

## 全球风场构建涡度、散度的新方法\*

关吉平† 黄思训 张立凤

(解放军理工大学气象海洋学院, 南京 211101)

(2013年12月12日收到; 2014年4月27日收到修改稿)

目前在数值预报中通常利用风场借助于差分方法来构建涡度和散度场, 这个问题涉及到观测资料求微分的问题, 从数学上来说, 此问题是不适定的. 在有限区域上构建时可以采用一维数值微分来实现, 但此方法在端点部分的资料必须是精确的, 本文提出了新的方法, 该方法借助于周期函数的一维数值微分, 并用该方法应用到全球风场构建涡度、散度中去, 同时与通常的差分方法进行了比较, 利用涡度、散度计算了流函数和势函数, 然后用流函数和势函数重构初始风场. 结果表明, 本文提出的方法算法稳定、可行且计算精度比差分方法高, 为应用到全球气象资料的诊断分析及预报中提出了新的思路.

**关键词:** 风场, 涡度, 散度, 数值微分

**PACS:** 92.60.Wc, 92.60.-e

**DOI:** 10.7498/aps.63.179201

## 1 引言

在描述大气的运动和演变中, 涡度、散度是两个非常重要的物理量, 涡度表征大气运动的旋转特征, 而散度表征大气运动的辐合(辐散)特征. 在天气分析和预报中, 经常使用涡度、散度或者其与其他物理量组合成的新物理量来诊断天气形势或气象要素<sup>[1-9]</sup>, 按照涡度和散度的计算公式, 其是利用风场对空间坐标进行微分运算得到的. 在风场没有观测误差的情况下, 利用差分方法代替微分运算的精度是可以保证的, 但当风场存在较小的观测误差时, 此时利用风场求涡度和散度的问题就成为一个在Hadamard意义下的典型的不适定问题<sup>[10,11]</sup>, 即较小的观测误差却有可能造成计算的涡度和散度出现较大的误差. 而实际中风场的观测误差是不可避免的, 这就使得用有限差分代替微分也就成为数值天气预报误差的一个来源. 为了求解该不适定性问题, 很多学者采用不同方法进行了研究<sup>[10,12-16]</sup>, 其中吉洪诺夫(Tikhonov)正则化方法

是具有代表性的方法之一<sup>[17-20]</sup>, 蔡其发和黄思训等<sup>[21]</sup>提出了利用该方法结合数值微分计算有限区域内涡度的新方法, 结果表明, 该算法的精度高于中央差分算法, 且用该算法计算的涡度对较小尺度天气系统的识别能力明显比中央差分算法的强. 由于该算法对有限区域内进行涡度和散度的计算时, 需要假定边界上的值是精确的, 而全球大气在水平方向是具有周期的, 所以应该采用周期边界的数值微分方法. 本文将一维一阶周期函数数值微分问题的正则化求解思路<sup>[22]</sup>应用到计算全球大气的涡度和散度中, 首先给出算法的原理及算法设计, 然后进行了理想试验, 最后利用实际风场进行了试验, 验证了算法设计的合理性和正确性.

## 2 数值试验

## 2.1 一维理想试验

首先用一组理想数据来检验一维一阶周期函数导数重构算法的可行性. 取一阶导数有解析解的函数  $y = \sin x$ , 在  $[0, 2\pi]$  区间上分别作 50,

\* 国家自然科学基金(批准号: 41205074, 41175025, 41375063, 41205073) 和解放军理工大学气象海洋学院基础理论研究基金资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: [guan\\_ji\\_ping@126.com](mailto:guan_ji_ping@126.com)

100, 200 等份, 可计算出各等分点上的精确值. 设观测值为在各点精确值上叠加随机误差, 误差为  $[-0.01, 0.01]$  之间均匀分布的随机数, 这反映了观测误差为  $\delta = 0.01$ . 然后利用观测值, 分别采用中央差分法和一维一阶周期函数数值微分问题的正则化求解方法(见附录) 计算  $\sin x$  的一阶导数, 其中正则化参数  $\alpha = \delta^2 = 0.0001$ . 图 1 和图 2 分别给出了不同等份情况下, 中央差分法、数值微分法计算的导数与  $y = \sin x$  导数的精确解即  $\cos x$  的误差分布.

