

# 一类含三势阱 Mathieu-Duffing 振子的相对转动系统的分岔和混沌\*

刘彬<sup>1)</sup> 赵红旭<sup>1)</sup> 侯东晓<sup>2)†</sup>

1) (燕山大学电气工程学院, 秦皇岛 066004)

2) (东北大学秦皇岛分校控制工程学院, 秦皇岛 066004)

(2014年2月25日收到; 2014年4月11日收到修改稿)

建立了一类具有三势阱 Mathieu-Duffing 振子的两质量相对转动系统的非线性动力学方程. 应用多尺度法和奇异性理论分析该系统在非自治情况下的余维3分岔特性. 利用 Melnikov 方法获得系统在 Smale 马蹄意义下混沌的阈值. 最后通过数值仿真, 研究了系统的混沌行为和安全盆分岔, 得到安全盆被侵蚀的过程与系统通向混沌的过程之间密切联系.

**关键词:** 相对转动, Mathieu-Duffing 振子, 三势阱, 安全盆分岔

**PACS:** 45.20.dc, 05.45.-a

**DOI:** 10.7498/aps.63.174502

## 1 引言

随着近代物理学发展, 为了解释核子具有不相同的自旋速最大值, Carmeli 于 1985 年建立转动相对力学理论<sup>[1,2]</sup>; 1996 年 Luo 建立了转动相对论分析力学理论<sup>[3,4]</sup>, 转动相对论系统取得了蓬勃发展. 文献<sup>[5, 6]</sup> 研究了一类参数激励下非线性相对转动系统的混沌行为以及混沌控制. 文献<sup>[7]</sup> 研究了一类具有时滞非线性的相对转动系统 Hopf 分岔, 并探讨了时滞参数对系统的影响. 文献<sup>[8]</sup> 研究了 Duffing 振子在简谐和随机激励联合作用下, 系统安全盆的侵蚀现象. 文献<sup>[9]</sup> 研究了在外部激励作用下具有三势阱系统的吸引域. 文献<sup>[10—13]</sup> 研究一类具有非线性动力学系统的稳定性、分岔和混沌.

本文采用耗散系统的拉格朗日方程, 建立了一类具有多势阱情况的相对转动系统. 考虑三势阱情况下, 首先求解在系统主共振-基本参数共振时分岔响应方程, 并运用奇异性理论进行余维3分岔分析. 其次利用 Melnikov 方法讨论了系统发生混沌

的阈值. 最后通过数值仿真, 验证理论的正确性.

## 2 具有三势阱形式非线性动力学方程

考虑参激驱动下具有多势阱的 Mathieu-Duffing 振子模型如下:

$$f(t) = K_1(t)x + K_2(t)x^3 + K_3(t)x^5,$$

其中

$$K_1(t) = K(t)\gamma, \quad K_2(t) = K(t)\beta, \quad K_3(t) = K(t)\lambda, \\ K(t) = k_0^2 + k \cos \Omega_1 t. \quad (1)$$

系统的动能为

$$E = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} J_i \dot{\theta}_i^2 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2. \quad (2)$$

系统的势能为

$$U = \frac{1}{2} K_1(t)\theta^2 + \frac{1}{4} K_2(t)\theta^4 + \frac{1}{6} K_3(t)\theta^6. \quad (3)$$

\* 国家自然科学基金 (批准号: 51405068, 51105324)、河北省自然科学基金 (批准号: E2014501006, E2012203194)、河北省科技支撑计划项目 (批准号: 13211907D) 和河北省高等学校科学技术研究项目 (批准号: ZD2014202) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: [houdongxiao1982@163.com](mailto:houdongxiao1982@163.com)

系统的广义力为

$$Q_j = \sum_{i=1}^2 F_i^i \frac{\partial \theta_i}{\partial q_j}, \quad (j = 1, 2), \quad (4)$$

其中系统转动惯量用  $J_i (i = 1, 2)$  表示,  $K_1(t)$ ,  $K_2(t)$ ,  $K_3(t)$  分别为系统一、三、五次扭转刚度系数, 系统的转角和转速分别用  $\theta_i (i = 1, 2)$ ,  $\dot{\theta}_i (i = 1, 2)$  表示.  $F_i^i = T_i + F_i^c$ ,  $T_i$  为广义外力, 广义阻尼用  $F_i^c$  表示. 广义坐标用  $q_j (j = 1, 2)$  表示.

令

$$F_1^c = -C(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2), \quad F_2^c = -C(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1),$$

则

$$F_1^1 = T_1 - C(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2), \quad F_2^2 = T_2 - C(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1),$$

其中  $C$  为线性阻尼系数, 将 (1) 式、(2) 式、(3) 式、(4) 式代入如下的拉格朗日方程:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j, \quad (5)$$

得

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + K(t)\gamma(\theta_1 - \theta_2) + K(t)\beta(\theta_1 - \theta_2)^3 + C(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) = T_1, \quad (6)$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 + K(t)\gamma(\theta_2 - \theta_1) + K(t)\beta(\theta_2 - \theta_1)^3 + C(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) = T_2. \quad (7)$$

(6) 式乘以  $\frac{1}{J_1}$  减去 (7) 式乘以  $\frac{1}{J_2}$  得到

$$\begin{aligned} & (\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) + \frac{(J_1 + J_2)}{J_1 J_2} K(t)\gamma(\theta_1 - \theta_2) \\ & + \frac{(J_1 + J_2)}{J_1 J_2} K(t)\beta(\theta_1 - \theta_2)^3 \\ & + \frac{(J_1 + J_2)}{J_1 J_2} K(t)\lambda(\theta_1 - \theta_2)^5 \\ & + \frac{(J_1 + J_2)}{J_1 J_2} C(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \\ & = \frac{1}{J_1 J_2} (J_2 T_1 - J_1 T_2). \end{aligned} \quad (8)$$

