

色关联乘性和加性色噪声驱动的多稳态系统的 稳态特性*

时培明^{1)†} 李培¹⁾ 韩东颖²⁾

1) (燕山大学电气工程学院, 秦皇岛 066004)

2) (燕山大学车辆与能源学院, 秦皇岛 066004)

(2014年3月13日收到; 2014年4月18日收到修改稿)

研究了色关联乘性和加性色噪声作用下的三稳态系统的稳态问题. 首先利用一致有色噪声近似方法, 推导出稳态概率密度函数的表达式, 然后分析了乘性噪声和加性噪声的强度以及关联性对稳态概率密度函数的影响, 研究表明: 加性噪声强度、加性噪声和乘性噪声的关联强度和关联时间可以诱导系统的非平衡相变.

关键词: 乘性色噪声, 加性色噪声, 稳态概率密度函数, 三稳态系统

PACS: 05.45.-a, 05.40.Ca

DOI: 10.7498/aps.63.170504

1 引言

非平衡相变是非平衡状态下出现的一种内部的自组织现象或者说是非平衡系统由一个非平衡定态向另一个非平衡定态的跃迁过程. 人们在研究诱导系统非平衡相变时, 发现当系统的某个参数达到某一临界值时, 稳态概率密度分布曲线的结构发生改变, 即峰值数目发生改变^[1-3]. 文献[4-6]研究了Duffing振子在窄带随机噪声、谐和与随机噪声联合激励下的双峰稳态概率密度, 用等效线性化方法求出了双峰稳态概率密度的表达式. 文献[7]研究了由色关联的色噪声驱动的双稳杜芬模型的稳态概率密度函数, 分析了噪声的有色性及关联性对稳态概率密度的影响. 文献[8]对双色噪声激励下FHN神经元系统的稳态性质进行了分析. 此外Wu等^[9]分析了乘性和加性噪声作用下三稳态Van der Pol-Duffing振子的随机P分岔, 得到系统的稳态概率密度函数冰球的随机P分岔的临界参数条件.

通常情况下, 噪声和信号是以相加的形式引入系统中的, 但是在有些实际系统中, 噪声和信号必须以相乘的方式出现. 随着对系统的深入研究, 我们发现有些动力系统是由多个有某种关联的噪声驱动的, 这方面研究者们做了很多工作. 如靳艳飞等^[10]研究了由色关联噪声驱动的线性系统随机共振现象, 发现加性噪声能够减弱输出的信噪比, 而噪声之间的互关联强度能够使输出的信噪比增强; 文献[11]研究了色关联噪声驱动双稳系统平均首通时间; 曹力等^[12]研究了关联噪声对双稳系统的稳态概率密度及对随机共振的影响.

在研究系统时, 所用的白噪声是人们假设的一种理想情况, 而在实际中遇到的一般都是色噪声, 色噪声较之白噪声要复杂很多, 因此我们只能通过近似处理得到它驱动的非线性系统的Fokker-Planck方程^[13]. 徐伟等^[14]研究了色高斯噪声驱动双稳系统的多重随机共振研究, 根据随机刘维方程^[15], Novikov定理^[16]以及van Kamper引理得到了近似的Fokker-Planck方程FPE.

* 国家自然科学基金(批准号:51005196, 51104129)、河北省自然科学基金(批准号: E2012203194)和河北省教育厅优秀青年基金(批准号: YQ2013020)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: peiming.shi@163.com

本文首先推导出三稳态系统中概率密度函数的公式, 然后研究了色关联乘性噪声和加性噪声强度、关联强度以及关联时间对稳态概率密度的影响, 发现一些因素可以诱导系统平衡相变.

$$\langle \xi^2(t) \rangle = \begin{cases} \frac{2D}{\tau_1(5-3Q)} \left(Q \in \left(-\infty, \frac{5}{3} \right) \right), \\ \infty \left(Q \in \left[\frac{5}{3}, 3 \right) \right). \end{cases} \quad (6)$$