对比分析图 1 和图 2 可以得到, 中央差分法计算的导数与精确导数之间的误差随着等份数的增加而增大, 这表明用差分方法计算导数时, 带有观测误差的观测数据使其导数的误差随观测点加密而变大, 而用数值微分方法计算的导数的误差随观测密度加大而变大, 且和差分方法相比其误差始终维持在较低的水平. 这充分说明用差分法计算带有观测误差的观测数据的一阶导数是不适定的, 该理想试验的结果也表明, 本文的周期函数的一阶导数构建算法是稳定可行的.

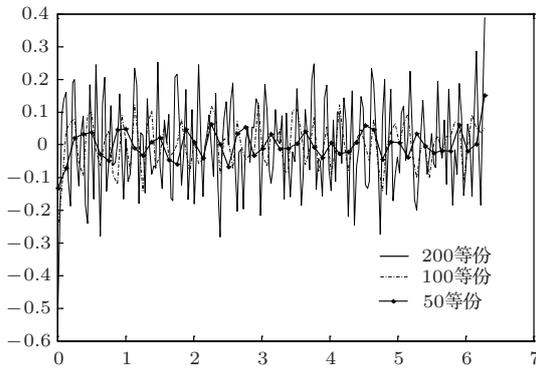


图 1 不同等分情况下, 中央差分法计算的导数与  $y = \sin x$  导数的精确解之间的误差分布 (图中横坐标表示区间  $[0, 2\pi]$ )

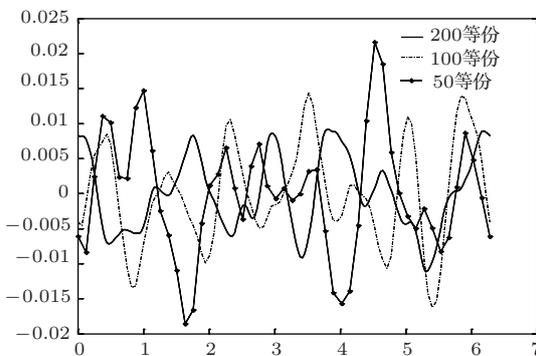


图 2 不同等分情况下, 数值微分法计算的导数与  $y = \sin x$  导数的精确解之间的误差分布 (图中横坐标表示区间  $[0, 2\pi]$ )

## 2.2 实际风场试验

2.1 节中给出了一维的理想试验结果, 而实际上数值预报中的物理量通常是等压面上的二维场. 对于球面上利用观测风场计算涡度和散度的问题, 在纬圈上, 从纬圈上的任意一个点出发绕大圆一圈回到初始点, 其具有  $2\pi$  的周期. 在经圈上, 将经度为  $\lambda$ 、纬度从  $-90^\circ$ — $90^\circ$  (从南极到北极) 的半个经圈与经度为  $\lambda + 180^\circ$ 、纬度从  $90^\circ$ — $-90^\circ$  (从北极到南极) 的另外半个经圈组成一个球面上的大圆, 在该大圆上物理量同样具有  $2\pi$  的周期. 因此, 可以分别在纬圈和经圈这个大圆上, 逐行逐列的利用一维一阶导数重构算法来计算. 下面给出一个利用全球实际风场资料计算涡度、散度的例子, 由于涡度、散度不能直接观测, 很难找到一个真实值用来检验数值微分和差分这两种方法的优越性, 为此, 本文进一步设计了如下的对比检验方案: 首先利用数值微分和差分方法计算的涡度和散度计算流函数和势函数, 然后利用流函数和势函数重构观测风场, 通过将重构风场与原始观测风场的对比来检验数值微分与差分方法的优劣. 利用观测风场计算涡度、散度以及重构初始风场的计算过程如下.

首先利用观测风场求涡度和散度, 球坐标系下的计算公式为

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{R \cos \varphi} \left[ \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cos \varphi + u \sin \varphi \right], \\ D &= \frac{1}{R \cos \varphi} \left[ \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \cos \varphi - v \sin \varphi \right], \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $\zeta, D$  分别为涡度和散度,  $R$  为地球半径,  $\lambda$  为经度,  $\lambda \in [0^\circ, 360^\circ]$ ,  $\varphi$  为纬度,  $\varphi \in [-90^\circ, 90^\circ]$ .