令  $\ddot{x} = \ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2$ ,  $\dot{x} = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2$ ,  $x = \theta_1 - \theta_2$ ,  $F \cos \Omega_2 t = \frac{1}{J_1 J_2} (J_2 T_1 - J_1 T_2)$ ,  $\mu = \frac{(J_1 + J_2)}{J_1 J_2} C$ ,  $\alpha = \frac{(J_1 + J_2)}{J_1 J_2}$ , 则 (8) 式转换为

$$\begin{aligned} & \ddot{x} + \mu \dot{x} + \alpha(k_0^2 + k \cos \Omega_1 t)(\gamma x + \beta x^3 + \lambda x^5) \\ & = F \cos \Omega_2 t. \end{aligned} \quad (9)$$

(9) 式的势阱函数为

$$V(x) = \frac{\alpha k_0^2 \gamma}{2} x^2 + \frac{\alpha k_0^2 \beta}{4} x^4 + \frac{\alpha k_0^2 \lambda}{6} x^6.$$

对于不同的  $\gamma, \beta, \lambda$ , (9) 式有三种情形: 单势阱, 双势阱, 三势阱, 本文只考虑具有图 1 形式的势阱函数, 则 (9) 式就是一类具有三势阱 Mathieu-Duffing 振子的两质量相对转动系统的动力学方程.

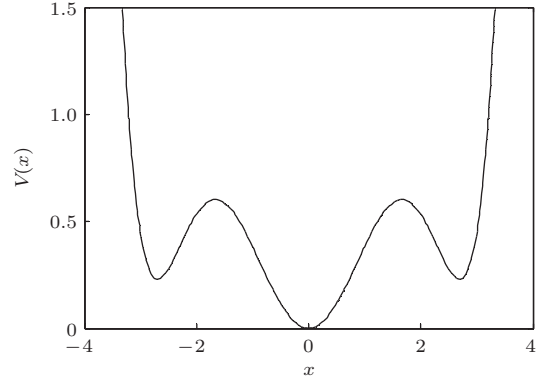


图 1 三势阱函数  $\alpha k_0^2 \gamma = 1, \alpha k_0^2 \beta = -0.5, \alpha k_0^2 \lambda = 0.05$

### 3 系统分岔特性分析

将 (9) 式中非线性项前面冠以小参数  $\varepsilon$ , 可得

$$\begin{aligned} & \ddot{x} + \varepsilon \mu \dot{x} + \alpha k_0^2 \gamma x + \varepsilon \alpha k_0^2 \beta x^3 + \varepsilon \alpha k_0^2 \lambda x^5 \\ & + \varepsilon \alpha k \cos \Omega_1 t (\gamma x + \varepsilon \beta x^3 + \varepsilon \lambda x^5) \\ & = \varepsilon F \cos \Omega_2 t. \end{aligned} \quad (10)$$

令

$$\omega_0^2 = \alpha k_0^2 \gamma,$$

则 (10) 式可写为

$$\begin{aligned} & \ddot{x} + \omega_0^2 x \\ & = \varepsilon F \cos \Omega_2 t - \varepsilon \mu \dot{x} - \varepsilon \alpha k_0^2 \beta x^3 - \varepsilon \alpha k_0^2 \lambda x^5 \\ & - \varepsilon \alpha k \gamma x \cos \Omega_1 t - \varepsilon^2 \alpha k \beta x^3 \cos \Omega_1 t \\ & - \varepsilon^2 \alpha k \lambda x^5 \cos \Omega_1 t. \end{aligned} \quad (11)$$

应用多尺度方法, 引入不同的时间尺度  $T_0 = t$ ,  $T_1 = \varepsilon t$ , 讨论一次近似解, 令

$$x(t, \varepsilon) = x_0(T_0, T_1) + \varepsilon x_1(T_0, T_1) + \dots \quad (12)$$

则有偏微分算子符号

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \quad (13)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \quad (14)$$

其中  $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$ ,  $n = (0, 1)$ .

设  $\omega_0 = \Omega_1 + \varepsilon\sigma$ ,  $\Omega_2 = \Omega_1$ , 将(12)式, (13)式和(14)式代入方程(11), 可得

$$D_0^2 x_0 + \Omega_1^2 x_0 = 0, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & D_0^2 x_1 + \Omega_1^2 x_1 \\ &= -2D_0 D_1 x_0 - \mu D_0 x_0 - \alpha k_0^2 \beta x_0^3 - \alpha k_0^2 \lambda x_0^5 \\ & \quad - 2\Omega_1 \sigma x_0 - \alpha k \gamma x_0 \cos \Omega_1 t + F \cos \Omega_2 t. \end{aligned} \quad (16)$$

令

$$x_0 = A(T_1) e^{i\Omega_1 T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i\Omega_1 T_0}, \quad (17)$$

其中,  $\bar{A}$  为  $A$  的共轭复数, 将(17)式代入(16)式, 得到

$$\begin{aligned} & D_0^2 x_1 + \Omega_1^2 x_1 \\ &= -i2\Omega_1 D_1 A e^{i\Omega_1 T_0} - i\mu \Omega_1 A e^{i\Omega_1 T_0} \\ & \quad - 3\alpha k_0^2 \beta A^2 \bar{A} e^{i\Omega_1 T_0} - 10\alpha k_0^2 \lambda A^3 \bar{A}^2 e^{i\Omega_1 T_0} \\ & \quad - 2\Omega_1 \sigma A e^{i\Omega_1 T_0} + \frac{F}{2} e^{i\Omega_1 T_0} + cc, \end{aligned}$$

