切换奇异系统的有限时间稳定*

张耀利 吴保卫† 王月娥 韩晓霞

(陕西师范大学, 数学与信息科学学院, 西安 710062)

(2014 年 4 月 12 日收到; 2014 年 5 月 11 日收到修改稿)

本文研究了一类连续切换奇异系统的有限时间稳定和状态反馈控制问题. 首先, 讨论了连续切换奇异系统解的存在条件, 然后给出连续切换奇异系统有限时间稳定和有限时间有界的概念; 其次, 利用模型依赖平均驻留时间方法和 Lyapunov 函数方法, 分别给出切换奇异系统是正则、脉冲自由且有限时间稳定和有限时间有界的充分条件, 并设计状态反馈控制器, 使得闭环系统有限时间稳定和有限时间有界且具有 H_∞ 性能指标 γ ; 最后通过数值算例验证了本文方法的有效性.

关键词: 切换奇异系统, 有限时间稳定, 模型依赖平均驻留时间

PACS: 02.30.Yy, 42.82.Fv **DOI:** 10.7498/aps.63.170205

1 引 言

切换系统是由若干连续或离散动态子系统按照调节系统如何运行的切换规则组成的混杂系统, 其广泛存在于电力系统、运输系统、经济系统等实际系统中. 我们把子系统至少有一个为奇异系统[1,2] 的一类切换系统称为切换奇异系统. 与一般切换系统[3−9] 相比, 由于正则性[2]、一致初始状态[1,10,11] 和脉冲模消除[12,13] 等问题的存在, 切换奇异系统的稳定性分析与控制器设计更复杂. 切换奇异系统广泛存在于电力系统, 网络控制系统和机器人技术等实际系统中. 因此, 切换奇异系统的研究引起了众多学者的关注, 并且取得了丰富的研究成果[10−21]. 然而, 其主要研究的是系统的 Lyapunov 渐近稳定性, 即无限时间区间内系统的动态性能, 而在实际中, 常常需要研究系统在有限时间区间内的暂态性能. 例如, 文献 [16] 的升压斩波电路系统, 如果电流变化过快可能会损坏电路. 一般情况下, 超调量过大, 在很多实际工程中是无法应用的, 因此研究有限时间区间上系统的暂态性能比 Lyapunov 渐近稳定更具有实际应用价值.

1953 年, Kamenkov 首次提出了有限时间稳定的概念, 用来反映系统在一段时间上的暂态性能. 所谓有限时间稳定就是指当系统的初值偏离平衡点一定范围时, 在给定的有限时间区间内, 系统的状态仍然在我们预先给定的范围内. 1961 年, Dorata[22] 总结了有限时间稳定控制的发展历程, 并指出有限时间稳定的概念与 Lyapunov 稳定概念的不同, 主要表现在两个方面: 一是有限时间稳定是在有限时间间隔内对系统进行分析; 二是有限时间稳定需要对系统变量预先设定界限. 目前, 有限时间控制问题已有丰富的研究成果[6,7,18−27], 但关于切换奇异系统的有限时间控制问题的研究成果还很有限. 文献 [18, 19] 在假设系统不存在脉冲的条件下, 给出了任意切换下正则、因果的离散切换奇异系统有限时间稳定和有限时间有界的充分条件. 文献 [20, 21] 假设系统状态在切换时刻连续, 基于平均驻留时间分别给出连续切换奇异系统和其带有时变时滞时, 有限时间稳定和有限时间有界的充分条件.

本文对连续切换奇异系统的有限时间稳定和状态反馈控制问题进行了探讨. 首先, 讨论了连续切换奇异系统有解的条件, 介绍了连续切换奇异系

* 国家自然科学基金 (批准号: 11371233) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: wubw@snnu.edu.cn

统的相容切换、有限时间稳定及有限时间有界的概念; 其次, 利用Lyapunov方法及模型依赖平均驻留时间方法给出有限时间稳定及有限时间有界的充分条件, 并且设计控制器; 最后, 通过数值算例验证方法的有效性.

2 问题描述和准备知识

本文中, N表示所有的自然数之集, R^+表示所有的正实数之集, R^n表示所有的具有n个实分量的列向量之集, $R^{n\times n}$表示所有的$n\times n$实矩阵之集, I_r是r阶单位矩阵, A^{T}表示A的转置, $X>0$表示X是正定矩阵.

考虑如下一类切换奇异系统:

$$\begin{aligned}E_{\sigma(t)}\dot{x}(t)&=A_{\sigma(t)}x(t)+G_{\sigma(t)}w(t)+B_{\sigma(t)}u(t),\\ \dot{w}(t)&=F_{\sigma(t)}w(t),\\ z(t)&=C_{\sigma(t)}x(t)+D_{\sigma(t)}w(t).\end{aligned}\tag{1}$$

其中, $x(t)\in R^n$, $u(t)\in R^q$, $z(t)\in R^p$分别是状态、控制输入和控制输出; $w(t)\in R^p$是$L_2[0,+\infty)$上的连续的外部扰动, 且对于$\forall\ t\in[0,T_{\mathrm{f}}]$, 满足

$$\int_0^{T_{\mathrm{f}}}w^{\mathrm{T}}(t)w(t)\mathrm{d}t\leqslant l,\quad w^{\mathrm{T}}(t)w(t)\leqslant d,$$

其中$l\geqslant 0$, $d\geqslant 0$, $T_{\mathrm{f}}>0$. 切换信号$\sigma(t):R^+\to H=\{1,2,\cdots,h\}$为时间$t$的分段常值函数. 对应于切换信号$\sigma(t)$, 有切换序列$\{E_{\sigma(t_0)}x(t_0):(i_0,t_0),\cdots,(i_k,t_k),\cdots,|i_k\in H,k\in N\}$, 表明当$t\in[t_k,t_{k+1})$时, 第$i_k$个子系统被激活. $A_i,B_i,G_i,F_i,C_i,D_i,i\in H$是适当维数的常矩阵, $E_i\in R^{n\times n}$是奇异矩阵且满足$\mathrm{rank}E_i=r_i<n$.

关于奇异系统

$$E\dot{x}(t)=Ax(t),\tag{2}$$

有下面的结论, 其中$E,A\in R^{n\times n}$, $\mathrm{rank}E=r<n$.

引理1[1] 对于系统(2)中的矩阵E,A, 总存在两个非奇异矩阵$\tilde{M},\tilde{N}\in R^{n\times n}$使得

$$\tilde{M}E\tilde{N}=\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \tilde{M}A\tilde{N}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}$$

成立. 此时, 系统(2)是正则和脉冲自由的, 当且仅当A_{22}是非奇异矩阵.

引理2[1] 对于正则系统(2), 总存在两个非奇异矩阵$M,N\in R^{n\times n}$, 使得E,A可化为如下标准型:

$$MEN=\begin{bmatrix}I_r&0\\0&J\end{bmatrix},\quad MAN=\begin{bmatrix}A_1&0\\0&I\end{bmatrix},$$

其中, J是幂零阵. 若系统还是脉冲自由的, 则J是零矩阵.

若奇异系统(2)有相容初始状态且系统正则, 则系统(2)的解存在且唯一. 由此可见, 在切换奇异系统中, 若每个子系统正则且切换时刻的状态都是将要激活的子系统的相容初始状态, 则能保证系统有唯一解.

定义1 在切换奇异系统中, 若切换时刻的状态是将要激活的子系统的相容初始状态, 则称切换为相容切换.

下面分别对有扰动和无扰动的系统的相容切换进行讨论.

