

## 基于压缩感知的目标频空电磁散射特性快速分析\*

陈明生<sup>1)†</sup> 王时文<sup>1)2)</sup> 马韬<sup>2)</sup> 吴先良<sup>1)2)</sup>

1) (合肥师范学院电子信息工程学院, 合肥 230601)

2) (安徽大学电子信息工程学院, 合肥 230039)

(2014年2月20日收到; 2014年4月28日收到修改稿)

矩量法是求解目标电磁散射问题的一种常用数值方法, 因其精度较高而被广泛应用. 应用矩量法求解目标频空电磁散射特性时, 随着入射波的角度和频率的变化, 需要间隔很小的角度和频率步长反复求解矩量法生成的矩阵方程, 运算量极大. 为解决此类问题, 本文结合压缩感知理论和渐近波形估计形成一种新的有效计算方法. 首先, 基于压缩感知理论引入一种富含空间信息的新型入射源, 其次, 在该入射源照射下应用渐近波形估计技术求解, 从而快速实现目标频空电磁散射特性分析.

**关键词:** 电磁散射, 矩量法, 压缩感知, 渐近波形估计

**PACS:** 03.50.De, 02.10.Yn, 42.25.Bs, 42.25.FX

**DOI:** 10.7498/aps.63.170301

## 1 引言

作为数值求解积分方程的有效技术, 矩量法因其较高的计算精度而被广泛应用于电磁散射和辐射问题的计算<sup>[1,2]</sup>. 由于全耦合计算以及频域方法本身的限制等因素, 矩量法将电磁场积分方程转化为稠密的矩阵方程进行求解<sup>[3]</sup>, 在大电目标分析、宽频电磁响应、不同入射方向下的电磁散射计算等方面存在较大改进空间. 近年来, 围绕大电目标电磁特性分析, 人们在矩量法的基础上提出了很多快速算法, 其中具有代表性的有快速多极子技术(FMM)<sup>[4]</sup>、自适应积分算法(AIM)<sup>[5]</sup>、共轭梯度快速傅里叶变换法(CG-FFT)<sup>[6]</sup>等; 围绕宽频响应分析, 基于矩量法有模基参数估计(MBPE)<sup>[7]</sup>、渐近波形估计(AWE)<sup>[8]</sup>和预条件矩阵插值扫频法<sup>[9]</sup>等; 在不同入射方向下的电磁散射的计算方面有插值和逼近方法<sup>[10,11]</sup>和对激励向量进行低阶压缩的方法<sup>[12]</sup>等. 目标频空电磁散射特性分析一直是一个难点课题, 在传统矩量法计算中, 需要以较小的

入射角度和频率间隔进行反复计算, 这将耗费大量的计算机资源. 文献<sup>[13]</sup>基于几何绕射(GTD)这一高频计算模型, 利用三次样条插值快速实现了目标的频空分析.

本文将首先基于压缩感知理论<sup>[14,15]</sup>构建一种富含空间信息的电磁场激励源, 通过此类激励源的数次照射, 应用矩量法计算可得表面感应电流的观测值, 进而可通过恢复算法获得不同入射角下目标表面感应电流. 其次, 引入渐近波形估计技术, 结合新型电磁场激励源和稀疏变换, 获得宽频带情况下感应电流的观测值, 最终恢复出不同入射角度和入射频率下目标表面的真实感应电流, 从而形成一种适用于目标频空电磁散射特性分析的新的有效计算方法.

## 2 理论

应用矩量法可将电磁场积分方程转化为如下形式的矩阵方程:

$$Z(k)I(k, \theta) = V(k, \theta), \quad (1)$$

\* 教育部科学技术研究重点项目 (批准号: 212081), 安徽省学术技术带头人活动经费和安徽省自然科学基金 (批准号: 1408085QF104) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: chenms@ustc.edu.cn

式中  $V$  为激励向量,  $Z$  为稠密的阻抗矩阵,  $k$  为入射波的波数,  $\theta$  为入射角度. 由此可以看出, 在分析目标频空电磁散射特性时,  $k$  或  $\theta$  每改变一次, 就会产生一个新的稠密矩阵方程, 造成大量的反复计算, 使得矩量法的弱势凸显.