其中,  $cc$  为共轭复数项, 为避免久期项则有

$$\begin{aligned} D_1 A = & -\frac{1}{2}\mu A + i\frac{3}{2\Omega_1}\alpha k_0^2 \beta A^2 \bar{A} + i\frac{5}{\Omega_1}\alpha k_0^2 \lambda A^3 \bar{A}^2 \\ & + i\sigma A - i\frac{F}{4\Omega_1}. \end{aligned} \quad (18)$$

令  $A = \frac{1}{2}a e^{i\theta}$ , 将其代入(18)式, 将实部和虚部分开, 得

$$\begin{aligned} & \dot{a} \cos \theta - a \dot{\theta} \sin \theta \\ &= -\frac{1}{2}\mu a \cos \theta - \frac{3}{8\Omega_1}\alpha k_0^2 \beta a^3 \sin \theta \\ & \quad - \frac{10}{8\Omega_1}\alpha k_0^2 \lambda a^5 \sin \theta - \sigma a \sin \theta, \\ & \dot{a} \sin \theta + a \dot{\theta} \cos \theta \\ &= -\frac{1}{2}\mu a \sin \theta + \frac{3}{8\Omega_1}\alpha k_0^2 \beta a^3 \cos \theta \\ & \quad + \frac{10}{8\Omega_1}\alpha k_0^2 \lambda a^5 \cos \theta - \sigma a \cos \theta - \frac{F}{2\Omega_1}. \end{aligned} \quad (19)$$

由(19)式可得一阶常微分方程组

$$\begin{aligned} \dot{a} = & -\frac{1}{2}\mu a - \frac{F}{2\Omega_1} \sin \theta, \\ a \dot{\theta} = & \frac{10}{8\Omega_1}\alpha k_0^2 \lambda a^5 + \frac{3}{8\Omega_1}\alpha k_0^2 \beta a^3 + \sigma a \\ & - \frac{F}{2\Omega_1} \cos \theta. \end{aligned} \quad (20)$$

稳态周期运动时  $\dot{a} = \dot{\theta} = 0$ , 将其代入(20)式解方程组, 求得分岔响应方程为

$$l_0 a^{10} + l_1 a^8 + l_2 a^6 + l_3 a^4 + l_4 a^2 + l_5 = 0. \quad (21)$$

令  $b = a^2$ , 代入(21)式则

$$l_0 b^5 + l_1 b^4 + l_2 b^3 + l_3 b^2 + l_4 b + l_5 = 0, \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} l_0 &= \left(\frac{10}{8\Omega_1}\alpha k_0^2 \lambda\right)^2, \\ l_1 &= \left(2\frac{10}{8\Omega_1}\alpha k_0^2 \lambda\right)\left(\frac{3}{8\Omega_1}\alpha k_0^2 \beta\right), \\ l_2 &= \left(\frac{3}{8\Omega_1}\alpha k_0^2 \beta\right)^2 + 2\frac{10}{8\Omega_1}\alpha k_0^2 \lambda \sigma, \\ l_3 &= 2\frac{3}{8\Omega_1}\alpha k_0^2 \beta \sigma, \\ l_4 &= \frac{1}{4}\mu^2 + \sigma^2, \\ l_5 &= -\frac{f^2}{4\omega^2}. \end{aligned}$$

对(22)式进行线性变换  $b = r - \frac{l_1}{5l_0}$ , 且令  $g_i = \frac{l_i}{l_0}$ , ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ), (22)式可以转换为余维三分岔方程

$$r^5 - \nu + \alpha_1 r + \beta_1 r^2 + \gamma_1 r^3 = 0, \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} \nu &= -\frac{4g_1^5}{3125} + \frac{g_1^3 g_2}{125} - \frac{g_1^2 g_3}{25} + \frac{g_1 g_4}{5} - g_5, \\ \alpha_1 &= -\frac{2g_1^2}{5} + g_2, \\ \beta_1 &= \frac{4g_1^3}{25} - \frac{3g_1 g_2}{5} + g_3, \\ \gamma_1 &= -\frac{3g_1^4}{125} + \frac{3g_1^2 g_2}{25} + \frac{2g_1 g_3}{5} + g_4. \end{aligned}$$

(23)式是GS范式为  $\varepsilon a^5 + \delta \mu$  的普适开折, 其中  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  为开折参数, 奇点为余维3的五次滞后点, 因此下面分3种情况讨论不同参数在投影平面上的分岔行为.

(i) 当  $\alpha_1 = 0$  时, 系统的平面分岔拓扑结构如下(图2和图3):

- 1) 分岔点集:  $B = \phi$  ( $\phi$  为空集);
- 2) 滞后点集:  $H = \left\{ \beta_1^2 + \frac{\gamma_1^3}{5} = 0 \right\}$ ;
- 3) 双极限点集:  $D = \phi$ ;
- 4) 转迁集:  $\Sigma = B \cup H \cup D$ .

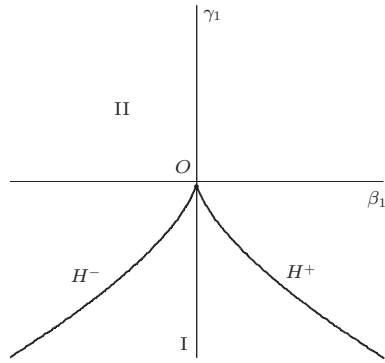


图2 转迁集

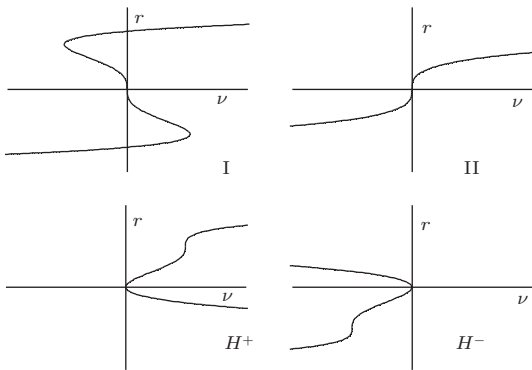


图3 分岔拓扑结构

(ii) 当  $\beta_1 = 0$  时, 系统的平面分岔拓扑结构如下(图4和图5):

- 1) 分岔点集:  $B = \phi$  ( $\phi$  为空集);
- 2) 滞后点集:  $H = \left\{ \alpha_1 = \frac{9}{20} \gamma_1^2 \right\}$ ;
- 3) 双极限点集:  $D = \phi$ ;
- 4) 转迁集:  $\Sigma = B \cup H \cup D$ .