2 三稳态系统的概率密度函数

由色关联乘性色噪声和加性色噪声驱动了三稳态系统, 其郎之万方程如下:

$$\frac{dx}{dt} = -U'(x) + x\xi(t) + \eta(t) + A \cos \Omega t, \quad (1)$$

$$U(x) = \frac{b}{2}x^2 + \frac{c}{4}x^4 + \frac{d}{6}x^6, \quad (2)$$

其中 $A \cos \Omega t$ 为一弱周期信号, $U(x)$ 是三稳态势函数, 它表示一个对称的三稳势函数, 具有四个稳定点 x_1, x_2, x_3, x_4 和一个不稳定点 x_0 , 分别如下:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \\ x_{1,2} &= \pm \sqrt{\frac{-1}{2d}(c + \sqrt{c^2 - 4bd})}, \\ x_{3,4} &= \pm \sqrt{\frac{-1}{2d}(c - \sqrt{c^2 - 4bd})}, \end{aligned} \quad (3)$$

$\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 分别为乘性和加性色噪声, 其统计性质为^[17]

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= \langle \eta(t) \rangle = 0, \\ \langle \xi(t)\xi(t') \rangle &= \frac{p}{\tau_1} \exp[-|t.. - t'|/\tau_1], \\ \langle \eta(t)\eta(t') \rangle &= \frac{p}{\tau_2} \exp[-|t.. - t'|/\tau_2], \\ \langle \xi(t)\eta(t') \rangle &= \langle \xi(t')\eta(t) \rangle \\ &= (\lambda\sqrt{pq}/\tau_3) \exp[-|t.. - t'|/\tau_3], \end{aligned} \quad (4)$$

式中, p 和 q 分别为乘性和加性色噪声强度; τ_1 和 τ_2 分别表示乘性和加性色噪声的自关联时间; τ_3 为乘性和加性色噪声之间的互关联时间; λ 表示乘性和加性色噪声之间的互关联强度.

乘性噪声 $\xi(t)$ 为非高斯噪声, 它的导数为^[18,19]

$$\xi'(t) = -\frac{1}{\tau_1} \frac{d}{d\xi} V_q(\xi) + \frac{1}{\tau_1} \varepsilon(t), \quad (5)$$

其中

$$V_q(\xi) = \frac{D}{\tau_1(Q-1)} \ln \left[1 + \frac{\tau_1}{D}(Q-1) \frac{\xi^2}{2} \right],$$

$\varepsilon(t)$ 为高斯白噪声, 其统计性质为

$$\langle \varepsilon(t) \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon(t)\varepsilon(t') \rangle = 2D\delta(t-t'), \quad (7)$$

其中, D 为 $\varepsilon(t)$ 的噪声强度, Q 为 $\xi(t)$ 偏离高斯分布的程度.

当 $Q \rightarrow 1$ 时, 根据路径积分法可得

$$\xi'(t) = -\frac{1}{\tau_{\text{ff}}} \xi(t) + \frac{1}{\tau_{\text{ff}}} \varepsilon_1(t), \quad (8)$$

其中 $\varepsilon_1(t)$ 为高斯白噪声, 其统计性质为

$$\langle \varepsilon_1(t) \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon_1(t)\varepsilon_1(t') \rangle = 2D_{\text{ff}}\delta(t-t'), \quad (9)$$

这里 τ_{ff} 和 D_{ff} 分别表示有效噪声相关时间和强度,

$$\tau_{\text{ff}} = \frac{2(2-q)}{5-3Q} \tau_1, \quad D_{\text{ff}} = \left(\frac{2(2-q)}{5-3Q} \right)^2 D. \quad (10)$$

当 $Q \rightarrow 1$ 时, $\xi(t)$ 可近似看作自相关时间为 τ_{ff} , 噪声强度为 D_{ff} 的高斯色噪声. 根据一致有色噪声近似, (1) 式可写成

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{E(x)} [-bx + cx^3 + dx^5] + x\varepsilon_1(t) + \eta(t) \\ &\quad + A \cos(\Omega t), \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$E(x) = 1 - \tau_{\text{ff}} \left[-2x^2 - \frac{A \cos(\Omega t)}{x} \right]. \quad (12)$$

方程 (12) 进一步可写为

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(x)H(t), \quad (13)$$

其中 $H(t)$ 表示高斯白噪声, 有

$$\begin{aligned} \langle H(t) \rangle &= 0, \\ \langle H(t)H(t') \rangle &= 2\delta(t-t'), \\ f(x) &= \frac{-(bx + cx^3 + dx^5) + A \cos(\Omega t)}{E(x)}, \\ g(x) &= \frac{(D_{\text{ff}}x^2 + q)^{1/2}}{E(x)}. \end{aligned} \quad (14)$$