无扰动情形 对系统

$$E_i\dot{x}(t)=A_ix(t),\quad i\in H,\tag{3}$$

若每个子系统都是正则的, 由引理2可知, 存在相应的非奇异矩阵$M_i,N_i\in R^{n\times n}$, 使子系统化为如下标准型:

$$\begin{bmatrix}I_{r_i}&0\\0&J_i\end{bmatrix}\dot{\bar{x}}(t)=\begin{bmatrix}A_{i1}&0\\0&I_i\end{bmatrix}\bar{x}(t),$$

其中, $J_i\in R^{n-r_i}$是幂零阵, 其状态相应的变为$\bar{x}(t)=N_i^{-1}x(t)$, $i\in H$. 显然在标准型下, 子系统的相容空间[10]是$R^{r_i}\oplus\mathbf{0}^{n-r_i}$. 在切换时刻$t_k$处, 由于$\sigma(t_k)=i_k$, 作投影

$$\bar{x}(t_k)=\begin{bmatrix}I_{r_{i_k}}&0\\0&0\end{bmatrix}S_{i_k}\bar{x}(t_k^-),$$

其中$S_{i_k}\in R^{n\times n}$, 则原系统(3)的状态为$x(t_k)=\varTheta_{i_k}x(t_k^-)$,

$$\varTheta_{i_k}=N_{i_k}\begin{bmatrix}I_{r_{i_k}}&0\\0&0\end{bmatrix}S_{i_k},$$

$S_{i_k}\in R^{n\times n}$. 显然它是系统的相容切换.

有扰动情形 对系统

$$\begin{aligned}E_i\dot{x}(t)&=A_ix(t)+G_iw(t),\mathrm{rank}E_i=r<n,\\ \dot{w}(t)&=F_iw(t),\end{aligned}\tag{4}$$

若每个子系统都是正则脉冲自由的, 由引理2可知子系统的标准型为

$$\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}\dot{\bar{x}}(t)=\begin{bmatrix}A_{i1}&0\\0&I\end{bmatrix}\bar{x}(t)+\begin{bmatrix}\bar{G}_{i1}\\\bar{G}_{i2}\end{bmatrix}w(t),$$

$$M_iG_i=\begin{bmatrix}\bar{G}_{i1}\\\bar{G}_{i2}\end{bmatrix},\quad i\in H.$$

本文只考虑 $\bar{G}_{i2}=\bar{G}_{j2}, w(t)$ 是连续变化的情况. 切换时刻 t_k 处, 系统 (4) 的状态 $x(t_k)=\Theta_{i_k}x(t_k^-)$, 其中

$$\Theta_{i_k}=N_{i_k}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}S_{i_k}$$

时, 则系统 (4) 的切换是相容切换.

定义 2 对于切换奇异系统 (1), 在相容切换下, 若所有的子系统 (E_i, A_i) 都是正则且脉冲自由的, 则称系统 (1) 是正则和脉冲自由的.

注 1 切换奇异系统的正则和脉冲自由, 保证了系统的解存在且唯一.

定义 3 [18] 系统 (3) 关于 $(c_1, c_2, R, T_{\mathrm{f}})$ 有限时间稳定, 若对于给定的切换信号 $\sigma(t)$, 有

$$\begin{aligned} & x^{\mathrm{T}}(t_0)E_{\sigma(t_0)}^{\mathrm{T}}RE_{\sigma(t_0)}x(t_0)\leqslant c_1 \\ \Rightarrow\ & x^{\mathrm{T}}(t)E_{\sigma(t)}^{\mathrm{T}}RE_{\sigma(t)}x(t)\leqslant c_2, \forall t\in[0, T_{\mathrm{f}}], \end{aligned}$$

其中矩阵 $R>0$, 实数 $T_{\mathrm{f}}>0, 0<c_1<c_2$.

定义 4 [18] 系统 (4) 关于 $(c_1, c_2, R, T_{\mathrm{f}}, d, l)$ 有限时间有界, 若对于给定的切换信号 $\sigma(t)$, 有

$$\begin{aligned} & x^{\mathrm{T}}(t_0)E_{\sigma(t_0)}^{\mathrm{T}}RE_{\sigma(t_0)}x(t_0)\leqslant c_1 \\ \Rightarrow\ & x^{\mathrm{T}}(t)E_{\sigma(t)}^{\mathrm{T}}RE_{\sigma(t)}x(t)\leqslant c_2, \forall t\in[0, T_{\mathrm{f}}], \end{aligned}$$

其中 $R>0$, $T_{\mathrm{f}}>0$, $0<c_1<c_2$, $d\geqslant 0$, $l\geqslant 0$.

注 2 定义 3 和定义 4 描述了系统动态部分 (慢子系统) 状态有界, 若系统是脉冲自由的且外部扰动有界, 则系统静态部分 (快子系统) 状态也是有界的. 为方便起见, 本文选取初始时刻 $t_0=0$.

定义 5 [5] 对于切换信号 $\sigma(t)$ 和 $0\leqslant t\leqslant T_{\mathrm{f}}$, 令 $N_{\sigma i}(t, T_{\mathrm{f}})$ 是在 $[t, T_{\mathrm{f}}]$ 区间上第 i 个子系统被激活次数, $T_i(t, T_{\mathrm{f}})$ 是第 i 个子系统在 $[t, T_{\mathrm{f}}]$ 区间上总的运行时间. 若存在正数 N_{0i} 和 τ_{ai} 使得

$$N_{\sigma i}(t, T_{\mathrm{f}})\leqslant N_{0i}+\frac{T_i(t, T_{\mathrm{f}})}{\tau_{ai}}, \quad \forall\ T_{\mathrm{f}}\geqslant t\geqslant 0$$

成立, 则 τ_{ai} 就是在切换信号 $\sigma(t)$ 下的模型依赖平均驻留时间.

定义 6 [7] 给定三个常数 (c_2, d, T_{f}), 正定矩阵 R 和切换信号 $\sigma(t)$, 若系统 (4) 是有限时间有界的且满足

$$\int_0^{T_{\mathrm{f}}}z^{\mathrm{T}}(s)z(s)\mathrm{d}s\leqslant\gamma^2\int_0^{T_{\mathrm{f}}}w^{\mathrm{T}}(s)w(s)\mathrm{d}s,$$

则称连续时间切换奇异系统 (4) 关于 $(0, c_2, d, T_{\mathrm{f}}, \gamma, R, \sigma)$ 具有有限时间 H_∞ 性能指标 γ.

本文的目的是:

1) 对系统

$$E_i\dot{x}(t)=A_ix(t)+B_iu(t), \tag{5}$$

设计一个形如

$$u(t)=K_ix(t) \tag{6}$$

的状态反馈控制器, 使得闭环系统

$$E_i\dot{x}(t)=\hat{A}_ix(t) \tag{7}$$

关于 (c_1, c_2, R, T_f) 有限时间稳定. 其中, $\hat{A}_i=A_i+B_iK_i$.

2) 对系统 (1) 设计一个形如 (6) 的状态反馈控制器, 使得闭环系统

$$E_i\dot{x}(t)=\hat{A}_ix(t)+G_iw(t) \tag{8}$$

关于 $(c_1, c_2, R, T_{\mathrm{f}}, d, l)$ 有限时间有界且具有 H_∞ 性能指标 γ. 其中, $\hat{A}_i=A_i+B_iK_i$.

3 主要结果

下面讨论切换奇异系统有限时间稳定和有限时间有界的条件. 为方便起见, 构造的 Lyaponov 函数 $V(x(t))$, 简记为 $V(t)$.