(iii) 当  $\gamma_1 = 0$  时, 系统的平面分岔拓扑结构如下(图6和图7):

- 1) 分岔点集:  $B = \phi$  ( $\phi$  为空集);
- 2) 滞后点集:  $H = \left\{ \alpha_1 = \frac{3}{2} \beta_1^3 \sqrt{\frac{\beta_1}{10}} \right\}$ ;
- 3) 双极限点集:  $D = \phi$ ;
- 4) 转迁集:  $\Sigma = B \cup H \cup D$ .

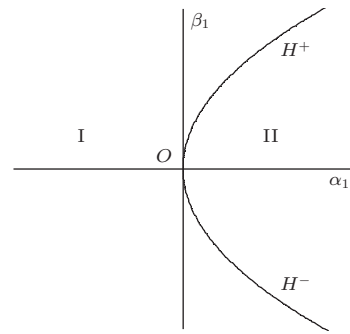


图6 转迁集

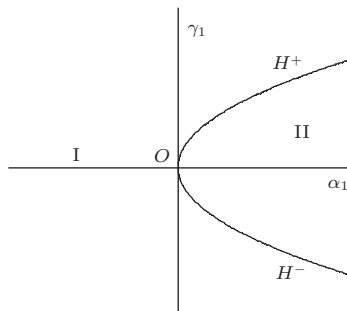


图4 转迁集

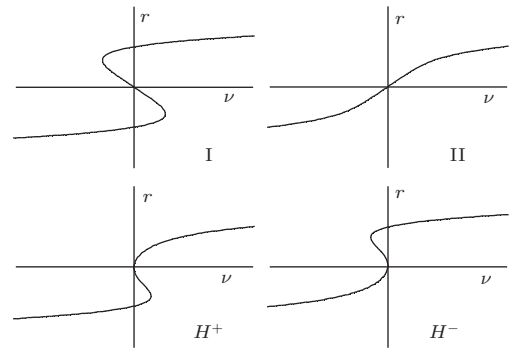


图7 分岔拓扑结构

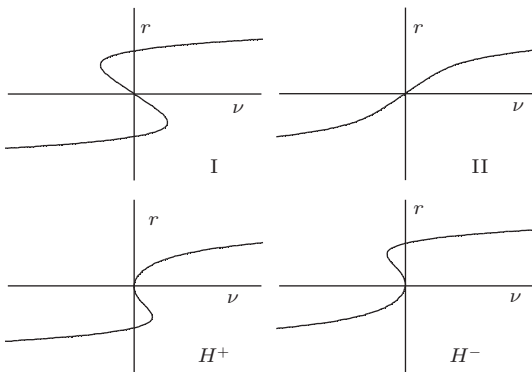


图5 分岔拓扑结构

## 4 系统混沌运动分析

### 4.1 系统的异宿轨道求解

令  $\dot{x} = y$ , 则(9)式改写为

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= y, \\
 \dot{y} &= -\alpha k_0^2 \gamma x - \alpha k_0^2 \beta x^3 \\
 &\quad - \alpha k_0^2 \lambda x^5 - \alpha k \cos \Omega_1 t (\gamma x + \beta x^3 + \lambda x^5) \\
 &\quad - \mu y + F \cos \Omega_2 t.
 \end{aligned} \tag{24}$$

非线性项前冠以小参数  $\zeta$ , 则 (24) 式转化为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\alpha k_0^2 \gamma x - \alpha k_0^2 \beta x^3 - \alpha k_0^2 \lambda x^5 \\ &\quad + \zeta(-\alpha k \cos \Omega_1 t (\gamma x + \beta x^3 + \lambda x^5) \\ &\quad - \mu y + F \cos \Omega_2 t). \end{aligned} \quad (25)$$

当  $\zeta = 0$  时, 系统为一 Hamilton 系统, 如下所示:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\alpha k_0^2 \gamma x - \alpha k_0^2 \beta x^3 - \alpha k_0^2 \lambda x^5, \end{aligned} \quad (26)$$

其 Hamilton 量为

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\alpha k_0^2 \gamma x^2 + \frac{1}{4}\alpha k_0^2 \beta x^4 \\ &\quad + \frac{1}{6}\alpha k_0^2 \lambda x^6. \end{aligned} \quad (27)$$

此时可以求得异宿轨道下的参数方程

$$\begin{aligned} x(t) &= \pm \frac{x_1 \sqrt{2} \sinh\left(\frac{T_1 t}{2}\right)}{\sqrt{-\zeta + \cosh(T_1 t)}}, \\ y(t) &= \pm \frac{T_1 x_1 \sqrt{2}(1 - \zeta) \cosh\left(\frac{T_1 t}{2}\right)}{2(-\zeta + \cosh(T_1 t))^{3/2}}, \end{aligned} \quad (28)$$