然后利用涡度、散度与流函数、势函数的关系, 计算流函数和速度势, 计算公式为

$$\nabla^2 \psi = \zeta, \quad \nabla^2 \chi = D, \quad (2)$$

其中,  $\psi, \chi$  分别为流函数和速度势, (2) 式为泊松方程, 已有的研究表明, 流函数和速度势的计算在周期边界的全球范围内可以得到惟一精确解<sup>[23]</sup>, 这里采用常用的松弛迭代算法求解.

最后利用流函数、速度势与风场的关系重构风场, 球坐标系下的计算公式为

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \\ v &= \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (3)$$

以上为由观测风场计算涡度、散度,再由涡度、散度重构风场的全过程.下面利用实际风场资料进行试验,使用的资料为国家气象中心提供的全球交互式大集合(TIGGE)资料中的欧洲中期天气预报中心(ECMWF)的集合预报产品,本文随机选取2007年7月8日00时(世界时)的500 hPa分析风场进行试验.首先,在该分析场上叠加均匀分布的随机误差 $[-\delta, \delta]$ 生成观测风场 $u_o, v_o$ ,通过改变 $\delta$ 可以改变误差的大小.对观测风场利用一维一阶数值微分算法求涡度、散度的方法为:首先利用数值微分算法沿每条经线和纬线计算一阶偏导数 $\frac{\partial v}{\partial \lambda}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial \varphi}$ ,然后利用(1)式计算得到全球的涡度 $\zeta_1$ 和散度 $D_1$ .类似地,采用中央差分法求涡度、散度的方法为:首先利用中央差分法求 $\frac{\partial v}{\partial \lambda}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial \varphi}$ ,然后利用(1)式求得全球的涡度 $\zeta'_1$ 和散度 $D'_1$ .接下来利用数值微分和中央差分方法计算的涡度和散度 $\zeta_1, D_1$ 和 $\zeta'_1, D'_1$ 以及(2)式,通过采用相同的松弛迭代算法求解泊松方程,得到与数值微分和中央差分方法相对应的流函数和势函数,分别为 $\psi_1, \chi_1$ 和 $\psi'_1, \chi'_1$ .最后分别利用数值微分和中央差分方法得到的流函数和势函数以及(3)式重构初始观测风场,利用数值微分方法和中央差分方法重构时,区别在于(3)式中的偏导数分别采用数值微分方法和中央差分方法计算.为了比较算法的精度,我们分别用数值微分方法和中央差分方法计算了涡度、散度,然后都采用松弛迭代算法计算流函数和速度势,最后又分别采用数值微分方法和中央差分方法重构了观测风场.

表1 不同观测误差下全球范围重构纬向风场与初始纬向风场的均方根误差及改进率

| 观测误差/(m/s)  | $\delta = 0.1$ | $\delta = 0.5$ | $\delta = 1.0$ | $\delta = 1.5$ |
|-------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 中央差分法/(m/s) | 32.42          | 32.42          | 32.43          | 32.43          |
| 数值微分法/(m/s) | 12.34          | 11.67          | 11.68          | 12.64          |
| 改进率/%       | 61.9           | 64.0           | 64.0           | 61.0           |

为了检验算法的稳定性,设计不同误差 $\delta$ 进行了敏感性试验, $\delta$ 分别取为0.1 m/s, 0.5 m/s, 1.0 m/s, 1.5 m/s.表1和表2分别给出了不同误差下全球范围重构纬(经)向风场与初始纬(经)向风场的均方根误差以及数值微分法相对于中央差分法

的改进率.

分析表1和表2可以得到,对于不同的观测误差,数值微分法重构初始风场的均方根误差都明显小于中央差分法的结果,这表明,数值微分算法的精度要比中央差分方法的高.

