^k)\\
&+(Q_s^k+P_s^k)(\xi_s^k-\Delta q_s^k\xi_0^k)+\Delta G_{\mathrm{N}}^k=0. \qquad (22)
\end{aligned}
$$

则系统具有Noether对称性.

对离散变质量完整系统, 由Noether对称性可以直接导出Noether守恒量, 有如下命题:

命题1 对于满足方程 (17) 和 (18) 的离散变质量完整系统, 如果无限小变换的生成元 ξ_0^k, ξ_s^k 和离散规范函数 $G_{\mathrm{N}}^k=G_{\mathrm{N}}^k(t_k,q_s^k,\Delta q_s^k)$ 满足离散形式的Noether等式 (22), 则系统的Noether对称性可以导致离散形式的Noether守恒量

$$
\begin{aligned}
I_{\mathrm{D}}=&L_{\mathrm{D}}^{k-1}\xi_0^k+\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^{k-1}}{\partial\Delta q_s^{k-1}}(\xi_s^k-\Delta q_s^{k-1}\xi_0^k)+G_{\mathrm{N}}^k\\
=&\,\mathrm{const}. \qquad (23)
\end{aligned}
$$

证明 运用Leibniz法则, 由 (22) 式可得

$$
\begin{aligned}
&L_{\mathrm{D}}^k\Delta\xi_0^k+\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^k}{\partial t_k}\xi_0^k+\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^k}{\partial q_s^k}\xi_s^k\\
&+\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^k}{\partial\Delta q_s^k}(\Delta\xi_s^k-\Delta q_s^k\Delta\xi_0^k)\\
&+(Q_s^k+P_s^k)(\xi_s^k-\Delta q_s^k\xi_0^k)+\Delta G_{\mathrm{N}}^k\\
=&\,\Delta(L_{\mathrm{D}}^{k-1}\xi_0^k)-\Delta L_{\mathrm{D}}^{k-1}\xi_0^k+\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^k}{\partial t_k}\xi_0^k+\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^k}{\partial q_s^k}\xi_s^k\\
&+\Delta\left(\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^{k-1}}{\partial\Delta q_s^{k-1}}\xi_s^k\right)-\left(\Delta\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^{k-1}}{\partial\Delta q_s^{k-1}}\right)\xi_s^k\\
&-\Delta\left(\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^{k-1}}{\partial\Delta q_s^{k-1}}\Delta q_s^{k-1}\xi_0^k\right)\\
&+\Delta\left(\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^{k-1}}{\partial\Delta q_s^{k-1}}\Delta q_s^{k-1}\right)\xi_0^k\\
&+(Q_s^k+P_s^k)(\xi_s^k-\Delta q_s^k\xi_0^k)+\Delta G_{\mathrm{N}}^k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \Delta\bigg(L_{\mathrm{D}}^{k-1}\xi_0^k + \frac{\partial L_{\mathrm{D}}^{k-1}}{\partial \Delta q_s^{k-1}}\xi_s^k - \frac{\partial L_{\mathrm{D}}^{k-1}}{\partial \Delta q_s^{k-1}}\Delta q_s^{k-1}\xi_0^k \\
&\quad + G_{\mathrm{N}}^k\bigg) + \bigg[-\Delta L_{\mathrm{D}}^{k-1} + \frac{\partial L_{\mathrm{D}}^k}{\partial t_k} \\
&\quad + \Delta\bigg(\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^{k-1}}{\partial \Delta q_s^{k-1}}\Delta q_s^{k-1}\bigg) - (Q_s^k + P_s^k)\Delta q_s^k\bigg]\xi_0^k \\
&\quad + \bigg(\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^k}{\partial q_s^k} - \Delta\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^{k-1}}{\partial \Delta q_s^{k-1}} + Q_s^k + P_s^k\bigg)\xi_s^k \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{24}
$$

将方程(17), (18)代入上式, 可得

$$
\begin{aligned}
&\Delta\bigg(L_{\mathrm{D}}^{k-1}\xi_0^k + \frac{\partial L_{\mathrm{D}}^{k-1}}{\partial \Delta q_s^{k-1}}\xi_s^k \\
&\quad - \frac{\partial L_{\mathrm{D}}^{k-1}}{\partial \Delta q_s^{k-1}}\Delta q_s^{k-1}\xi_0^k + G_{\mathrm{N}}^k\bigg) = 0.
\end{aligned} \tag{25}
$$

命题得证.