其中

$$\begin{aligned} T_1 &= x_1^2 \sqrt{2\alpha k_0^2 \lambda (\theta^2 - 1)}, \\ A^2 &= x_2^2 (\theta^2 + 3), \\ \zeta &= \frac{5 - 3\theta^2}{3\theta^2 - 1}, \\ \theta^2 &= \frac{\alpha k_0^2 \beta - \sqrt{(\alpha k_0^2 \beta)^2 - 4\alpha^2 k_0^4 \lambda \gamma}}{\alpha k_0^2 \beta + \sqrt{(\alpha k_0^2 \beta)^2 - 4\alpha^2 k_0^4 \lambda \gamma}}, \\ x_1 &= \sqrt{\frac{-(\alpha k_0^2 \beta + \sqrt{(\alpha k_0^2 \beta)^2 - 4\alpha^2 k_0^4 \lambda \gamma})}{2\alpha k_0^2 \lambda}}. \end{aligned}$$

## 4.2 混沌阈值

利用 (28) 式则可以得到该系统的 Melnikov 函数为

$$\begin{aligned} M_{\pm}(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) [-\alpha k \cos \Omega_1(t - t_0)(\gamma x(t) \\ &\quad + \beta x^3(t) + \lambda x^5(t)) - \mu y(t) \\ &\quad + F \cos \Omega_2(t - t_0)] dt \\ &= -\mu \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt - \alpha k \gamma \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t) \\ &\quad \times \cos \Omega_1(t - t_0) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \alpha k \beta \int_{-\infty}^{+\infty} x^3(t)y(t) \cos \Omega_1(t - t_0) dt \\ &+ F \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cos \Omega_2(t - t_0) dt \\ &= -\mu I_1 - [\alpha k \gamma I_2 + \alpha k \beta I_3 + \alpha k \lambda I_4] \\ &\quad \times \sin \Omega_1 t_0 + F I_5 \cos \Omega_2 t_0, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} I &= \frac{8\pi}{15} \left(1 + \frac{\Omega_1^2}{4T_1^2}\right) \left(1 + \frac{\Omega_1^2}{T_1^2}\right) - 2\pi \left(1 + \frac{\Omega_1^2}{T_1^2}\right) + 3, \\ I_1 &= \frac{x_1^2 T_1}{2(1 + \zeta)} \left[ (\zeta + 2) + \frac{\arcsin \zeta + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} (1 + 2\zeta) \right], \\ I_2 &= \frac{2\pi x_1^2 \Omega_1^2}{T_1^2 \sinh \frac{\pi \Omega_1}{T_1}}, \\ I_3 &= \frac{\pi x_1^2}{3} \left(5 - \frac{\Omega_1^2}{T_1^2}\right) \frac{x_1^2 \Omega_1^2}{T_1^2 \sinh \frac{\pi \Omega_1}{T_1}}, \\ I_4 &= \frac{2x_1^4 I}{3} \frac{x_1^2 \Omega_1^2}{T_1^2 \sinh \frac{\pi \Omega_1}{T_1}}, \\ I_5 &= \frac{2\pi \Omega_2 x_1}{T_1 \sinh \frac{\pi \Omega_2}{T_1}}. \end{aligned}$$

考虑主共振-基本参数共振,  $\Omega_1 = \Omega_2 = \sqrt{\alpha k_0^2 \gamma}$ , 则有

$$F \geq \left| \frac{\mu I_1}{I_5} + \frac{[\alpha k \gamma I_2 + \alpha k \beta I_3 + \alpha k \lambda I_4]}{I_5} \right|. \quad (29)$$

对于充分小的  $\zeta$ , 如果  $M_{\pm}(t_0)$  在  $t_0 \in (0, T)$  存在简单零点, 则系统可发生异宿轨道分岔, 意味着可产生混沌行为.

## 5 数值仿真

### 5.1 系统全局分岔

针对 (9) 式的方程, 初值取 (0.6, 0.9), 各参数取  $\alpha k_0^2 \gamma = 1, \alpha k_0^2 \beta = -0.5, \alpha k_0^2 \lambda = 0.05$ ,

$\Omega_1 = \Omega_2 = 1, k = \frac{k_0^2}{10}, \mu = 0.2$ , 研究随着外激幅值  $F$  变化时系统的混沌特性.

由图 8 和图 9 可知, 系统经过周期运动  $\rightarrow$  倍周期分岔  $\rightarrow$  跳跃分岔  $\rightarrow$  多次阵发性混沌直至达到混沌状态. 在图 8 中, 当  $F$  在 0.1—0.37 期间时, 系统表现出周期运动, 与此同时与图 9 中 Lyapunov 指数相呼应. 并且如图 10 所示, 当  $F = 0.1$  时 Poincare 截面有两个吸引点, 因此系统是一个典型的双周期运动.