根据方程 (1)–(14) 得到近似的 Fokker-Planck 方程

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial A(x)p(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 B(x)p(x,t)}{\partial x^2}, \quad (15)$$

其中

$$A(x) = -bx - cx^3 - dx^5 + A \cos \Omega t + \frac{1}{2}B'(x),$$

$$B(x) = \frac{px^2}{1+2\tau_1} + \frac{2\lambda\sqrt{pq}}{1+2\tau_3}x + \frac{q}{1+2\tau_2}. \quad (16)$$

根据方程 (15) 可以得到三稳态概率密度函数^[20]

$$p(x,t) = \frac{N}{\sqrt{B(x)}} \exp\left[-\frac{\tilde{U}(x)}{p}\right], \quad (17)$$

式中 N 为归一化常数, 则广义势函数 $\tilde{U}(x)$ 的表达式为

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x) = & C_1x^4 + C_2x^3 + C_3x^2 + C_4x + C_5 \ln B(x) \\ & + C_6 \arctan\left(\frac{x+\psi_1}{\psi_2}\right), \end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} C_1 = & \frac{d(1+2\tau_1)}{4}, \\ C_2 = & -\frac{2\lambda d\sqrt{pq}(1+2\tau_1)^2}{3p(1+2\tau_3)}, \\ C_3 = & \frac{c(1+2\tau_1)}{2} - \frac{2qC_1(1+2\tau_1)}{p(1+2\tau_2)} \\ & - \frac{3\lambda C_2\sqrt{pq}(1+2\tau_1)}{p(1+2\tau_3)}, \\ C_4 = & -\frac{3qC_2(1+2\tau_1)}{p(1+2\tau_2)} - \frac{4\lambda C_3\sqrt{pq}(1+2\tau_1)}{p(1+2\tau_3)}, \\ C_5 = & \frac{b(1+2\tau_1) - p}{2} - \frac{qC_3(1+2\tau_1)}{p(1+2\tau_2)} \\ & - \frac{\lambda C_4\sqrt{pq}(1+2\tau_1)}{p(1+2\tau_3)}, \\ C_6 = & \frac{pA \cos \Omega t - \frac{p\lambda\sqrt{pq}}{1+2\tau_3} - p - \frac{qC_4}{1+2\tau_3} - \frac{2\lambda C_5\sqrt{pq}}{1+2\tau_3}}{\frac{q}{1+2\tau_2} - \frac{\lambda^2 q(1+2\tau_1)}{(1+2\tau_3)^2}}, \\ \psi_1 = & \frac{\lambda\sqrt{pq}(1+2\tau_1)}{p(1+2\tau_3)}, \end{aligned}$$

当 $\frac{\lambda^2(1+2\tau_1)(1+2\tau_2)}{(1+2\tau_3)^2} < 1$ 时,

$$\psi_2 = \sqrt{\frac{q(1+2\tau_1)}{p(1+2\tau_2)} - \frac{\lambda^2 q(1+2\tau_1)^2}{p(1+2\tau_3)^2}},$$

当 $\frac{\lambda^2(1+2\tau_1)(1+2\tau_2)}{(1+2\tau_3)^2} > 1$ 时,

$$\psi_2 = \sqrt{\frac{\lambda^2 q(1+2\tau_1)^2}{p(1+2\tau_3)^2} - \frac{q(1+2\tau_1)}{p(1+2\tau_2)}}. \quad (19)$$

3 三稳态系统中噪声对稳态概率密度的影响

根据稳态概率密度公式, 分别作出概率密度函数随乘性噪声强度、加性噪声强度、乘性噪声自关

联时间、加性噪声自关联时间、乘性和加性噪声互关联时间, 乘性和加性噪声互关联强度变化的曲线, 观察曲线, 讨论噪声对概率密度函数的影响, 判断是否产生新的非线性现象, 为平均首次穿约时间, 信噪比等问题的研究打下基础.

3.1 噪声互关联强度对稳态概率密度的影响

概率密度函数随噪声互关联强度变化的曲线如图 1 和图 2 所示.