定理 1 对于给定的 $(c_1, c_2, R, T_{\mathrm{f}})$, $\forall i, j\in H$, 若存在非奇异矩阵 M_i, N_i, P_i, $Z_i>0$, 及实数 $\alpha_i>0, \mu_i\geqslant 1$ 使得

$$E_i^{\mathrm{T}}P_i=P_i^{\mathrm{T}}E_i\geqslant 0, \tag{9}$$

$$A_i^{\mathrm{T}}P_i+P_i^{\mathrm{T}}A_i-\alpha_iE_i^{\mathrm{T}}P_i<0, \tag{10}$$

$$\Theta_i^{\mathrm{T}}E_i^{\mathrm{T}}P_i\Theta_i\leqslant\mu_iE_j^{\mathrm{T}}P_j, \tag{11}$$

$$\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^h N_{0i}\ln(\mu_i)}\mathrm{e}^{T_{\mathrm{f}}\alpha_i}s_1c_1<c_2s_2, \tag{12}$$

则系统 (3) 在模型依赖平均驻留时间满足

$$\begin{aligned} & \tau_{ai}>\tau_{ai}^* \\ & =(T_{\mathrm{f}}\ln\mu_i)\times\Bigg[\ln(c_2s_2)-\ln(c_1s_1) \\ & \quad -\alpha_iT_{\mathrm{f}}-\sum_{i=1}^h N_{0i}\ln(\mu_i)\Bigg]^{-1} \end{aligned}$$

的切换信号下是正则、脉冲自由且有限时间稳定的. 其中,

$$E_i^{\mathrm{T}}P_i=E_i^{\mathrm{T}}R^{\frac{1}{2}}Z_iR^{\frac{1}{2}}E_i,$$

$$\Theta_i=N_i\begin{bmatrix} I_{r_i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}S_i,$$

$$s_1=\max_{i\in H}(\lambda_{\max}(Z_i)),$$

$$s_2=\min_{i\in H}(\lambda_{\min}(Z_i)),$$

(M_i, N_i) 可使得 (E_i, A_i) 化为标准型.

证明 由引理1可知存在矩阵 $\tilde{M}_i, \tilde{N}_i$ 使

$$\bar{E}_i = \tilde{M}_i E_i \tilde{N}_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

$$\bar{A}_i = \tilde{M}_i A_i \tilde{N}_i = \begin{bmatrix} A_{i11} & A_{i12} \\ A_{i21} & A_{i22} \end{bmatrix}, \tag{14}$$

对 P_i 做相应的分解可得

$$\bar{P}_i = \tilde{M}_i^{-\mathrm{T}} P_i \tilde{N}_i = \begin{bmatrix} P_{i11} & P_{i12} \\ P_{i21} & P_{i22} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

由(9)式两边分别左乘右乘 $\tilde{N}_i^T$, $\tilde{N}_i$, 再把(13)式和(14)式代入可得

$$\begin{bmatrix} P_{i11} & P_{i12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{i11}^T & 0 \\ P_{i12}^T & 0 \end{bmatrix} \geqslant 0.$$

由上式可知 $P_{i12} = 0$, $P_{i11} = P_{i11}^{\mathrm{T}} \geqslant 0$, 则

$$\bar{P}_i = \begin{bmatrix} P_{i11} & 0 \\ P_{i21} & P_{i22} \end{bmatrix}. \tag{16}$$

对(10)式左右两边左乘 $\tilde{N}_i{}^{\mathrm{T}}$ 右乘 $\tilde{N}_i$ 并把(13)式、(14)式和(16)式代入得

$$\begin{bmatrix} * & * \\ * & P_{i22}^{\mathrm{T}} A_{p22} + A_{i22}^{\mathrm{T}} P_{i22} \end{bmatrix} < 0.$$

由 $P_{i22}^{\mathrm{T}} A_{i22} + A_{i22}^{\mathrm{T}} P_{i22} < 0$, 可得 A_{i22} 是非奇异矩阵, 由引理1知, (E_i, A_i) 正则和脉冲自由, 又因为切换是相容切换, 所以系统(3)是正则且脉冲自由的.

下面来证明系统的有限时间稳定.

构造

$$\begin{aligned} V(t) &= V(x(t)) = V_{\sigma(t)}(x(t)) \\ &= x^{\mathrm{T}}(t) E_{\sigma(t)}^{\mathrm{T}} P_{\sigma(t)} x(t). \end{aligned}$$

由(9)式知 $V(t) \geqslant 0$.

当 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 时, 对 $V(t)$ 关于 t 求导得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= 2\dot{x}^{\mathrm{T}}(t) E_{i_k}^{\mathrm{T}} P_{i_k} x(t) \\ &= x^{\mathrm{T}}(t)(A_{i_k}^{\mathrm{T}} P_{i_k} + P_{i_k}^{\mathrm{T}} A_{i_k}) x(t), \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} &\dot{V}(t) - \alpha_{i_k} V(t) \\ = {}& x^{\mathrm{T}}(t)(A_{i_k}^{\mathrm{T}} P_{i_k} + P_{i_k}^{\mathrm{T}} A_{i_k} - \alpha_{i_k} E_{i_k}^{\mathrm{T}} P_{i_k}) x(t). \end{aligned}$$

由(10)式可得

$$\dot{V}(t) - \alpha_{i_k} V(t) < 0.$$

对上式积分有

$$V(t) < \mathrm{e}^{\alpha_{i_k}(t - t_k)} V(t_k). \tag{17}$$

在切换时刻 t_k 处, 由(11)式可知,

$$\begin{aligned} V(t_k) &= x^{\mathrm{T}}(t_k) E_{i_k}^{\mathrm{T}} P_{i_k} x(t_k) \\ &= x^{\mathrm{T}}(t_k^-) \varTheta_{i_k}^{\mathrm{T}} E_{i_k}^{\mathrm{T}} P_{i_k} \varTheta_{i_k} x(t_k^-) \\ &\leqslant \mu_{i_k} x^{\mathrm{T}}(t_k^-) E_{i_{k-1}}^{\mathrm{T}} P_{i_{k-1}} x(t_k^-) \\ &\leqslant \mu_{i_k} V(t_k^-). \end{aligned}$$

考虑到(17)式, 经过迭代, 我们有

$$\begin{aligned} &V(t) \\ <{}& \mathrm{e}^{\alpha_{i_k}(t-t_k)} V(t_k) \\ \leqslant{}& \mu_{i_k} \mathrm{e}^{\alpha_{i_k}(t-t_k)} V(t_k^-) \\ <{}& \mu_{i_k} \mathrm{e}^{\alpha_{i_k}(t-t_k)} \mathrm{e}^{\alpha_{i_{k-1}}(t_k - t_{k-1})} V(t_{k-1}) \\ \leqslant{}& \cdots \\ \leqslant{}& \mu_{i_k} \mu_{i_{k-1}} \cdots \mu_{i_1} \\ &\cdot \mathrm{e}^{\alpha_{i_k}(t-t_k) + \alpha_{i_{k-1}}(t_k - t_{k-1}) + \cdots + \alpha_{i_0}(t_1 - 0)} V_{i_0}(0) \\ \leqslant{}& \prod_{i \in H} \mu_i^{N_{\sigma i}(0,t)} \mathrm{e}^{\sum_{i \in H} \alpha_i T_i(0,t)} V_{i_0}(0) \\ \leqslant{}& \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{h}(N_{0i} \ln \mu_i)} \mathrm{e}^{\sum_{i \in H} T_i(0,t)(\frac{\ln \mu_i}{\tau_{ai}} + \alpha_i)} V_{i_0}(0) \\ \leqslant{}& \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{h}(N_{0i} \ln \mu_i)} \mathrm{e}^{T_{\mathrm{f}} \max_{i \in H}(\frac{\ln \mu_i}{\tau_{ai}} + \alpha_i)} V_{\sigma(0)}(0). \end{aligned}$$