表2 不同观测误差下全球范围重构经向风场与初始经向风场的均方根误差及改进率

| 观测误差/(m/s)  | $\delta = 0.1$ | $\delta = 0.5$ | $\delta = 1.0$ | $\delta = 1.5$ |
|-------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 中央差分法/(m/s) | 32.39          | 32.39          | 32.39          | 32.40          |
| 数值微分法/(m/s) | 9.94           | 9.95           | 9.97           | 9.17           |
| 改进率/%       | 69.3           | 69.3           | 69.2           | 71.7           |

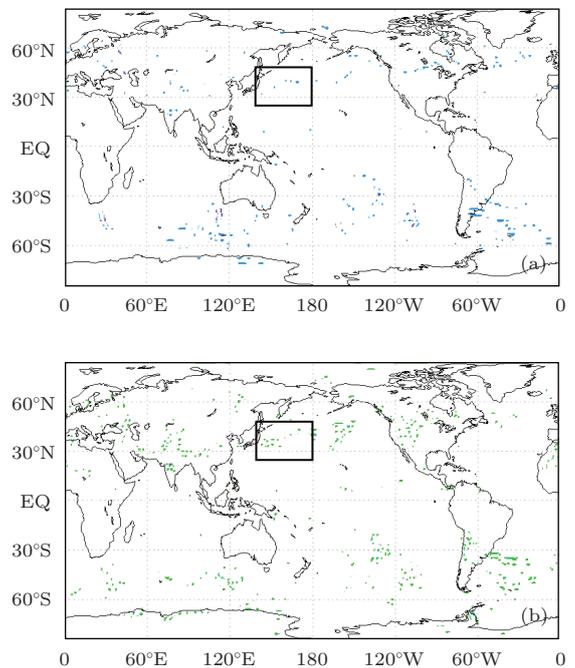


图3 (网刊彩色) $\delta = 1.0$ 时中央差分法与数值微分法得到的全球涡度、散度差值场 (a) 涡度差值场; (b) 散度差值场

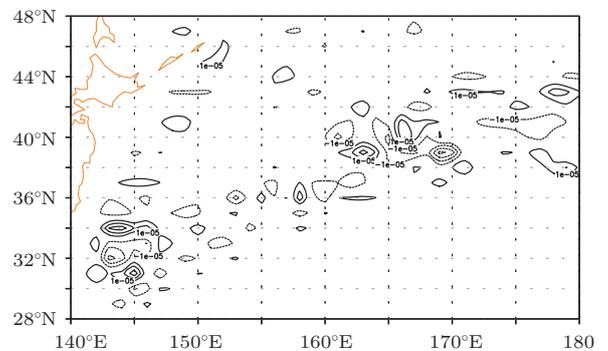


图4 140°E—180°E, 28°N—48°N的局部涡度差值场

图3给出了 $\delta = 1.0$ 时( $\delta$ 取其他值的情况与之类似)中央差分法与数值微分法得到的全球涡度、散度差值场,为了清晰起见,图中给出了绝对值大于 $1 \times 10^{-6}/s$ 等值线的彩色阴影图.分析图3可以

得到,无论是涡度差值场还是散度差值场,其在南北半球的低纬及中高纬地区都存在许多差值较大的区域,这表明,无论是涡度还是散度,用中央差分法和数值微分法得到的结果是存在明显差异的.为