从图中可以看出当 $\lambda = 0$ 时, $p(x,t)$ 结构对称, 有三个波峰; 当 $\lambda = 0.3$ 时, 结构不对称, 随着 λ 的增加左边的峰逐渐升高, 而右边的峰值逐渐降低; 当 $\lambda = 1$ 时, 左边的峰增到最大, 右边的峰完全消失. 当 $\lambda = -0.3$ 时, 随着 $|\lambda|$ 的增加右边的峰值逐渐升高, 而左边的峰值逐渐降低; 当 $\lambda = -1$ 时, 右边的峰增到最大, 左边的峰完全消失. 在这个过程中, 波峰数目发生了变化, 即噪声互关联强度可以导致系统非平衡相变.

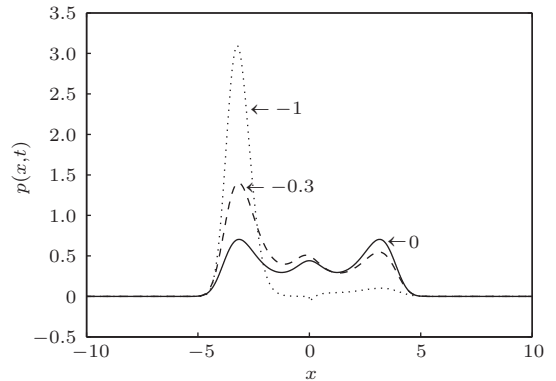


图 1 概率密度函数随噪声非负互关联强度 λ 变化的曲线

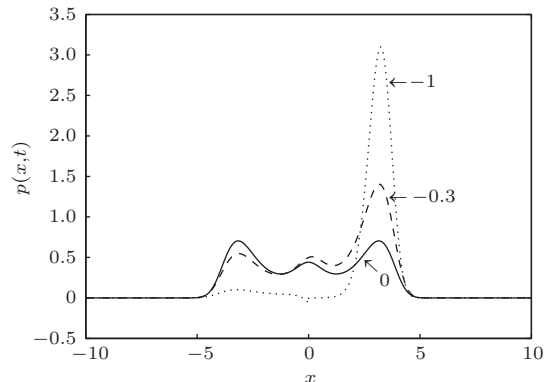


图 2 概率密度函数随非正噪声互关联强度 λ 变化的曲线

3.2 噪声强度对稳态概率密度的影响

图3、图4分别表示乘性、加性噪声强度随稳态概率密度的影响。

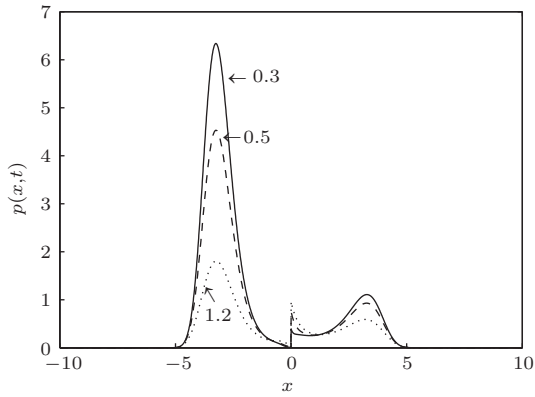


图3 概率密度函数随乘性噪声强度 p 变化的曲线

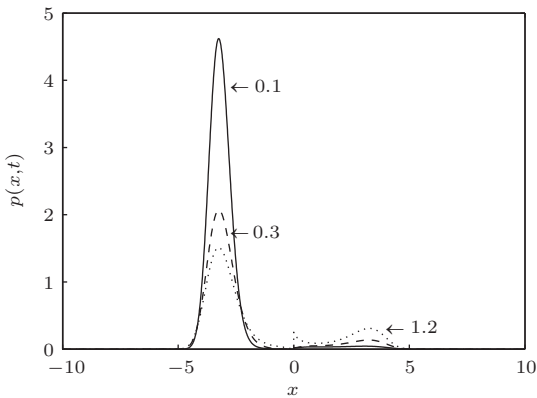


图4 概率密度函数随加性噪声强度 q 变化的曲线

在图3中,随着乘性噪声强度 p 的增加,波峰高度逐渐降低,波峰数目始终不变,即乘性噪声不会导致系统非平衡相变.图4中,随着加性噪声强度 q 的增加,左边峰逐渐降低,而右边峰逐渐升高,且波峰数目不同,结构发生变化,则加性噪声可诱导系统非平衡相变.