由(12)式及

$$\begin{aligned} &\tau_{ai} > \tau_{ai}^* \\ = {}& (T_{\mathrm{f}} \ln \mu_i) \Big[\ln(c_2 s_2) - \ln(c_1 s_1) \\ & - \alpha_i T_{\mathrm{f}} - \sum_{i=1}^{h} N_{0i} \ln \mu_i \Big]^{-1}, \end{aligned}$$

可得

$$\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{h}(N_{0i} \ln \mu_i)} \mathrm{e}^{T_{\mathrm{f}} \max(\frac{\ln \mu_i}{\tau_{ai}} + \alpha_i)} \leqslant \frac{c_2 s_2}{c_1 s_1}.$$

又因

$$\begin{aligned} V_{\sigma(0)}(0) &= x^{\mathrm{T}}(0) E_{\sigma(0)}^{\mathrm{T}} P_{\sigma(0)} E_{\sigma(0)} x(0) \\ &= x^{\mathrm{T}}(0) E_{\sigma(0)}^{\mathrm{T}} R^{\frac{1}{2}} Z_{\sigma(0)} R^{\frac{1}{2}} E_{\sigma(0)} x(0) \\ &\leqslant s_1 x^{\mathrm{T}}(0) E_{\sigma(0)}^{\mathrm{T}} R E_{\sigma(0)} x(0) \\ &\leqslant s_1 c_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(t) &= x^{\mathrm{T}}(t) E_{\sigma(t)}^{\mathrm{T}} P_{\sigma(t)} x(t) \\ &= x^{\mathrm{T}}(t) E_{\sigma(t)}^{\mathrm{T}} R^{\frac{1}{2}} Z_{\sigma(t)} R^{\frac{1}{2}} E_t x(t) \\ &\geqslant s_2 x^{\mathrm{T}}(t) E_{\sigma(t)}^{\mathrm{T}} R E_{\sigma(t)} x(t), \end{aligned}$$

所以 $x^{\mathrm{T}}(t) E_{\sigma(t)}^{\mathrm{T}} R E_{\sigma(t)} x(t) \leqslant c_2$, 故系统(3)有限时间稳定.

综上所述, 系统(3)是正则、脉冲自由且有限时间稳定的.

定理2 对于给定的 $(c_1, c_2, R, T_\mathrm{f})$, $\forall i, j \in H$, 若存在非奇异矩阵 $M_i, N_i, \bar{P}_i, Z_i > 0, L_i$, 及实数 $\alpha_i > 0, \mu_i \geqslant 1$ 使得

$$\bar{P}_i^\mathrm{T} E_i^\mathrm{T} = E_i \bar{P}_i \geqslant 0, \tag{18}$$

$$\bar{P}_i^\mathrm{T} A_i^\mathrm{T} + L_i^\mathrm{T} B_i^\mathrm{T} + A_i \bar{P} + B_i L_i - \alpha_i \bar{P}^\mathrm{T} E_i^\mathrm{T} < 0, \tag{19}$$

及 (11) 式 (其中 $P_i = \bar{P}_i^{-1}$) 和 (12) 式成立, 则存在反馈 (6), 使得闭环系统 (7) 在模型依赖平均驻留时间满足

$$\begin{aligned}&\tau_{ai} > \tau_{ai}^*\\ &= (T_\mathrm{f} \ln \mu_i) \times \bigg[\ln(c_2 s_2) - \ln(c_1 s_1)\\ &\quad - \alpha_i T_f - \sum_{i=1}^{h} N_{0i} \ln(\mu_i)\bigg]^{-1}\end{aligned}$$

的切换信号下是正则、脉冲自由且有限时间稳定. 相应的状态反馈增益阵为 $K_i = L_i \bar{P}_i^{-1}$.

证明 对 (18) 式和 (19) 式分别左乘右乘 $\bar{P}_i^{-T}$ 和 $\bar{P}_i^{-1}$, 并令 $K_i = L_i \bar{P}_i^{-1}, P_i = \bar{P}_i^{-1}$, 可得到 (9) 式及 $\hat{A}_i^T P_i + P_i^T \hat{A}_i - \alpha_i E_i^T P_i < 0$ (其中 $\hat{A}_i = A_i + B_i K_i$). 因 (11) 式和 (12) 式成立, 由定理1可得, 闭环系统 (7) 正则、脉冲自由且关于 $(c_1, c_2, R, T_\mathrm{f})$ 有限时间稳定.

定理3 对于给定 $(c_1, c_2, d, l, R, T_\mathrm{f})$, $\forall i, j \in H$, 若存在非奇异阵 $M_i, N_i, P_i, Q_i > 0, Z_i > 0$, 实数 $\alpha_i > 0$, $\eta > 0$, $\mu_i \geqslant 1$, 使得

$$E_i^\mathrm{T} P_i = P_i^\mathrm{T} E_i \geqslant 0, \tag{20}$$

$$\begin{bmatrix} A_i^\mathrm{T} P_i + P_i A_i - \alpha_i E_i^\mathrm{T} P_i & P_i^\mathrm{T} G_i \\ G_i^\mathrm{T} P_i & F_i^\mathrm{T} Q_i + Q_i F_i - (\alpha_i + \eta) Q_i \end{bmatrix} < 0, \tag{21}$$

$$\varTheta_i^\mathrm{T} E_i^\mathrm{T} P_i \varTheta_i \leqslant \mu_i E_j^\mathrm{T} P_j, \tag{22}$$

$$Q_i \leqslant \mu_i Q_j, \tag{23}$$

$$\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{h} N_{0i} \ln \mu_i}\, \mathrm{e}^{T_\mathrm{f} \alpha_i} (s_1 c_1 + s_3 d + \eta s_3 l) < c_2 s_2, \tag{24}$$

则系统 (4) 在模型依赖平均驻留时间满足

$$\begin{aligned}&\tau_{ai} > \tau_{ai}^*\\ &= (T_\mathrm{f} \ln \mu_i) \times \bigg[\ln(c_2 s_2) - \ln(c_1 s_1 + s_3 d + s_3 \eta l)\\ &\quad - \alpha_i T_\mathrm{f} - \sum_{i=1}^{h} N_{0i} \ln \mu_i\bigg]\end{aligned}$$

的切换信号下是正则、脉冲自由且有限时间有界的. 其中

$$E_i^\mathrm{T} P_i = E_i^\mathrm{T} R^{\frac{1}{2}} Z_i R^{\frac{1}{2}} E_i,$$

$$\varTheta_i = N_{i_k} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S_{i_k},$$

$$s_1 = \max_{i \in H}(\lambda_{\max}(Z_i)),$$

$$s_2 = \min_{i \in H}(\lambda_{\min}(Z_i)),$$

$$s_3 = \max_{i \in H}(\lambda_{\max}(Q_i)), (M_i, N_i)$$

可使得系统 (E_i, A_i) 化为标准型.

证明 由 (20) 式和 (21) 式可知,

$$\begin{aligned}&E_i^\mathrm{T} P_i = P_i^\mathrm{T} E_i \geqslant 0,\\ &A_i^\mathrm{T} P_i + P_i^\mathrm{T} A_i - \alpha_i E_i^\mathrm{T} P_i < 0.\end{aligned}$$

同定理1中正则脉冲自由的证明, 可得到系统 (4) 是正则和脉冲自由的. 下面证明系统是有限时间有界的.