为计算不同入射方向激励下的散射问题, 引入压缩感知理论, 其执行过程分为稀疏变换、观测和恢复这三个过程<sup>[16]</sup>. 压缩感知原理过程描述如下:

首先, 获得信号的稀疏表示

$$X = \psi^T \alpha, \quad (2)$$

其中  $\psi$  为变换矩阵,  $\alpha$  为  $X$  的稀疏表示.

其次, 设计一个平稳、与变换基不相关的  $M \times L$  维的观测矩阵, 对  $\alpha$  进行观测

$$\begin{aligned} Y_{M \times 1} &= \Phi_{M \times L} \alpha_{L \times 1} = \Phi_{M \times L} \psi_{L \times L} X_{L \times 1} \\ &= A_{M \times L}^{\text{CS}} X_{L \times 1}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $A_{M \times L}^{\text{CS}} = \Phi_{M \times L} \psi_{L \times L}$ , 在实际操作中正是依靠  $A_{M \times L}^{\text{CS}}$  同时实现对信号的压缩、采样.

最后, 进行信号的重构. 在获得  $X_{L \times 1}$  的观测向量  $Y_{M \times 1}$  之后, 问题的重点转化为如何应用极少的观测值去恢复原始信号  $X_{L \times 1}$ , 而这也是压缩感知理论在工程应用中极为重要的一个环节. 一般而言, 压缩感知的信号重构是基于 0 范数优化问题而展开求解的, 即

$$\begin{aligned} \min & \|\psi X\|_0, \\ \text{s.t.} & A^{\text{CS}} X = Y, \end{aligned} \quad (4)$$

其中目标函数  $\min \|\psi X\|_0$  等价于  $\min \|\alpha\|_0$ , 其意义在于在稀疏域内以最少数目的投影系数重新表示原始信号 (或理解为找到稀疏域内最重要的投影系数).

在压缩感知框架下, 设入射频率固定 (对应波数为  $k_0$ ), 构建新型入射源为

$$V^{\text{CS}}(k_0) = \sum_{i=1}^L c_i V(k_0, \theta_j), \quad (5)$$

其中  $\theta_j$  为一定采样率下的入射角度,  $c_i$  为高斯随机数, 叠加后  $V^{\text{CS}}$  依然为一激励向量.

将上式代入 (1) 式可得

$$Z(k_0) I^{\text{CS}}(k_0) = V^{\text{CS}}(k_0). \quad (6)$$

根据压缩感知理论, 式中  $I^{\text{CS}}$  为真实电流的观测值, 产生  $M$  组  $V_m^{\text{CS}} (m = 1, 2, \dots, M)$  后, 经迭代计算可

获得感应电流的一组观测值, 其过程所产生的随机数组恰好形成压缩感知中的观测矩阵,

$$\Phi = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1L} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{M1} & c_{M2} & c_{M3} & \cdots & c_{ML} \end{bmatrix}_{M \times L}. \quad (7)$$

当考虑电流信号在原始空间非稀疏的情况, 则引入稀疏变换, 在变换域内实现有效观测, 实际操作中可将 (7) 式改为

$$\begin{aligned} A^{\text{CS}} = \Phi \psi &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1L} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{M1} & c_{M2} & c_{M3} & \cdots & c_{ML} \end{bmatrix}_{M \times L} \\ &\times [\psi]_{L \times L}. \end{aligned} \quad (8)$$