4 离散变质量完整系统的Mei对称性和Noether守恒量

离散变质量完整力学系统的Mei对称性在满足一定条件下可以导致离散形式的Noether守恒量.

在无限小变换(7)下, 动力学函数

$$
\begin{aligned}
L_{\mathrm{D}}^k &= L_{\mathrm{D}}(t_k, q_s^k, \Delta q_s^k), \\
L_{\mathrm{D}}^{k-1} &= L_{\mathrm{D}}(t_{k-1}, q_s^{k-1}, \Delta q_s^{k-1}), \\
Q_s^k &= Q_s(t_k, q_s^k, \Delta q_s^k), \\
P_s^k &= P_s(t_k, q_s^k, \Delta q_s^k)
\end{aligned}
$$

分别变为L_{D}^{k*}, L_{D}^{k-1*}, Q_s^{k*}, P_s^{k*}, 将以上各函数分别展开, 得

$$
\begin{aligned}
L_{\mathrm{D}}^{k*} &= L_{\mathrm{D}}^k(t_k^*, q_s^{k*}, \Delta q_s^{k*}) \\
&= L_{\mathrm{D}}^k + \varepsilon X_{\mathrm{D}}^{(1)}(L_{\mathrm{D}}^k) + O(\varepsilon^2) + \cdots
\end{aligned} \tag{26}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{\mathrm{D}}^{k-1*} &= L_{\mathrm{D}}^{k-1}(t_{k-1}^*, q_s^{k-1*}, \Delta q_s^{k-1*}) \\
&= L_{\mathrm{D}}^{k-1} + \varepsilon R\_X_{\mathrm{D}}^{(1)}(L_{\mathrm{D}}^k) + O(\varepsilon^2) \\
&\quad + \cdots
\end{aligned} \tag{27}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_s^{k*} &= Q_s^k(t_k^*, q_s^{k*}, \Delta q_s^{k*}) \\
&= Q_s^k + \varepsilon X_{\mathrm{D}}^{(1)}(Q_s^k) + O(\varepsilon^2) + \cdots
\end{aligned} \tag{28}
$$

$$
\begin{aligned}
P_s^{k*} &= P_s^k(t_k^*, q_s^{k*}, \Delta q_s^{k*}) \\
&= P_s^k + \varepsilon X_{\mathrm{D}}^{(1)}(P_s^k) + O(\varepsilon^2) + \cdots
\end{aligned} \tag{29}
$$

上式中用到了离散变量和离散函数的递推算符

$$
R_{\pm} f(z_k) = f(z_{k\pm1}), \tag{30}
$$

以及无限小生成元向量的一次扩展

$$
\begin{aligned}
X_{\mathrm{D}}^{(1)} &= \xi_0^k\frac{\partial}{\partial t_k} + \xi_s^k\frac{\partial}{\partial q_s^k} \\
&\quad + (\Delta\xi_s^k - \Delta q_s^k\Delta\xi_0^k)\frac{\partial}{\partial \Delta q_s^k}.
\end{aligned} \tag{31}
$$

如果用变换后的动力学函数L_{D}^{k*}, L_{D}^{k-1*}, Q_s^{k*}和P_s^{k*} 分别代替变换前的L_{D}^k, L_{D}^{k-1}, Q_s^k和P_s^k时, 方程(17)(18)的形式保持不变, 这种对称性称为离散变质量完整系统的Mei对称性.