构造

$$\begin{aligned}V(t) &= V(x(t)) = V_{\sigma(t)}(x(t))\\ &= x^\mathrm{T}(t) E_{\sigma(t)}^\mathrm{T} P_{\sigma(t)} x(t) + w^\mathrm{T}(t) Q_{\sigma(t)} w(t)\\ &\geqslant 0.\end{aligned}$$

在区间 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 上, 对函数 $V(t)$ 关于 t 求导有

$$\begin{aligned}&\dot{V}(t)\\ &= 2x^\mathrm{T}(t) P_{i_k}^\mathrm{T} A_{i_k} x(t) + 2w^\mathrm{T}(t) G_{i_k}^\mathrm{T} P_{i_k} x(t)\\ &\quad + 2w^\mathrm{T}(t) Q_{i_k} F_{i_k} w(t)\\ &= [x^\mathrm{T} \ w^\mathrm{T}] \begin{bmatrix} A_{i_k}^\mathrm{T} P_{i_k} + P_{i_k}^\mathrm{T} A_{i_k} & P_{i_k}^\mathrm{T} G_{i_k} \\ G_{i_k}^\mathrm{T} P_{i_k} & F_{i_k}^\mathrm{T} Q_{i_k} + Q_{i_k} F_{i_k} \end{bmatrix}\\ &\quad \times \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

由 (21) 式知 $\dot{V}(t) - \alpha_{i_k} V(t) < \eta w^\mathrm{T}(t) Q_{i_k} w(t)$, 两边积分计算可得

$$\begin{aligned}V(t) &< \mathrm{e}^{\alpha_{i_k}(t - t_k)} V(t_k)\\ &\quad + \int_{t_k}^{t} \eta\, \mathrm{e}^{\alpha_{i_k}(t - s)} w^T(s) Q_{i_k} w(s) \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

在切换时刻 t_k 处, 由 (22) 式和 (23) 式知

$$\begin{aligned}V(t_k) &= x^\mathrm{T}(t_k^-) \varTheta_{i_{k-1}}^\mathrm{T} E_{i_k}^\mathrm{T} P_{i_k} \varTheta_{i_k} x(t_k^-)\\ &\quad + w^\mathrm{T}(t_k) Q_{i_k} w(t_k)\\ &\leqslant \mu_{i_k} [x^\mathrm{T}(t_k^-) E_{i_{k-1}}^\mathrm{T} P_{i_{k-1}} x(t_k^-) + w^\mathrm{T}(t_k^-)\\ &\quad \times Q_{i_{k-1}} w(t_k^-)]\\ &\leqslant \mu_{i_k} V(t_k^-).\end{aligned}$$

类似定理1的证明过程, 对上面两式进行迭代可得

$$
\begin{aligned}
& V(t) \\
& < \mathrm{e}^{\alpha_{i_k}(t-t_k)}\mu_{i_k} V(t_k^-) + \int_{t_k}^{t} \eta\, \mathrm{e}^{\alpha_{i_k}(t-s)} w^{\mathrm{T}}(s) \\
& \quad \times Q_{i_k} w(s)\,\mathrm{d}s \\
& \leqslant \mu_{i_k}\mathrm{e}^{\alpha_{i_k}(t-t_k)} [\mathrm{e}^{\alpha_{i_{k-1}}(t_k-t_{k-1})} V(t_{k-1}) \\
& \quad + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \eta\, \mathrm{e}^{\alpha_{i_{k-1}}(t_k-s)} w^{\mathrm{T}}(s) Q_{i_{k-1}} w(s)\,\mathrm{d}s] \\
& \quad + \int_{t_k}^{t} \eta\, \mathrm{e}^{\alpha_{i_k}(t-s)} w^{\mathrm{T}}(s) Q_{i_k} w(s)\,\mathrm{d}s \\
& \leqslant \cdots \\
& \leqslant \mu_{i_k}\cdots\mu_{i_1}\mathrm{e}^{\alpha_i(t-t_k)+\cdots+\alpha_{i_0}(t_1-0)} V_{i_0}(0) \\
& \quad + \mu_{i_k}\cdots\mu_{i_2}\mathrm{e}^{\alpha_{i_k}(t-t_k)+\cdots+\alpha_{i_1}(t_2-t_1)} \\
& \quad \times \int_0^{t_1} \eta\, \mathrm{e}^{\alpha_{i_1}(t_1-s)} w^{\mathrm{T}}(s) Q_{\sigma(0)} w(s)\,\mathrm{d}s \\
& \quad + \cdots + \int_{t_k}^{t} \eta\, \mathrm{e}^{\alpha_{i_k}(t-s)} w^{\mathrm{T}}(s) Q_{i_k} w(s)\,\mathrm{d}s \\
& \leqslant \prod_{i\in H} \mu_i^{N_{\sigma i}(0,t)}\, \mathrm{e}^{\sum_{i\in H}\alpha_i T_i(0,t)} V_{i_0}(0) + \eta s_3 \\
& \quad \times \int_0^t \prod_{i\in H} \mu_i^{N_{\sigma i}(s,t)} e^{\sum_{i=1}^{h}\alpha_i T_i(s,t)} w^{\mathrm{T}}(s) w(s)\,\mathrm{d}s \\
& \leqslant \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{h} N_{0i}\ln(\mu_i)}\, \mathrm{e}^{T_{\mathrm{f}}\max_{i\in H}(\frac{\ln(\mu_i)}{\tau_{ai}}+\alpha_i)} \\
& \quad \times (V_{\sigma(0)}(x(0)) + \eta l s_3).
\end{aligned}
$$

由(24)式得及

$$
\begin{aligned}
& \tau_{ai} > \tau_{ai}^{*} \\
& = (T_{\mathrm{f}}\ln\mu_i) \times \Big[\ln(c_2 s_2) - \ln(c_1 s_1 + s_3 d + s_3\eta l) \\
& \quad - \alpha_i T_{\mathrm{f}} - \sum_{i=1}^{h} N_{0i}\ln\mu_i\Big]^{-1},
\end{aligned}
$$

可得

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{h} N_{0i}\ln(\mu_i)}\, \mathrm{e}^{T_{\mathrm{f}}\max_{i\in H}(\frac{\ln(\mu_i)}{\tau_{ai}}+\alpha_i)} \\
& \leqslant \frac{c_2 s_2}{s_1 c_1 + s_3 d + \eta s_3 l},
\end{aligned}
$$

又由

$$
\begin{aligned}
& V_{\sigma(0)}(0) \\
& = x^{\mathrm{T}}(0)E_{\sigma(0)}^{\mathrm{T}} P_{\sigma(0)} x(0) + w^{\mathrm{T}}(0) Q_{\sigma(0)} w(0) \\
& \leqslant x^{\mathrm{T}}(0)E_{\sigma(0)}^{\mathrm{T}} R^{\frac{1}{2}} Z_{\sigma(0)} R^{\frac{1}{2}} E_{\sigma(0)} x(0) + s_3 d \\
& \leqslant s_1 c_1 + s_3 d,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(t) & = x^{\mathrm{T}}(t)E_{\sigma(t)}^{\mathrm{T}} P_{\sigma(t)} x(t) + w^{\mathrm{T}}(t) Q_{\sigma(t)} w(t) \\
& \geqslant x^{\mathrm{T}}(t)E_{\sigma(t)}^{\mathrm{T}} R^{\frac{1}{2}} Z_{\sigma(t)} R^{\frac{1}{2}} E_{\sigma(t)} x(t) \\
& \geqslant s_2 x^{\mathrm{T}}(t)E_{\sigma(t)}^{\mathrm{T}} R E_{\sigma(t)} x(t),
\end{aligned}
$$

即 $x^{\mathrm{T}}(t)E_{\sigma(t)}^{\mathrm{T}} R E_{\sigma(t)} x(t) \leqslant c_2$, 所以系统是正则和脉冲自由且有限时间有界的.