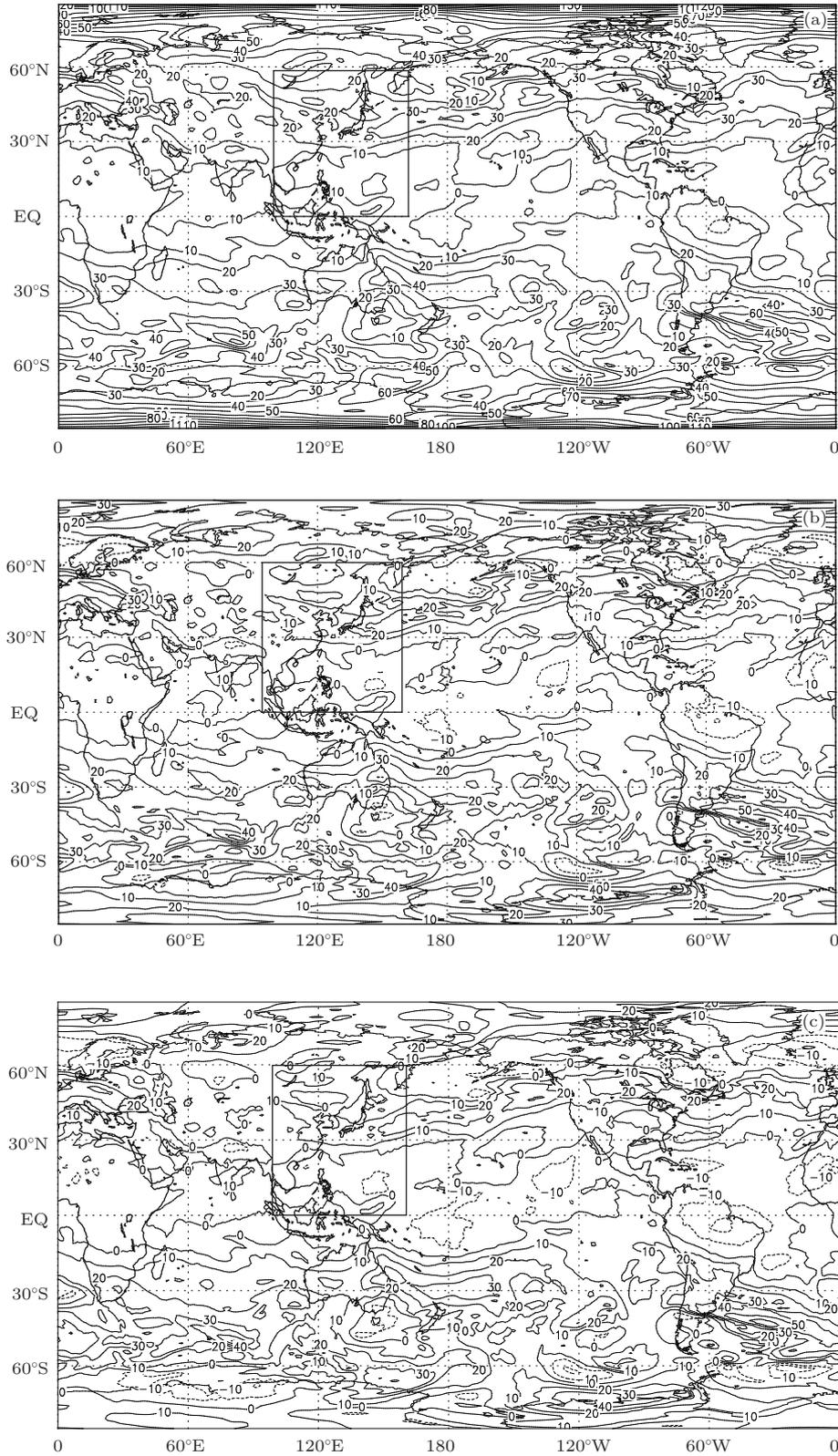


图5  $\delta = 1.0$ 时中央差分法和数值微分法重构纬向风场与初始纬向风场对比图 (a) 中央差分法重构的纬向风场; (b) 数值微分法重构的纬向风场; (c) 初始纬向风场

了更加清晰地看出两种方法计算结果的差异,图4给出了图3中矩形方框包含区域(140°E—180°E, 28°N—48°N)局部放大的涡度差值场,从图4也可以看出,在该区域数值微分法与中央差分法计算的涡度是存在较明显的差异的. 由于涡度、散度没有真实的观测值,无法比较哪种方法的结果更加接近真实值. 图5给出了 $\delta = 1.0$ 时中央差分法和数值微分法重构的全球纬向风场与初始纬向风场对比图(径向风场的情况类似,限于篇幅略去),仔细对比分析图5(a),(b),(c)这三张图可以得到,虽然两种方法重构的纬向风场与初始纬向风场在总体分布上是比较相近的,原因在于本文所用的TIGGE资料是利用数值模式客观分析而成的资料,其比较好地接近于真实观测资料,但同时两种方法重构的全球纬向风场与初始纬向风场在南北半球的低纬及中高纬地区都存在一些差异较大的区域,而数值微分重构的纬向风场比中央差分的结果更