3.3 噪声关联时间对稳态概率密度的影响

图5—图7分别表示乘性噪声自关联时间 τ_1 、加性噪声自关联时间 τ_2 以及两噪声互相关时间 τ_3 对稳态概率密度的影响.图5中,随着乘性自关联时间 τ_1 的增大,峰的高度增加,数目不变,说明乘性自关联时间不会引起非平衡相变.

图6中随着加性自关联时间 τ_2 的增大,峰的高

度增加,波峰向左移动,波峰数目不变,说明加性自关联时间也不会引起非平衡相变,即乘性、加性色噪声自关联时间均不引起系统非平衡相变.图7中随着噪声互关联时间 τ_3 的增大,波峰高度降低,数目增多,可以恢复系统的对称结构,因此噪声互关联时间可以引起相变.

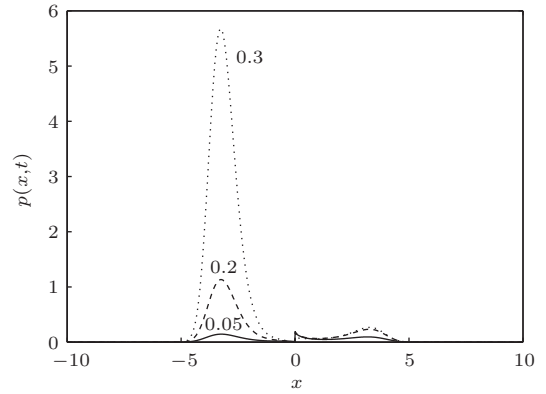


图5 概率密度函数随乘性噪声自关联时间 τ_1 变化的曲线

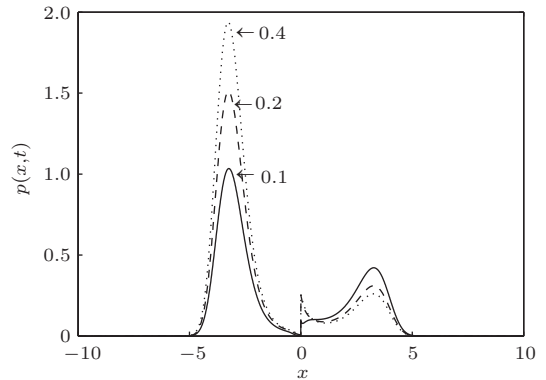


图6 概率密度函数随加性噪声自关联时间 τ_2 变化的曲线

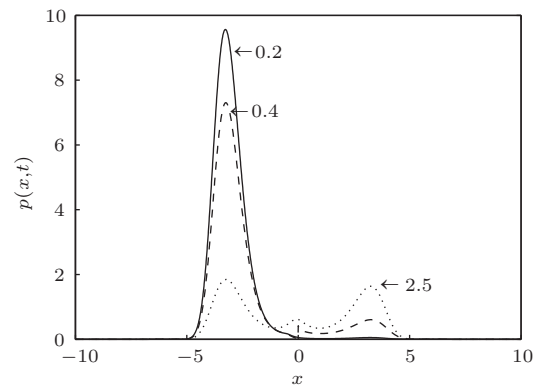


图7 概率密度函数随噪声互关联时间 τ_3 变化曲线

4 结 论

本文通过研究色关联乘性和加性色噪声对稳态概率密度的影响, 得到以下结论:

1. 乘性、加性噪声之间的互关联强度 $\lambda = 0$ 时, $p(x, t)$ 具有对称三峰结构, 当 $0 < |\lambda| < 1$ 时, 波峰高度和位置发生改变, 当 $|\lambda| = 1$ 时, 波峰数目发生改变, 只剩下一个波峰, 即噪声关联强度可以引起了三稳态系统非平衡相变;

2. 乘性噪声强度不会引起三稳态系统非平衡相变, 而加性噪声强度可以引起三稳态系统非平衡相变, 它们的影响不同;

3. 乘性噪声和加性噪声的自相关时间均不引起三稳态系统非平衡相变, 但它们的互相关系数引起三稳态系统非平衡相变.