定理 4 对于给定 $(c_1, c_2, d, l, R, T_{\mathrm{f}})$, $\forall i, j \in H$, 若存在非奇异矩阵 $M_i, N_i, \bar{P}_i, Q_i > 0, Z_i > 0, L_i$, 及实数 $\alpha_i > 0, \eta > 0, \mu_i \geqslant 1$, 使得

$$
\bar{P}_i^{\mathrm{T}} E_i^{\mathrm{T}} = E_i \bar{P}_i \geqslant 0, \tag{25}
$$

$$
\begin{bmatrix}
\mathcal{X}_{11} & G_i & C_i^{\mathrm{T}} \\
G_i^{\mathrm{T}} & \mathcal{Y}_{22} & D_i^{\mathrm{T}} \\
C_i & D_i & -I
\end{bmatrix} < 0, \tag{26}
$$

$$
\mathcal{X}_{11} = \bar{P}_i^{T} A_i^{\mathrm{T}} + L_i^{T} B_i^{\mathrm{T}} + A_i \bar{P}_i + B_i L_i - \alpha_i \bar{P}_i^{\mathrm{T}} E_i^{\mathrm{T}},
$$

$$
\mathcal{Y}_{22} = F_i^{\mathrm{T}} Q_i + Q_i F_i - (\alpha_i + \eta) Q_i,
$$

且(22)式、(23)式和(24)式成立(其中 $\bar{P}_i^{-1} = P_i$), 则存在状态反馈(6), 使得闭环系统(8)在模型依赖平均驻留时间满足

$$
\begin{aligned}
& \tau_{ai} > \tau_{ai}^{*} \\
& = \max\Big\{(T_{\mathrm{f}}\ln\mu_i)\Big[\ln(c_2 s_2) - \ln(c_1 s_1 + s_3 d + s_3\eta l) \\
& \quad - \alpha_i T_{\mathrm{f}} - \sum_{i=1}^{h} N_{0i}\ln\mu_i\Big]^{-1}, \frac{\ln\mu_i}{\alpha_i}\Big\}
\end{aligned}
$$

的切换信号下是正则、脉冲自由和有限时间有界且满足 H_∞ 性能指标 γ. 相应的增益矩阵为

$$
K_i = L_i \bar{P}_i^{-1}, \quad \gamma = \sqrt{\eta s_3\, \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{h} N_{0i} ln\mu_i}\, \mathrm{e}^{T_{\mathrm{f}}\max\alpha_i}}.
$$

证明 由(26)式知

$$
\begin{bmatrix}
\mathcal{M}_{11} & G_i \\
G_i^{\mathrm{T}} & F_i^{\mathrm{T}} Q_i + Q_i F_i - (\alpha_i + \eta) Q_i
\end{bmatrix} < 0.
$$

$$
\mathcal{M}_{11} = \bar{P}_i^{\mathrm{T}} A_i^{\mathrm{T}} + L_i^{\mathrm{T}} B_i^{\mathrm{T}} + A_i \bar{P}_i + B_i L_i - \alpha_i \bar{P}_i^{\mathrm{T}} E_i^{\mathrm{T}}
$$

对上式及(25)式分别左乘右乘

$$
\begin{bmatrix} P_i^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} P_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},
$$

并令 $K_i = L_i \bar{P}_i^{-1}$, $\bar{P}_i^{-1} = P_i$ 得

$$
\begin{bmatrix}
\hat{A}_i^{\mathrm{T}} P_i + P_i \hat{A}_i - \alpha_i E_i^{\mathrm{T}} P_i & P_i^{\mathrm{T}} G_i \\
G_i^{\mathrm{T}} P_i & \mathcal{N}_{22}
\end{bmatrix} < 0,
$$

$$
\mathcal{N}_{22} = F_i^{\mathrm{T}} Q_i + Q_i F_i - (\alpha_i + \eta) Q_i
$$

$$
\hat{A}_i = A_i + B_i K_i,
$$

及(21)式成立.

又因为 (22) 式、(23) 式和 (24) 式成立, 由定理 3 可知, 闭环系统 (8) 正则、脉冲自由且关于有限时间有界.

下面来说明系统具有有限时间 H_∞ 性能指标 γ.

选择 Lyapunov 函数

$$\begin{aligned}V(x(t)) &= V_{\sigma(t)}(x(t))\\ &= x^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}_{\sigma(t)}P_{\sigma(t)}x(t)+w^{\mathrm{T}}(t)Q_{\sigma(t)}w(t).\end{aligned}$$

当 $t\in[t_k,t_{k+1})$, 对 $V(t)$ 求导, 并由 (26) 式可得

$$\begin{aligned}\dot V(t) &< \alpha_{i_k}V(t)+(\eta w^{\mathrm{T}}(t)Q_{i_k}w(t)-z^{\mathrm{T}}(t)z(t))\\ &\leqslant \alpha_{i_k}V(t)+(\eta s_3 w^{\mathrm{T}}(t)w(t)-z^{\mathrm{T}}(t)z(t)).\end{aligned}$$

积分可得

$$\begin{aligned}V(t) <{}& \mathrm{e}^{\alpha_{i_k}(t-t_k)}V(t_k)+\int_{t_k}^{t}\mathrm{e}^{\alpha_{i_k}(t-s)}\\ &\times(\eta s_3 w^{\mathrm{T}}(s)w(s)-z^{\mathrm{T}}(s)z(s))\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

又由切换时刻 t_k 处, $V(t_k)\leqslant \mu_i V(t_k^-)$.

通过迭代, 并且整理有

$$\begin{aligned}V(t)\leqslant{}& \prod_{i\in H}\mu_i^{N_{\sigma i}(0,t)}\,\mathrm{e}^{\sum_{i\in H}\alpha_i T_i(0,t)}V_{\sigma(0)}(0)\\ &+\int_0^t\prod_{i\in H}\mu_i^{N_{\sigma i}(s,t)}\,\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^h\alpha_i T_i(s,t)}\\ &\times(\eta s_3 w^{\mathrm{T}}(s)w(s)-z^{\mathrm{T}}(s)z(s))\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

令初值 $x(0)=0$, 则 $V(0)=0$, 又 $V(t)\geqslant 0$, 则

$$\begin{aligned}&\int_0^t\prod_{i\in H}\mu_i^{N_{\sigma i}(s,t)}\,\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^h\alpha_i T_i(s,t)}\\ &\quad\times(\eta s_3 w^{\mathrm{T}}(s)w(s)-z^{\mathrm{T}}(s)z(s))\mathrm{d}s\geqslant 0,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\eta s_3\int_0^t\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^h N_{\sigma i}(0,s)\ln\mu_i}\,\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^h\alpha_i T_i(s,t)}\\ &\qquad\times w^{\mathrm{T}}(s)w(s)\mathrm{d}s\\ &\geqslant\int_0^t\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^h N_{\sigma i}(0,s)\ln\mu_i}\,\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^h\alpha_i T_i(s,t)}\\ &\qquad\times z^{\mathrm{T}}(s)z(s))\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由

$$\tau_{ai}\geqslant\frac{ln\mu_i}{\alpha_i},N_{\sigma i}(t,T_{\mathrm{f}})\leqslant N_{0i}+\frac{T_i(t,T_{\mathrm{f}})}{\tau_{ai}},$$