为优化计算效率, 对于非稀疏的电流, 需构建变换矩阵  $\Psi_{L \times L} = (\psi_1 \ \psi_2 \ \cdots \ \psi_L)$ , 获得原始感应电流在变换矩阵下的稀疏表示  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_L)$ , 以展开式的形式表示为

$$I(k_0, \theta) = \sum_{j=1}^L \alpha_j \psi_j(\theta). \quad (9)$$

对不同入射角  $\theta_i$ , 则有

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} I(k_0, \theta_1) \\ I(k_0, \theta_2) \\ \vdots \\ I(k_0, \theta_L) \end{pmatrix}_{L \times 1} \\ &= \psi_{L \times L} \alpha_{L \times 1} \\ &= \begin{pmatrix} \psi_1 \theta_1 & \psi_2 \theta_1 & \cdots & \psi_L \theta_1 \\ \psi_1 \theta_2 & \psi_2 \theta_2 & \cdots & \psi_L \theta_2 \\ & & \vdots & \\ \psi_1 \theta_L & \psi_2 \theta_L & \cdots & \psi_L \theta_L \end{pmatrix}_{L \times L} \\ &\times \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_L \end{pmatrix}_{L \times 1}. \end{aligned} \quad (10)$$

以  $A^{\text{CS}}$  的行向量代入 (5) 式形成新的激励项  $V^{\text{CS}}$  获得电流的有效观测.

在新型激励下, 将  $I^{CS}(k)$  在  $k_0$  附近展开成泰勒级数

$$I^{CS}(k) = \sum_{n=0}^N m_n (k - k_0)^n, \quad (11)$$

其中  $m_n$  为泰勒展开系数

$$m_0 = Z^{-1}(k_0) \sum_{j=1}^L c_j V(k_0, \theta_j), \quad (12)$$

$$m_n = Z^{-1}(k_0) \left[ \frac{\sum_{j=1}^L c_j V^{(n)}(k_0, \theta_j)}{n!} - \sum_{i=1}^n \frac{Z^{(i)}(k_0) m_{n-i}}{i!} \right], \quad (13)$$

$n = 1, 2, \dots, N.$

进一步通过 Padé 有理逼近将  $I^{CS}(k)$  展开成有理函数拓展精确计算范围, 即

$$I^{CS}(k) = \frac{\sum_{i=0}^P a_i (k - k_0)^i}{1 + \sum_{j=1}^Q b_j (k - k_0)^j}, \quad (14)$$

其中  $P + Q = N$ ,  $a_i, b_j$  为 Padé 展开系数, 可通过比较系数法由  $m_n$  确定. 由 (7) 式产生  $M$  组观测系数, 代入 (12) 至 (14) 式计算, 可获得较宽频带内电流的  $M$  组观测值, 根据观测值应用正交匹配追踪算法 (OMP) [17] 可恢复出不同频率下电流的宽角度响应, 从而实现目标频空特性的有效分析.

### 3 实验及数值结果分析

为验证所描述算法的有效性, 采用高斯随机矩阵作为观测矩阵和 Hermite 多项式作为稀疏变换, 分别以传统的矩量法和 AWE-CS 技术对二维理想导体圆柱、导体方柱和三维导电立方体的电磁散射特性进行分析.

首先, 选择半径为 10 cm 的一无限长理想导体圆柱, 入射波频带为 1—5 GHz (中心频率点选择 3 GHz), 目标表面被离散成 256 段, 以 0.1 GHz,  $1^\circ$  为步长, 分别采用 MOM 逐点计算和 CS-AWE 计算. 图 1 为入射频率 2 GHz 时, 选择某固定离散单元中心 ( $x = 3.5$  cm,  $y = 9.4$  cm), 其在不同入射角照射下感应电流的计算结果比较, 图 2 为入射频率为 1.5 GHz 时,  $60^\circ$  入射下不同单元的感应电流 CS-AWE 计算结果比较. 当观测数  $M = 26$  时,

CS-AWE 计算结果与 MOM 计算结果的相对误差分别为 0.27% (图 1), 0.41% (图 2).