加接近初始纬向风场,这从表1的均方根误差对比中也可以得到,全球区域数值微分相对于中央差分的改进率达到了64.0%. 同样为了更加清晰地看出两种方法重构风场的差异性,图6给出了图5中矩形方框包含区域(100°E—160°E, 0°N—60°N)局部放大的对比图,仔细对比分析图6(a),(b),(c)这三张图可以发现它们在一些细节上存在明显的差异,如在(147°E, 11°N)附近,初始观测风场存在一个较大范围的负值区域,数值微分法重构的风场同样也存在一个较大范围的负值区域,且-5 m/s(东风)等值线的走向与初始观测风场非常接近,但中央差分法重构的风场却仅有一个范围很小的负值区域. 此外,对比分析(117°E, 47°N)和(155°E, 55°N)附近的区域也能够明显地看出,数值微分法重构的风场比中央差分法重构的风场更加接近初始风场.

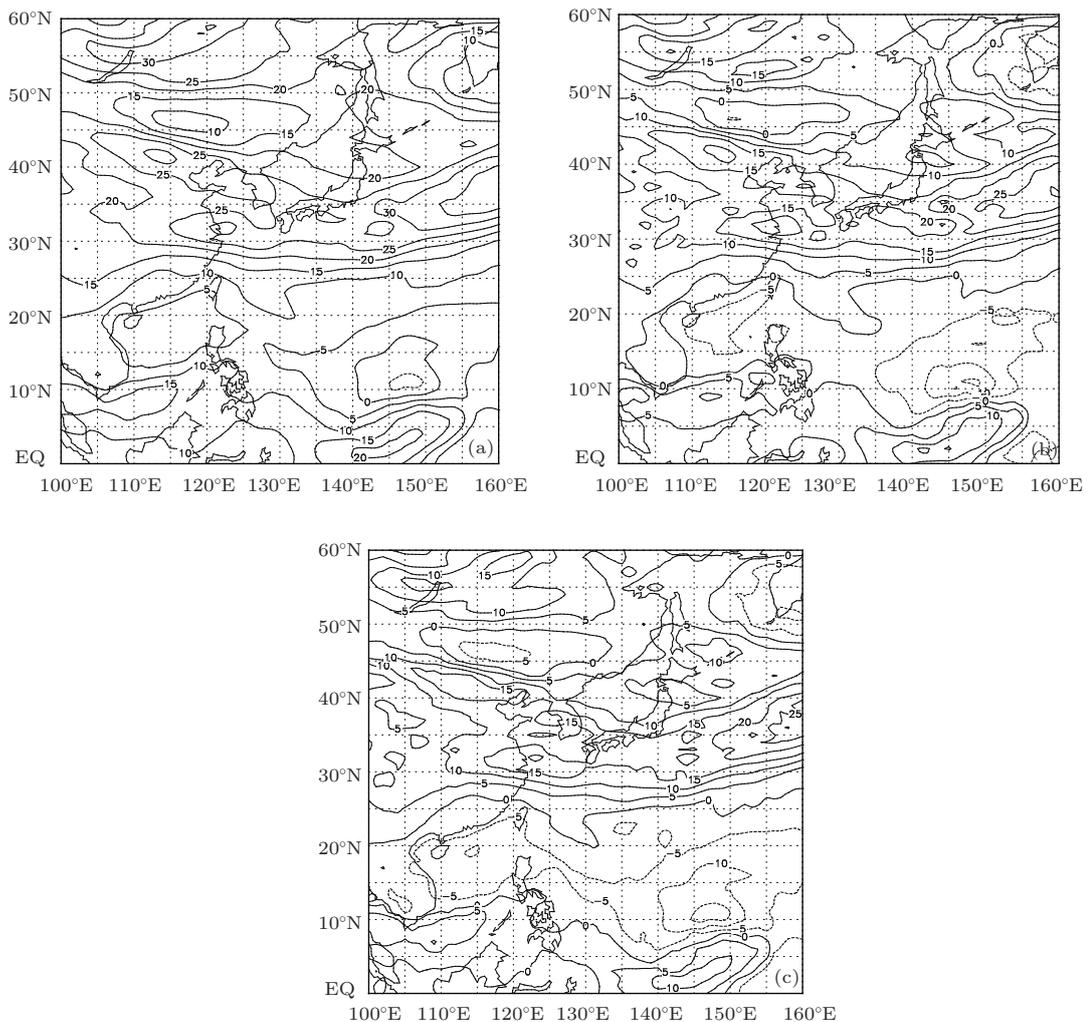


图6 亚洲区域中央差分法和数值微分法重构纬向风场与初始纬向风场对比图 (a) 差分法重构的纬向风场; (b) 数值微分法重构的纬向风场; (c) 初始纬向风场

从以上的定量对比以及定性分析可以得到, 数值微分方法重构的风场比中央差分法更加接近初始风场, 这表明数值微分方法比中央差分方法优越.

### 3 结 论

本文利用一维一阶周期函数数值微分的原理设计了算法, 并进行了数值试验, 理想试验表明, 该算法是稳定可行的且精度高于差分法, 利用实际资料计算涡度、散度然后进行初始风场的重构试验表明, 数值微分方法优于中央差分方法. 本文的工作是初步的, 将该算法应用到实际天气过程或气候事件的全球气象资料诊断分析中是下一步将要开展的工作.

#### 附录: 一维一阶周期函数数值微分问题的正则化求解

正则化方法是吉洪诺夫提出的求解不适定问题的一般性方法, 在求解一维一阶周期函数数值微分问题时具有明显的优势. 下面分别将用该方法求解一维一阶周期函数数值微分问题的原理及算法设计作一下介绍.

#### 1 问题的数学表述及已有的主要结果

设  $y = f(x)$  是定义在  $[0, 1]$  上以 1 为周期的连续可微函数, 将区间  $[0, 1]$  等距划分成  $n$  等分, 记  $h = x_{i+1} - x_i = 1/n, i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . 我们考虑以下的周期函数的数值微分问题:

给定函数  $y$  在点  $x_i$  处的观测值  $\tilde{y}_i$  满足  $\|\tilde{y}_i - f(x_i)\| \leq \delta, i = 0, 1, 2, \dots, n$ , 且  $\tilde{y}_0 = \tilde{y}_n$ . 利用观测数据  $\tilde{y}_i$ , 求  $f(x)$  的微分.

此问题是不适定的, 利用 Tikhonov 正则化来求周期函数的微分, 既可以消除不适定性, 又可以消除求导中高频振荡. 理论证明得到如下结论<sup>[13]</sup>:

**定理 1** 对  $\forall \alpha$ , 泛函

$$J[f] = \min_{\substack{f \in H^2(0,1) \\ f(0)=f(1)}} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n |\tilde{y}_j - f(x_j)|^2 + \alpha \int_0^1 |f''(x)|^2 dx \right\}. \quad (A1)$$

达极小时, 存在惟一的解  $f_*(x)$ , 它由一个分段三次样条函数组成, 其中  $H^2(0, 1) = \{f|f, f' \text{ 连续}, f'' \text{ 分片连续}\}$ .

**定理 2** 对于定理 1 中的  $f_*(x)$  有如下的误差估计:

$$\|f'_* - y'\|_{L^2(0,1)} = \left( \int_0^1 |f'_*(x) - y'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq 2\delta^{\frac{1}{2}} (\sqrt{2} \|y''\|_{L^2(0,1)} + h \left[ 4 \|y''\|_{L^2(0,1)} + \frac{1}{\pi} \|y''\|_{L^2(0,1)} \right]).$$

#### 2 一维一阶周期函数数值微分算法构建

根据定理 1 和定理 2 设计算法来重构正则化解  $f_*(x)$ . 设在  $[x_j, x_{j+1}]$  上的三次样条函数  $f_*(x)$  的表达式为

$$f_*(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (A2)$$

对于此问题共有  $4n$  个待定系数, 分别为  $a_j, b_j, c_j, d_j, j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ , 这些系数可以通过求解下列方程组 (A3)–(A6) 求得, 可以证明解是惟一的<sup>[11]</sup>.