可得

$$N_{\sigma i}(0,s)\ln\mu_i\leqslant N_{0i}\ln\mu_i+\alpha_i T_i(0,s),$$

所以

$$\begin{aligned}&\int_0^t\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^h(N_{\sigma i}(0,s)\ln\mu_i+\alpha_i T_i(s,t))}w^T(t)w(t)\mathrm{d}s\\ &<\int_0^t\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^h(N_{0i}\ln\mu_i+\alpha_i T_i(0,t))}w^{\mathrm{T}}(s)w(s)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}&\int_0^t z^{\mathrm{T}}(s)z(s)\mathrm{d}s\\ &<\int_0^t\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^h(N_{\sigma i}(0,s)\ln\mu_i+\alpha_i T_i(s,t))}\\ &\quad\times z^{\mathrm{T}}(s)z(s)\mathrm{d}s\\ &\leqslant\eta s_3\,\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^h N_{0i}\ln\mu_i}\int_0^t\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^h\alpha_i T_i(0,t)}\\ &\quad\times w^{\mathrm{T}}(s)w(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

当 $t=T_{\mathrm{f}}$ 时,

$$\begin{aligned}&\int_0^{T_{\mathrm{f}}}z^{\mathrm{T}}(t)z(t)\mathrm{d}t\\ &\leqslant\eta s_3\,\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^h N_{0i}ln\mu_i}\,\mathrm{e}^{T_{\mathrm{f}}\max\alpha_i}\\ &\quad\times\int_0^{T_{\mathrm{f}}}w^{\mathrm{T}}(t)w(t)\mathrm{d}t\\ &=\gamma^2\int_0^{T_{\mathrm{f}}}w^{\mathrm{T}}(t)w(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

$\gamma=\sqrt{\eta s_3\,\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^h N_{0i}ln\mu_i}e^{T_{\mathrm{f}}\max\alpha_i}}$, 所以系统 (8) 满足 H_∞ 性能指标 γ.

证毕.

注 3 $t_0\neq 0$ 时, 证明方法类似. 当 $r=n$ 时, 上述就是一般切换系统有限时间稳定和有限时间有界的结论, 参看文献 [7].

4 数值算例

例 1 考虑具有两个子系统的切换奇异系统 (5), 其中,

$$E_1=E_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad A_1=\begin{bmatrix}1.05&0\\1&1\end{bmatrix},$$

$$A_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad B_1=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix},$$

$$B_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad N_{01}=N_{02}=0.$$

给定 $R=I$, $c_1=1$, $c_2=2$, $T_{\mathrm{f}}=2$, 当 $u(t)=0$ 时, 系统不是有限时间稳定的, 如图 1 所示.

现在我们给出控制器设计, 使得闭环系统 (7) 有限时间稳定. 选 $P_1=P_2=I$, 解定理 2 中的不等

式 (19), 得到反馈增益矩阵

$$K_1 = L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ K_2 = L_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

此时, 闭环系统 (7) 的系数矩阵变为

$$\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ \hat{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

选取

$$M_1 = M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$N_1 = N_2 = I,$$

$$\varTheta_1 = \varTheta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

由 (11) 式和 (12) 式, 并且令 $\mu_1 = \mu_2 = 1.01$, $\alpha_1 = 0.11$, $\alpha_2 = 0.01$, $Z_1 = Z_2 = I$, $s_1 = s_2 = 1$, 经过计算得到 $\tau_1^* = 0.0421$, $\tau_2^* = 0.0296$.

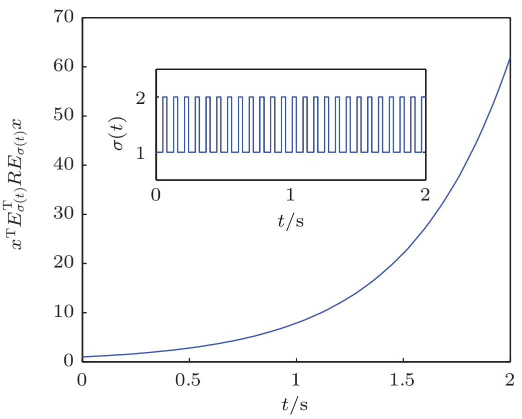

图 1 $x^{\mathrm{T}}E_{\sigma(t)}^{\mathrm{T}}RE_{\sigma(t)}x$ 的轨迹 ($x(0) = [1,0]'$, $\tau_1 = 0.05$, $\tau_2 = 0.03$)

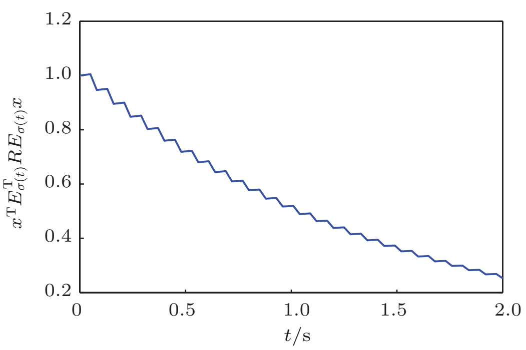

图 2 反馈后 $x^{\mathrm{T}}E_{\sigma(t)}^{\mathrm{T}}RE_{\sigma(t)}x$ 的轨迹

对满足 $\tau_1 \geqslant \tau_1^* = 0.0421$, $\tau_2 \geqslant \tau_2^* = 0.0296$ 和初值 $x^{\mathrm{T}}(0)E_{\sigma(0)}^{\mathrm{T}}RE_{\sigma(0)}x(0) \leqslant c_1$ 的切换, 有 $x^{\mathrm{T}}(t)E_{\sigma(t)}^{\mathrm{T}}RE_{\sigma(t)}x(t) \leqslant c_2$, 如图 2 .

下面讨论上述系统带有扰动项的情况.

例 2 系统 (1) 的 E_i, A_i, B_i 同例 1,

$$C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = D_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad G_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

扰动信号 $w(t) = \mathrm{e}^{-t}$, 讨论关于 $(R = I$, $c_1 = 1$, $c_2 = 10$, $T_{\mathrm{f}} = 10$, $d = 1$, $l = 1/2)$ 的有限时间有界问题. 显然 $F_1 = F_2 = -1$. 当 $u(t) = 0$ 时, 由于系统 (1) 脉冲自由, 所以存在

$$(M_1, N_1) = \left(I, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right), \quad (M_2, N_2) = (I, I)$$

使得 (E_1, A_1), (E_2, A_2) 化为标准型, 有 $M_1G_1 = G_1$, $M_2G_2 = G_2$. 它是有扰动的相容切换, 但不满足定理 3 的条件, 如图 3 所示.

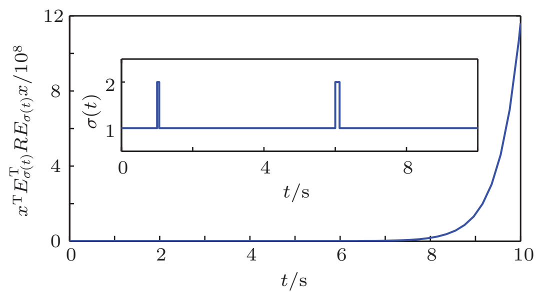

图 3 $x^{\mathrm{T}}E_{\sigma(t)}^{\mathrm{T}}RE_{\sigma(t)}x$ 的轨迹

我们设计反馈控制器, 使得闭环系统 (8) 有限时间有界.