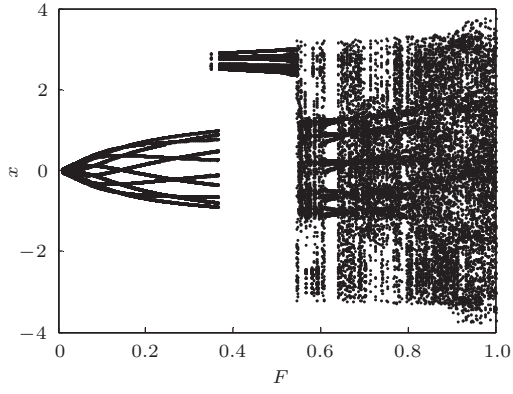


图8 分岔图

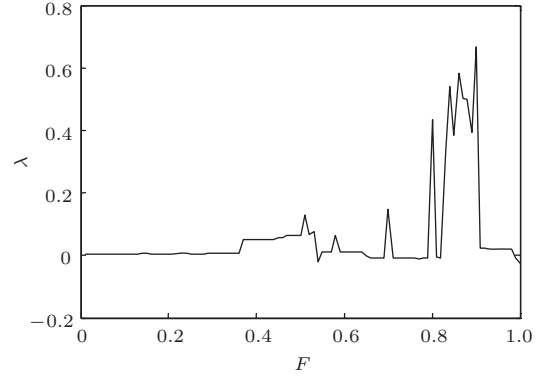


图9  $F$ 变化的最大Lyapunov指数

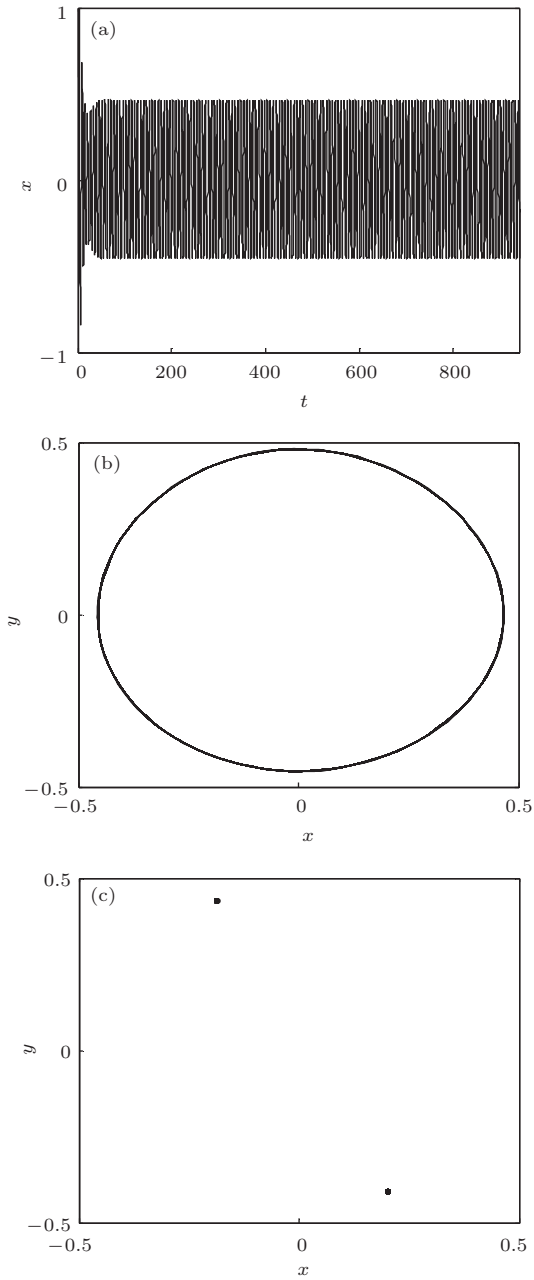


图10  $F = 0.1$ 时系统的时间历程图、相轨迹和Poincare截面 (a) 时间历程; (b) 相轨迹; (c) Poincare截面

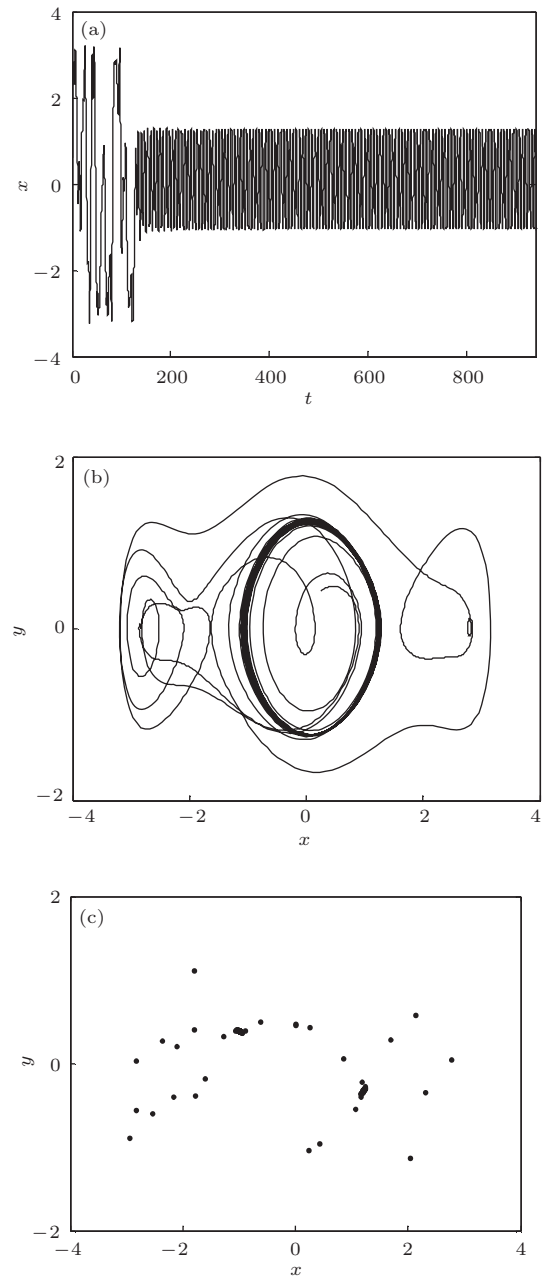


图11  $F = 0.6$ 时系统的时间历程图、相轨迹和Poincare截面 (a) 时间历程; (b) 相轨迹; (c) Poincare截面

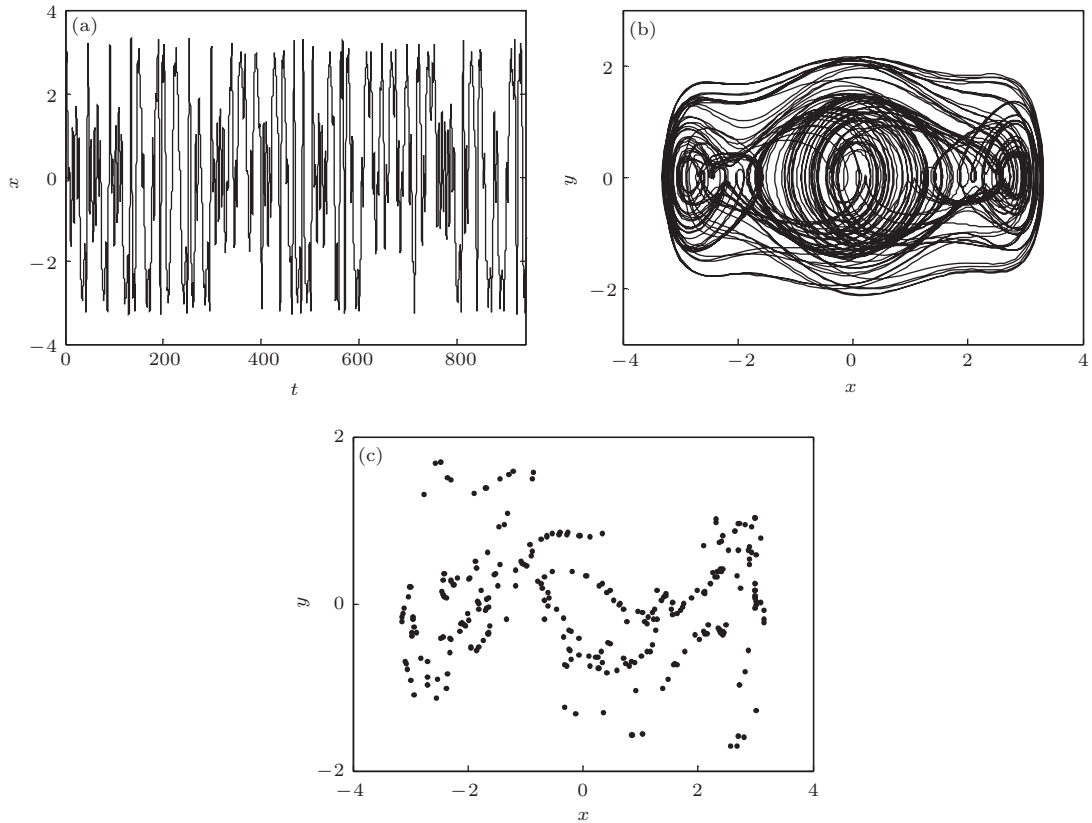


图 12  $F = 0.8$  时系统的时间历程图、相轨迹和 Poincaré 截面 (a) 时间历程; (b) 相轨迹; (c) Poincaré 截面

在图 8 中, 当  $F$  处于 0.37—0.7, 系统将出现多次阵发性混沌并且当  $F \geq 0.37$  时随着  $F$  的增大系统逐渐进入混沌状态. 由图 11 所示, 图 11 (a) 时间历程从杂乱无章到稳定周期运动, 图 11 (b) 系统相轨迹从不封闭曲线逐渐形成稳定极限环而此时, 图 9 中对应的 Lyapunov 指数为正, 以上特征都符合系统阵发性混沌的几何特征.

当  $F$  处于 0.7—1 时, 系统为完全的混沌运动状态. 当  $F = 0.8$  时, 此时可看出图 12 (a) 时间历程杂乱无章, 表现出无周期运动, (b) 相轨迹为不封闭曲线, (c) Poincaré 截面非有限点集非封闭曲线并且出现混沌吸引子, 而此时图 9 中对应的 Lyapunov 指数为正, 以上都符合混沌的几何特征.