将(26)—(29)式代入方程(17)(18), 忽略ε^2及以上高阶小量项, 可得

$$
\begin{aligned}
&\Delta\frac{\partial R\_X_{\mathrm{D}}^{(1)}(L_{\mathrm{D}}^k)}{\partial \Delta q_s^{k-1}} - \frac{\partial X_{\mathrm{D}}^{(1)}(L_{\mathrm{D}}^k)}{\partial q_s^k} \\
&= X_{\mathrm{D}}^{(1)}(Q_s^k + P_s^k),
\end{aligned} \tag{32}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Delta R\_X_{\mathrm{D}}^{(1)}(L_{\mathrm{D}}^k) - \frac{\partial X_{\mathrm{D}}^{(1)}(L_{\mathrm{D}}^k)}{\partial t_k} \\
&\quad - \Delta\bigg[\frac{\partial R\_X_{\mathrm{D}}^{(1)}(L_{\mathrm{D}}^k)}{\partial \Delta q_s^{k-1}}\Delta q_s^{k-1}\bigg] \\
&\quad + X_{\mathrm{D}}^{(1)}(Q_s^k + P_s^k)\Delta q_s^k = 0.
\end{aligned} \tag{33}
$$

于是有如下判据:

判据2 对于满足方程(17)(18)的离散变质量完整力学系统, 如果无限小变换的生成元ξ_0^k, ξ_s^k满足方程(32)和(33), 那么系统具有Mei对称性.

方程(32), (33)称为离散变质量完整力学系统Mei对称性的判据方程.

由命题1和判据2, 容易得到如下命题2:

命题2 对于满足方程(17), (18)的离散变质量完整力学系统, 如果Mei 对称性的生成元ξ_0^k, ξ_s^k和离散规范函数$G_{\mathrm{N}}^k = G_{\mathrm{N}}^k(t_k, q_s^k, \Delta q_s^k)$满足方程(22), 则系统的Mei对称性可导致离散形式的Noether守恒量(23).

5 算 例

设离散变质量完整系统的离散Lagrange函数为

$$
L_{\mathrm{D}}^k = \frac{1}{2}m(t_k)[(\Delta q_1^k)^2 + (\Delta q_2^k)^2], \tag{34}
$$

其中, $m(t_k) = m_0\,\mathrm{e}^{-\alpha t_k}$, m_0及α为常数. $Q_1^k = \Delta q_1^k$, $Q_2^k = 0$, $P_1^k = P_2^k = 0$. 试研究该系统的Noether对称性和Mei对称性导致的Noether守恒量.

由(34)式可得

$$
L_{\mathrm{D}}^{k-1} = \frac{1}{2}m(t_{k-1})[(\Delta q_1^{k-1})^2 + (\Delta q_2^{k-1})^2]. \tag{35}
$$

根据(17), (18)式, 得到离散系统的运动方程和能量演化方程

$$\Delta(m_0\,\mathrm{e}^{-\alpha t_{k-1}}\Delta q_1^{k-1}) = \Delta q_1^k,$$
$$\Delta(m_0\,\mathrm{e}^{-\alpha t_{k-1}}\Delta q_2^{k-1}) = 0, \tag{36}$$
$$\Delta L_\mathrm{D}^{k-1} + \alpha L_\mathrm{D}^k - \Delta[m_0\,\mathrm{e}^{-\alpha t_{k-1}}(\Delta q_1^{k-1})^2] - \Delta[m_0\,\mathrm{e}^{-\alpha t_{k-1}}(\Delta q_2^{k-1})^2] + (\Delta q_1^k)^2 = 0. \tag{37}$$

首先, 研究该系统的Noether对称性导致的Noether守恒量. 由(22)知离散形式的Noether等式为

$$L_\mathrm{D}^k\Delta\xi_0^k - \alpha L_\mathrm{D}^k\xi_0^k + m_0\,\mathrm{e}^{-\alpha t_k}[\Delta q_1^k(\Delta\xi_1^k - \Delta q_1^k\Delta\xi_0^k) + \Delta q_2^k(\Delta\xi_2^k - \Delta q_2^k\Delta\xi_0^k)] + \Delta q_1^k(\xi_1^k - \Delta q_1^k\xi_0^k) + \Delta G_\mathrm{N}^k = 0. \tag{38}$$