选取 $P_1 = P_2 = I$, 求解定理 4 中的不等式 (26), 可得反馈增益阵 K_1, K_2, $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$, M_1, M_2, N_1, N_2. 由 (22) 式、(23) 式和 (24) 式成立, 得到相关参数 $Q_1 = Q_2 = 0.3$, $\mu_1 = \mu_2 = 1.01$, $\alpha_1 = 0.111$, $\alpha_2 = 0.001$, $Z_1 = Z_2 = I$, $s_1 = s_2 = 1$, $s_3 = 0.3$, $\eta = 5$, 算得相应的 $\tau_1^* = 0.1572$, $\tau_2^* = 0.1339$, $\gamma^2 = 4.5515$.

对满足

$$\tau_1 \geqslant \tau_1^* = 0.1572,$$

$$\tau_2 \geqslant \tau_2^* = 0.1339,$$

$$x^{\mathrm{T}}(0)E_{\sigma(0)}^{\mathrm{T}}RE_{\sigma(0)}x(0) \leqslant c_1$$

的切换, 有

$$x^{\mathrm{T}}(t)E_{\sigma(t)}^{\mathrm{T}}RE_{\sigma(t)}x(t) \leqslant c_2, \int_0^{T_{\mathrm{f}}} z^{\mathrm{T}}(t)z(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \gamma^2 \int_0^{T_f} w^{\mathrm{T}}(t) w(t) \mathrm{d}t,$$

见图4.

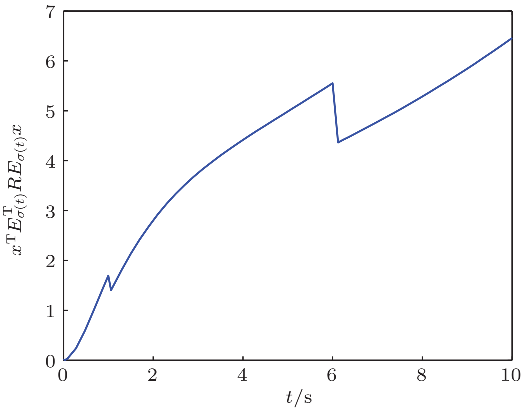

图 4 反馈后 $x^{\mathrm{T}}E_{\sigma(t)}^{\mathrm{T}}RE_{\sigma(t)}x$ 的轨迹

5 结 论

本文研究了一类子系统为正则和脉冲自由, 切换为相容切换的连续切换奇异系统, 给出它正则和脉冲自由且有限时间稳定性和有限时间有界的充分条件. 用模型依赖平均驻留时间给出有限时间可稳定和可有界且具有 H_∞ 性能指标 γ 的充分条件并且给出了状态反馈控制器设计. 时滞切换奇异系统的有限时间控制问题将是我们未来研究的一个主题.

参考文献

[1] Xu S Y, Lam J 2006 *Robust Control and Filtering of Singular Systems* (New York: Springer) p12

[2] Liu L L, Peng J G, Wu B W 2011 *Appl. Math. Lett.* **24** 703

[3] Wang Y E, Zhao J, Jiang B 2013 *IEEE Trans. Autom. Control.* **58** 2114

[4] Lin H, Antsaklis P J 2009 *IEEE Trans. Autom. Control.* **54** 308

[5] Zhao X D, Zhang L X, Shi P, Liu M 2012 *IEEE Trans. Autom. Control.* **57** 1809

[6] Lin X Z, Du H B, Li S H 2011 *Control and Decision* **26** 841 (in Chinese) [林相泽, 都海波, 李世华 2011 控制与决策 **26** 841]

[7] Liu H, Zhao X D 2014 *J. Franklin Inst.* **351** 1301

[8] Wu L F, Guan Y, Liu Y 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 110510 (in Chinese) [吴立锋, 关永, 刘勇 2013 物理学报 **62** 110510]

[9] Cao W, Sun M 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 020201 (in Chinese) [曹伟, 孙明 2014 物理学报 **63** 020201]

[10] Liberzon D ,Trenn S 2009 *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control* Shanghai, China, December 16–18, 2009 p2156

[11] Raouf J, Michalska H 2010 *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control* Hilton Atlanta Hotel, Atlanta, GA, USA, December 15–17, 2010 p414

[12] Shi S, Zhang Q, Yuan Z, Liu W 2011 *IET Control Theory A.* **5** 103

[13] Ma S P, Zhang C H, Wu Z 2008 *Appl. Math. Comput.* **206** 413

[14] Kimball J W, Krein P T 2008 *IEEE Trans. Power Electron.* **23** 2970

[15] Lin J X, Fei S M 2010 *Acta Autom. Sin.* **36** 1773

[16] Clotet J, Ferrer J, Magret M D 2009 *17th Mediterranean Conference on Control and Automation* Thessaloniki, Greece, June 24–26, 2009 p1343

[17] Zhang Y Q, Liu C X, Mu X W 2012 *Appl. Math. Comput.* **218** 5629

[18] Gao Z R, Shen Y X 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 120203

[19] Yang K, Shen Y X, Ji C G 2013 *J. Syst. Eng. Electron.* **35** 373 (in Chinese) [杨 坤, 沈艳霞, 纪志成 2013 系统工程与电子技术 **35** 373]

[20] Gao Z R 2012 *Ph. D. Dissertation* (Wuxi: Jiangnan University) (in Chinese) [高在瑞 2012 博士学位论文 (无锡:江南大学)]

[21] Ruan N N 2012 *M. S. Dissertation* (Nanjing: Institutes of Technology of Nanjing) (in Chinese) [阮楠楠 2012 硕士学位论文 (南京: 南京理工大学)]

[22] Dorata P 1961 *Proc. IRE Int. Conv. Rec.* **4** 83

[23] Amato F, Ariola M, Dorato P 2001 *Automatica* **37** 1459

[24] Zhong D, Gao S G, Zhao H, Ma Y J, Liu S J 2011 *Chin. Phys. B* **20** 120501

[25] Li P 2013 *Chin. Phys. B* **22** 070501

[26] Guo S P, Li D X, Meng Y H, Fan C Z 2014 *Chin. Phys. B* **23** 054502

[27] Huang F, Wu B W 2012 *CQUNJ* **29** 51 (in Chinese) [黄发, 吴保卫 重庆师范大学学报 (自然科学版) 2012 29 51]

Finite-time stability for switched singular systems*

Zhang Yao-Li Wu Bao-Wei† Wang Yue-E Han Xiao-Xia

(*College of mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China*)

(Received 12 April 2014; revised manuscript received 11 May 2014)

Abstract

In this paper, finite-time stability and stabilization of switched singular systems are studied. Firstly, we discuss the solvability condition of the switched singular system and introduce the concepts of finite-time stability and finite-time boundness. Secondly, using the mode-dependent average dwell time method and the Lyapunov function method, we provide sufficient conditions to guarantee that the switched singular system is regular, impulse free, and finite-time stable or finite-time bounded. Then, we design the state feedback controllers to ensure that a closed-loop system is finite-time stable and finite-time bounded with a present H_∞ disturbance attenuation level γ. Finally, numerical examples are given to verify the efficiency of the proposed theory.

Keywords: switched singular systems, finite-time stability, model-dependent average dwell time

PACS: 02.30.Yy, 42.82.Fv **DOI:** 10.7498/aps.63.170205

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11371233).

† Corresponding author. E-mail: wubw@snnu.edu.cn