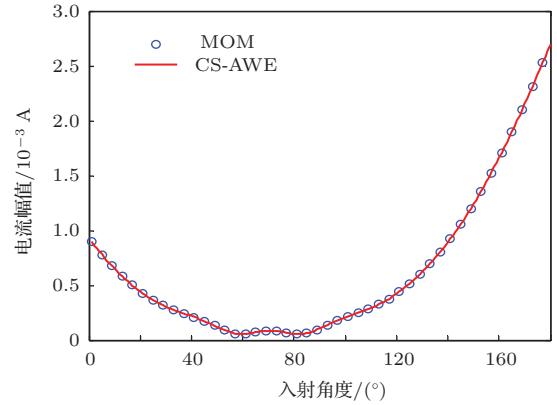


图 1 固定离散单元中心 ( $x = 3.5$  cm,  $y = 9.4$  cm) 感应电流随入射角度变化情况

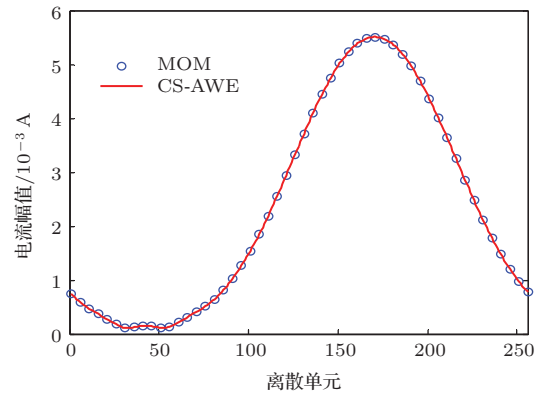


图 2  $60^\circ$  入射下不同单元的感应电流 CS-AWE 计算结果比较

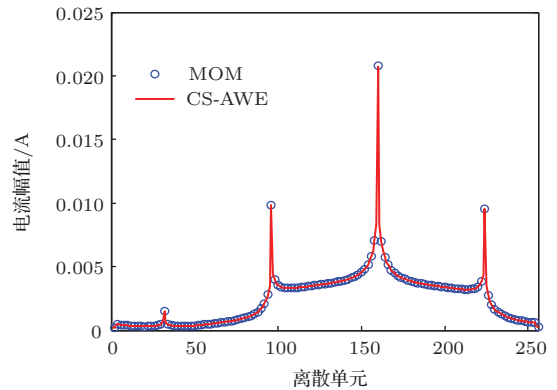


图 3  $45^\circ$  入射下不同单元的感应电流 CS-AWE 计算结果比较

其次, 计算边长为 10 cm 的无限长导体方柱, 入射波频带为 1—5 GHz (中心频率点选择 3 GHz), 目标表面被离散成 256 段, 以 0.1 GHz,  $1^\circ$  为步长, 分别采用 MOM 逐点计算和 CS-AWE 计算. 图 3 为入射频率 1.5 GHz 时,  $45^\circ$  入射下不同单元的感应

电流CS-AWE计算结果比较. 当观测数  $M = 26$  时, CS-AWE计算结果与MOM计算结果的相对误差为0.39%.