取无限小变换的生成元为

$$\xi_0^k = 0,\quad \xi_1^k = 0,\quad \xi_2^k = 1. \tag{39}$$

将(39)式代入(38)式, 可得离散规范函数

$$G_\mathrm{N}^k = 0. \tag{40}$$

将(39)式和(40)式代入(23)式即得到离散形式的Noether守恒量

$$I_\mathrm{D} = m_0\,\mathrm{e}^{-\alpha t_{k-1}}\Delta q_2^{k-1} = \text{const}. \tag{41}$$

下面讨论系统的Mei对称性导致的Noether守恒量. 经计算得

$$X_\mathrm{D}^{(1)}(L_\mathrm{D}^k) = -\alpha\xi_0^k L_\mathrm{D}^k + m_0\,\mathrm{e}^{-\alpha t_k}\times[\Delta q_1^k(\Delta\xi_1^k - \Delta q_1^k\Delta\xi_0^k) + \Delta q_2^k(\Delta\xi_2^k - \Delta q_2^k\Delta\xi_0^k)],$$
$$X_\mathrm{D}^{(1)}(Q_1^k) = \Delta\xi_1^k - \Delta q_1^k\Delta\xi_0^k,$$
$$X_\mathrm{D}^{(1)}(Q_2^k) = 0. \tag{42}$$

取无限小变换的生成元为

$$\xi_0^k = 0,\quad \xi_1^k = 1,\quad \xi_2^k = 1. \tag{43}$$

则

$$X_\mathrm{D}^{(1)}(L_\mathrm{D}^k) = 0,\quad X_\mathrm{D}^{(1)}(Q_1^k) = 0,$$
$$X_\mathrm{D}^{(1)}(Q_2^k) = 0. \tag{44}$$

将(44)式代入方程(32)(33), 满足Mei对称性的判据方程, 故对生成元(43), 系统是Mei对称性的.

将生成元(43)代入方程(22), 得

$$G_\mathrm{N}^k = -q_1^k. \tag{45}$$

将(43)式和(45)式代入(23)式, 得到该系统的Mei对称性导致的Noether守恒量

$$I_\mathrm{D} = m_0\,\mathrm{e}^{-\alpha t_{k-1}}(\Delta q_1^{k-1} + \Delta q_2^{k-1}) - q_1^k = \text{const}. \tag{46}$$

6 结 论

本文用差分离散变分的方法, 研究离散变质量完整系统的Noether对称性与Mei对称性. 构建了系统的离散动力学方程, 给出了离散系统的Noether等式和Mei对称性的判据方程, 得到了离散形式的Noether守恒量的形式以及系统的Mei对称性导致Noether守恒量的条件. 差分离散变分的方法将差分看做一个独立变量, 在变分运算时直接进行处理, 将原来的连续系统离散化的同时尽可能的保持原来系统的结构与性质. 本文结果具有一般性意义, 当$t_{k+1} - t_k \to 0$时, 本文的结果可以回到相应连续情况下的结果, 当$P_s^k = 0$时, 本文结果回到离散常质量完整系统下的结果.

参考文献

[1] Noether A E 1918 *Math. Phys.* KI II 235

[2] Lutzky M 1979 *J. Phys. A: Math. Gen.* **12** 973

[3] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Tech.* **9** 120

[4] Bluman G W, Kumei S 1989 *Symmetries and differential equations* (New York: Spinger verlag)

[5] Hojman S A A 1992 *J. Phys. A: Math. Gen.* **25** L291

[6] Mei F X, Liu R, Luo Y 1991 *Advanced analytical mechanics* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔, 刘瑞, 罗勇 1991 高等分析力学 (北京: 北京理工大学出版社)]

[7] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量 (北京: 北京理工大学出版社)]

[8] Mei F X 1999 *Application of Lie group and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群李代数对约束力学系统的应用 (北京: 科学出版社)]

[9] Qiao Y F, Zhao S H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 499 (in Chinese) [乔永芬, 赵淑红 2006 物理学报 **55** 499]