### 5.2 系统安全盆分岔和混沌的关系

在系统响应的相空间中选取一个充分大的有界区域

$$D = \{(x, \dot{x}) : -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}.$$

把此区域分成  $160 \times 160$  的点, 每个点坐标作

为系统初值, 系统的运行时间取 1500 个时间单位. 图 13 中的黑色区域的点作为初值表示系统产生安全稳定解, 而白色部分的点作为初值表示系统产生不安全不稳定解.

如图 13 所示, 当  $f \leq f_1 = 0.3$  时, 系统的安全盆边界光滑未被侵蚀, 形状如图 13 (a), 对应于图 8 至图 10 所示, 当  $F = 0.1$  时系统处于周期运动状态, 系统是稳定有界的, 系统的运动是可以预测的; 当  $f > f_1$  时, 随着  $f$  的逐渐增大, 安全盆边界不光滑并且被慢慢侵蚀, 图 8 和图 9 反应随着  $F$  的增大, 系统经过倍周期分岔以及多次阵发性混沌进入完全混沌状态, 这个过程系统逐渐由稳定变为不稳定, 这个过程将导致安全盆边界的分形形状、部分侵蚀和完全侵蚀 (如图 13 (b)—(f)); 当  $f > f_2 = 1$  时, 安全盆被完全侵蚀, 此时表明系统的运动不可预测且相当不稳定, 系统完全进入混沌状态.

通过对系统全局分岔和安全盆分岔分析, 得出安全盆开始出现分形侵蚀时  $f_1 = 0.3$  和全局分岔出现混沌的阈值  $F \geq 0.37$  基本相同, 并且均与 Melnikov 求出的解析条件相接近.