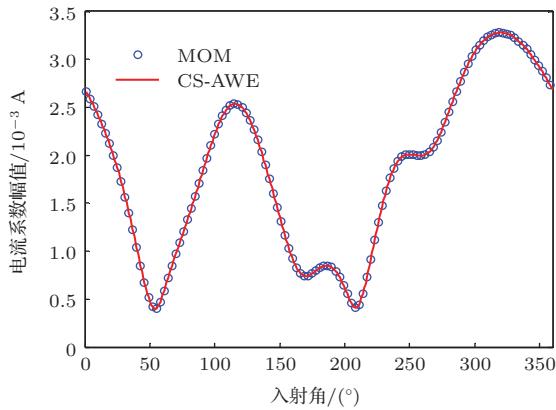


图4 某RWG基函数上电流系数随入射角度变化情况

最后, 对一个边长为1 cm的立方体, 在  $x$  方向极化、频带为20—40 GHz(中心频率点选择30 GHz)的入射波照射下, 目标表面被离散成512个三角单元, 共生成768个RWG基函数. 以0.5 GHz,  $1^\circ$ 为步长, 分别采用MOM逐点计算和CS-AWE计算. 图4为入射频率25 GHz时, 对由顶点坐标分别为  $(-0.05 \ 0 \ 0.05)$ ,  $(-0.0388889 \ 0 \ 0.05)$ ,  $(-0.0277778 \ 0 \ 0.05)$  和  $(-0.0166667 \ 0 \ 0.05)$ ,  $(-0.00555556 \ 0 \ 0.05)$ ,  $(0.00555555 \ 0 \ 0.05)$  的两个三角形构成的矢量基函数, 在不同入射角度下 ( $\varphi = 90^\circ, \theta \in [0 \ 360^\circ]$ ), 电流系数的CS-AWE计算结果比较. 当观测数  $M = 36$  时, CS-AWE计算结果与MOM计算结果的相对误差为0.63%.

在vc6.0平台下, 在CPU主频为2.4 GHz、内存为3 Gb的个人计算机上, 分别采用传统MOM计算和CS-AWE技术计算的时间比较如表1所示, 由此可见将压缩感知理论与渐近波形估计技术有效结合, 能够大幅提高矩量法分析目标频空电磁散射特性时的计算效率.

表1 计算时间比较

算例	算法	频率采样点数	角度采样点数	计算时间/s
圆柱	MOM	41	361	7342.4
	CS-AWE	41	361	357.8
方柱	MOM	41	361	7471.6
	CS-AWE	41	361	373.5
立方体	MOM	41	361	11248.7
	CS-AWE	41	361	537.2

在图5中, 给出了分别采用离散余弦变换(DCT)与Hermite正交变换作为稀疏变换时的精度比较. 定义全局相对误差如下:

$$\text{Error} = \frac{\sum_u \sum_v \sum_j \|\hat{I}_u(k_v, \theta_j) - I_u(k_v \theta_j)\|_2}{\sum_u \sum_v \sum_j \|I_u(k_v \theta_j)\|_2} \times 100\%, \quad (15)$$

其中  $u$  表示剖分(基函数)序号,  $v$  表示频带内离散频率点序号,  $j$  为  $0^\circ - 360^\circ$  内的角度采样序号.

为便于观察, 将全局相对误差的对数随观测数目的变化情况显示在图5中, 在各算例中, Hermite正交变换都以较小的观测数目率先实现误差低于1%. 由此可见, 稀疏变换的选择将对计算复杂度起较大影响.

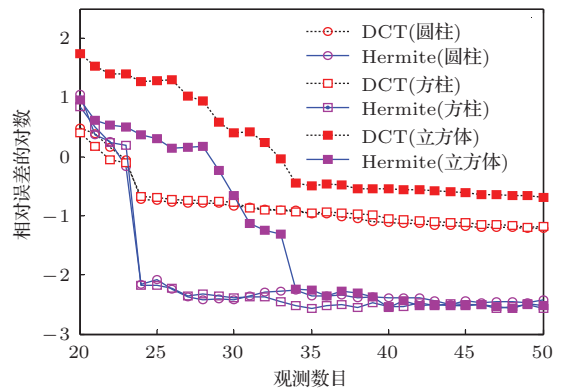


图5 不同稀疏变换下相对误差随观测数目的变化情况

## 4 结 论

针对传统矩量法分析目标频空电磁散射特性时的弱势, 论文引入压缩感知理论构建了一种新型激励源, 用以分析宽角度入射下的电磁散射问题, 在该激励源下引入渐近波形估计技术进一步加速了目标频空特性分析的计算效率, 并通过数值算例验证了所提算法的精确性和高效率. 鉴于所提方案的通用性, 其在其他工程领域所涉线性系统的多参数分析中亦有一定参考价值.