[10] Guo Y X, Zhao Z, Liu S X, Wang Y, Zhu N, Han X J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3838 (in Chinese) [郭永新, 赵喆, 刘世兴, 王勇, 朱娜, 韩晓静 2006 物理学报 **55** 3838]

[11] Wu H B, Mei F X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3825 (in Chinese) [吴惠彬, 梅凤翔 2006 物理学报 **55** 3825]

[12] Jia L Q, Zhang Y Y, Zheng S W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 649 (in Chinese) [贾利群, 张耀宇, 郑世旺 2007 物理学报 **56** 649]

[13] Ge W K 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6714 (in Chinese) [葛伟宽 2008 物理学报 **57** 6714]

[14] Zhang Y 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 214501 (in Chinese) [张毅 2012 物理学报 **61** 214501]

[15] Lou Z M, Mei F X 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 110201 (in Chinese) [楼智美, 梅凤翔 2012 物理学报 **61** 110201]

[16] Marsden J E, West M 2001 *Acta Numerica* 357
[17] Wendlandt J M, Marsden J E 1997 *Physica D* **106** 223
[18] Cadzow J D 1970 *Int. J. Control* **11** 393
[19] Lee T D 1983 *Phys. Lett. B* **122** 217
[20] Lee T D 1987 *J. Statis. Phys.* **46** 843
[21] Chen J B, Guo H Y, Wu K 2003 *J. Math. Phys.* **44** 1688
[22] Chen J B, Guo H Y, Wu K 2006 *Appl. Math. Comput.* **177** 226
[23] Shi S Y 2008 *Ph. D. Dissertation* (Shanghai: Shanghai University) (in Chinese) [施沈阳 2008 博士学位论文 (上海: 上海大学)]
[24] Guo H Y, Li Y Q, Wu K, Wang S K 2002 *Commun. Theor. Phys.* **37** 1
[25] Wu K, Guo H Y 2006 *Journal of Captical Normal University* **27** 1 (in Chinese) [吴可, 郭汉英 2006 首都师范大学学报 **27** 1]
[26] Lu K, Fang J H, Zhang M J, Wang P 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7421 (in Chinese) [路凯, 方建会, 张明江, 王鹏 2009 物理学报 **58** 7421]
[27] Zhang W W, Fang J H, Zhang B 2012 *Jouinal of Dynamics Contral* **10** 117 (in Chinese) [张伟伟, 方建会, 张斌 2012 动力学与控制学报 **10** 117]
[28] Liu R W, Zhang H B, Chen L Q 2006 *Chin. Phys.* **15** 249
[29] Fu J L, Chen B Y, Chen L Q 2009 *Phys. Lett. A* **373** 409
[30] Zhang H B, Lv H S, Gu S L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5213 (in Chinese) [张宏彬, 吕洪升, 顾书龙 2010 物理学报 **59** 5213]

Noether symmetry and Mei symmetry of a discrete holonomic mechanical system with variable mass*

Wang Fei-Fei   Fang Jian-Hui†   Wang Ying-Li   Xu Rui-Li

(*College of Science, China University of Petroleum, Qingdao 266555, China*)

(Received 10 April 2014; revised manuscript received 27 April 2014)

Abstract

This paper studies the Noether symmetry and Mei symmetry of a discrete holonomic mechanical system with variable mass. Firstly, by the difference discrete variation approach, the discrete equations of motion of the system are established. Secondly, the definitions of Noether symmetry and Mei symmetry are given, and the conditions under which the Noether conserved quantity can be induced by Noether symmetry and Mei symmetry are obtained. Finally, an example is discussed to illustrate these results.

Keywords: difference discrete variation, variable mass, Noether symmetry, Mei symmetry

PACS: 02.20.Sv, 11.30.–j, 45.05.+x   **DOI:** 10.7498/aps.63.170202

* Project supported by the Natural Science Foundation of Shandong Province of China (Grant No. ZR2011AM012).

† Corresponding author. E-mail: fangjh@upc.edu.cn