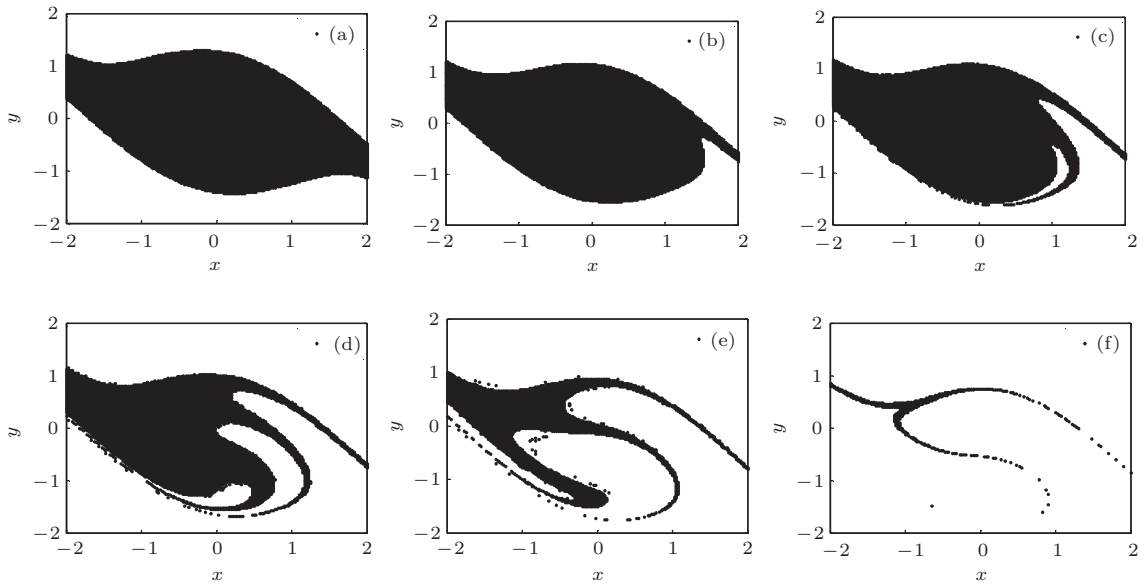


图 13 随着  $F$  变化的安全盆分岔 (a)  $F = 0.1$ , (b)  $F = 0.3$ , (c)  $F = 0.4$ , (d)  $F = 0.5$ , (e)  $F = 0.65$ , (f)  $F = 0.8$

## 6 结 论

建立了一类具有三势阱 Mathieu-Duffing 振子的两质量相对转动系统的非线性动力学方程. 联合多尺度法和奇异性理论分析该系统在非自治情况下的余维 3 分岔特性. 利用 Melnikov 方法讨论系统发生混沌的必要条件. 最后通过数值仿真表明, Melnikov 方法求得系统异宿轨道下解析阈值、系统安全盆开始出现分形侵蚀的阈值和全局分岔阈值均比较接近.

## 参考文献

- [1] Carmeli M 1985 *Found. Phys.* **15** 175
- [2] Carmeli M 1986 *Int. J. Theor. Phys.* **25** 89
- [3] Luo S K 1996 *J. Beijing Inst. Technol.* **16**(S1) 154 (in Chinese) [罗绍凯 1996 北京理工大学学报 **16**(S1) 154]
- [4] Luo S K 1998 *Appl. Math. Mech.* **19** 45
- [5] Shi P M, Han D Y, Liu B 2010 *Chin. Phys. B.* **19** 90306
- [6] Liu Sh, Liu H R, Wen Y, Liu B 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5223 (in Chinese) [刘爽, 刘浩然, 闻岩, 刘彬 2010 物理学报 **59** 5223]
- [7] Liu Sh, Liu B, Zhang Y K, Wen Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 38 (in Chinese) [刘爽, 刘彬, 张业宽, 闻岩 2010 物理学报 **59** 38]
- [8] Rong H W, Wang X D, Xu W, Fang T 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2005 (in Chinese) [戎海武, 王向东, 徐伟, 方同 2007 物理学报 **56** 2005]
- [9] Tchoukuegno R, Nana Nbandjo B R, Wofo P 2002 *Phy. A* **304** 362
- [10] Chen S Y, Tang J Y 2008 *J. Sound Vib.* **318** 1109
- [11] Zhang Q Ch, Wang W, Liu F H 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4123
- [12] Feng J J, Zhang Q Ch, Wang W 2011 *Chin. Phys. B* **20** 090202
- [13] Meng Z, Fu L Y, Song M H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 054501 (in Chinese) [孟宗, 付立元, 宋明厚 2013 物理学报 **62** 054501]



# Bifurcation and chaos of some relative rotation system with triple-well Mathieu-Duffing oscillator\*

Liu Bin<sup>1)</sup> Zhao Hong-Xu<sup>1)</sup> Hou Dong-Xiao<sup>2)†</sup>

1) (*College of Electrical Engineering, YanShan University, Qinhuangdao 066004, China*)

2) (*Department of Control Engineering Northeastern University at Qinhuangdao, Qinhuangdao 066004, China*)

( Received 25 February 2014; revised manuscript received 11 April 2014 )

## Abstract

The dynamic equation of a nonlinear relative rotation system with a triple-well Mathieu-Duffing oscillator is investigated. Firstly, a codimension three-bifurcation characteristic is deduced by combining with the multi-scale method and singularity theory under the condition of nonautonomy. Secondly, the threshold value of chaos about Smale horseshoe commutation is given from Melnikov method. Finally, the numerical simulation exhibits safe basins and chaos, and the erosion process of safe basins, which is closely related to the process, leading to chaos.

**Keywords:** relatively rotation, Mathieu-Duffing, triple-well, safe basins

**PACS:** 45.20.dc, 05.45.-a

**DOI:** 10.7498/aps.63.174502

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 51405068, 51105324), the Natural Science Foundation of Hebei Province, China (Grant Nos. E2014501006, E2012203194), the Hebei Province Science and Technology Support Program (Grant No. 13211907D), and the Colleges and Universities Research Fund of Hebei Province (Grant No. ZD2014202).

† Corresponding author. E-mail: [houdongxiao1982@163.com](mailto:houdongxiao1982@163.com)