在研究三稳态系统的稳态问题过程中, 有多种因素可以诱导三稳态系统非平衡相变, 而且我们发现了一些新的非线性现象, 这为以后将要研究的首次穿越时间、信噪比以及随机共振等问题打下了基础.

参考文献

- [1] Yang Y Q, Wang C J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 120507 (in Chinese) [杨亚强, 王参军 2012 物理学报 **61** 120507]
- [2] Wu D, Zhu S Q 2007 *Phys. Lett. A* **363** 202
- [3] Luo X, Wu D, Zhu S 2012 *Int. J. Mod. Phys. B* **26** 215006
- [4] Rong H W, Wang X D, Xu W, Meng G 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2557 (in Chinese) [戎海武, 王向东, 徐伟, 孟光 2003 物理学报 **52** 2557]
- [5] Shi P M, Ding X J, Han D Y 2014 *Measurement* 47540
- [6] Rong H W, Wang X D, Meng G Xu W 2006 *Appl. Math. Mech* **27** 1373
- [7] Jin Y F, Xu W, Ma S J, Li W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3480 (in Chinese) [靳艳飞, 徐伟, 马少娟, 李伟 2005 物理学报 **54** 3480]
- [8] Jin Y F, Xu W, Li W, Ma S J 2005 *Chinese Journal of Dynamics and Control* **3** 9
- [9] Hao Y, Wu Z Q 2013 *Acta Mech. Sin.* **45** 257
- [10] Li B, Jin Y F 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 150503 (in Chinese) [李贝, 靳艳飞 2013 物理学报 **62** 150503]
- [11] Zhou Y R 2011 *Chin. Phys. B* **20** 010501
- [12] Cao L, Liu L, Zhang L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1494 (in Chinese) [曹力, 刘莉, 张立 2010 物理学报 **59** 1494]
- [13] Jia Y, Yu S N, Li J R 2000 *Phys. Rev. E* **62** 1869
- [14] Zhou B C, Xu W 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2035 (in Chinese) [周丙常, 徐伟 2008 物理学报 **57** 2035]
- [15] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A 1981 *J. Phys. A* **14** L453
- [16] Du L C, Mei D C 2009 *Chin. Phys. B* **18** 946
- [17] Jing L J, Xu W, Yang X L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 25 (in Chinese) [宁丽娟, 徐伟, 杨晓丽 2007 物理学报 **56** 25]
- [18] Zhang J J, Jin Y F 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 12501 (in Chinese) [张静静, 靳艳飞 2011 物理学报 **60** 12501]
- [19] Garrett K A, Dobson A D M, Kroschel J 2013 *Agr. Forest Meteorol.* **170** 216
- [20] Liu Y, Xie Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2147 (in Chinese) [刘勇, 谢勇 2010 物理学报 **59** 2147]

Steady-state analysis of a tristable system driven by a correlated multiplicative and an additive colored noises*

Shi Pei-Ming^{1)†} Li Pei¹⁾ Han Dong-Ying²⁾

1) (*College of electrical engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China*)

2) (*College of Vehicles and Energy, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China*)

(Received 13 March 2014; revised manuscript received 18 April 2014)

Abstract

The steady-state problems of a tristable system are studied under the action of color correlated multiplicative and additive colored noise. Firstly, the expression of the steady-state probability density function is derived based on the uniform colored noise approximation, and then the change regulation of the steady-state probability density function is analyzed with the change of the strength and relevance of multiplicative noise and additive noise. Results show that the non-equilibrium phase transition of the system can be induced by the correlation strength and time of additive noise and multiplicative noise as well as the additive noise strength.

Keywords: multiplicative colored noise, plus colored noise, steady-state probability density function, tri-state system

PACS: 05.45.-a, 05.40.Ca

DOI: [10.7498/aps.63.170504](https://doi.org/10.7498/aps.63.170504)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 51005196, 51104129), the Natural Science Foundation of Hebei Province, China (Grant No. E2012203194), and the Education Department of Hebei Province outstanding youth fund, China (Grant No. YQ2013020).

† Corresponding author. E-mail: peiming.shi@163.com