## 参考文献

- [1] Sheng X Q, Song W 2012 *Essentials of Computational Electromagnetics* (Singapore: Wiley-IEEE Press) p29
- [2] Xie C F, Wu X L 2002 *Electromagnetic Scattering Theory and Computation*. (Hefei: Anhui University Press)

- p8 (in Chinese) [谢处方, 吴先良电磁散射理论与计算(合肥: 安徽大学出版社) 第8页]
- [3] Wang A Q, Guo L X, Chai C 2011 *Chin. Phys. B* **20** 050202
- [4] Hu J, Lu W C, Shao H R, Nie Z P 2012 *IEEE Trans. Ant. Prop.* **60** 5709
- [5] Yang K, Yilmaz A E 2012 *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* **50** 1130
- [6] Zhao L, Cui T J 2007 *Microw. Opt. Tech. Lett.* **49** 305
- [7] Zhang X Y, Sheng X Q 2009 *International Conference on Microwave Technology and Computational Electromagnetics* Beijing China November 3–6 2009 p452
- [8] Du H M, Chen M S, Wu X L 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 097201 (in Chinese) [杜红梅, 陈明生, 吴先良 2012 物理学报 **61** 097201]
- [9] Fan Z H, Liu Z W, Ding D Z, Chen R S 2010 *IEEE Trans. Ant. Prop.* **58** 2484
- [10] Ling J, Gong S X, Wang X, Lu B, Wang W T 2010 *IEEE Ant. and Wire. Prop. Lett.* **9** 244
- [11] Wang Y, Wu Q, Wu Y M 2012 *Chin. Phys. B* **21** 014212
- [12] Schröder A, Brüns H D, Schuster C 2012 *IEEE Trans. Ant. Prop.* **60** 6058
- [13] Liu Z W, Chen R S, Ding D Z, Luo L 2011 *J. Appl. Comput. Electromag. Soc.* **26** 696
- [14] Chen M S, Liu F L, Du H M 2011 *IEEE Ant. and Wire. Prop. Lett.* **10** 1243
- [15] Qaisar S, Bilal R M, Lqbal W, Naureen M, Lee S 2013 *J. Commun. and Networks* **15** 443
- [16] Zhao S M, Zhuang P 2014 *Chin. Phys. B* **23** 054203
- [17] Tropp J A, Gilbert A 2007 *IEEE Trans. Inf. Theory* **53** 4655

## Fast analysis of electromagnetic scattering characteristics in spatial and frequency domains based on compressive sensing\*

Chen Ming-Sheng<sup>1)†</sup> Wang Shi-Wen<sup>1)2)</sup> Ma Tao<sup>2)</sup> Wu Xian-Liang<sup>1)2)</sup>

1) (School of Electronics and Information Engineering, Hefei Normal University, Hefei 230601, China)

2) (School of Electronics and Information Engineering, Anhui University, Hefei 230039, China)

( Received 20 February 2014; revised manuscript received 28 April 2014 )

### Abstract

Method of moments (MOM) is a common numerical method for solving electromagnetics, which is used widely owing to its high accuracy. As the traditional MOM is applied to solving electromagnetic problem in both spatial and frequency domains, the matrix equation generated from the integral equation must be solved repeatedly since small spatial increments and frequency increments are both required. To resolve problems of this kind, the compressive sensing (CS) theory combined with the asymptotic waveform evaluation (AWE) is introduced to form a new efficient computational method. Firstly, a new incident source is constructed based on CS theory, in which much spatial information is included. Secondly, illuminated by the new incident source, the new equation is solved by AWE technique, and finally a fast implement is formed for solving electromagnetic scattering characteristics in both spatial and frequency domains.

**Keywords:** electromagnetic scattering, method of moments, compressive sensing, asymptotic waveform evaluation

**PACS:** 03.50.De, 02.10.Yn, 42.25.Bs, 42.25.FX

**DOI:** 10.7498/aps.63.170301

\* Project supported by the Foundation for Key Program of Ministry of Education, China (Grant No. 212081), the Project of Academic Technology Leader's Funds in Anhui Province, and the Anhui Provincial Natural Science Foundation, China (Grant No. 1408085QF104).

† Corresponding author. E-mail: chenms@ustc.edu.cn