在分点直到二阶导数连续, 共  $3(n-1)$  个方程, 为

$$f_*^{(i)}(x_j^+) = f_*^{(i)}(x_j^-), \quad (A3)$$

其中  $i = 0, 1, 2$ , 表示 0 阶、一阶和二阶导数,  $j = 1, 2, \dots, n-1, x_j$  的上标符号 “+” 和 “-” 分别表示右极限和左极限 (下同).

在分点处三阶导数间断, 共  $n-1$  个方程, 为

$$f_*'''(x_j^+) - f_*'''(x_j^-) = \frac{1}{\alpha n} (\tilde{y}_j - f(x_j)), \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \quad (A4)$$

在边界上具有周期且连续的条件 3 个, 为

$$f_*^{(i)}(0) = f_*^{(i)}(1), \quad i = 0, 1, 2. \quad (A5)$$

边界点三阶导数间断条件 1 个, 为

$$f_*'''(0^+) - f_*'''(1^-) = \frac{1}{\alpha n} (\tilde{y}_0 - f_*(x_0)). \quad (A6)$$

**第一步:** 进行边界点的算法构造. 因为  $f_*(x)$  以 1 为周期, 因此其在  $[x_0, x_1]$  与  $[x_n, x_{n+1}]$  内表达形式是一致的. 故令  $a_0 = a_n, b_0 = b_n, c_0 = c_n, d_0 = d_n$ .

由  $f_*''(0) = f_*''(1)$  可推导出

$$d_{n-1} = (c_0 - c_{n-1})/(3h) = (c_n - c_{n-1})/(3h). \quad (A7)$$

由  $f_*'(0) = f_*'(1)$  可得

$$b_n = b_{n-1} + 2c_{n-1}h + 3d_{n-1}h^2. \quad (A8)$$

由  $f_*(0) = f_*(1)$  可得

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1}h + c_{n-1}h^2 + d_{n-1}h^3, \quad (A9)$$

由  $f_*'''(0) - f_*'''(1) = (\tilde{y}_0 - a_0)/(an)$  可得

$$a_n = \tilde{y}_n - 6an(d_n - d_{n-1}). \quad (A10)$$

**第二步:** 对于内部点的构造, 其推导过程与边界上类似, 限于篇幅, 这里略去推导过程.

由  $f_*''(x_j^+) = f_*''(x_j^-), j = 1, \dots, n-1$  并与 (A7) 式相合并可得

$$d_{j-1} = (c_j - c_{j-1})/(3h),$$

$$j = 1, \dots, n-1, n. \quad (\text{A11})$$

由  $f'_*(x_j^+) = f'_*(x_j^-)$ ,  $j = 1, \dots, n-1$  并与 (A8) 式相合并可得

$$\begin{aligned} b_j &= b_{j-1} + 2c_{j-1}h + 3d_{j-1}h^2, \\ j &= 1, \dots, n-1, n. \end{aligned} \quad (\text{A12})$$

由  $f''_*(x_j^+) = f''_*(x_j^-)$ ,  $j = 1, \dots, n-1$  并与 (A9) 式相合并可得

$$\begin{aligned} a_j &= a_{j-1} + b_{j-1}h + c_{j-1}h^2 + d_{j-1}h^3, \\ j &= 1, \dots, n-1, n. \end{aligned} \quad (\text{A13})$$

由  $f'''_*(x_j^+) - f'''_*(x_j^-) = \frac{1}{\alpha n}(\tilde{y}_j - f_*(x_j))$ ,  $j = 1, \dots, n-1$  并与 (A10) 式相合并得

$$\begin{aligned} a_j &= \tilde{y}_j - 6\alpha n(d_j - d_{j-1}), \\ j &= 1, \dots, n-1, n. \end{aligned} \quad (\text{A14})$$

第三步: 由 (A14)、(A11) 导出  $a, c$  的第一关系式为

$$\begin{aligned} a_j &= \tilde{y}_j - 6\alpha n(d_j - d_{j-1}) \\ &= \tilde{y}_j - 6\alpha n \frac{c_{j-1} - 2c_j + c_{j+1}}{3h}, \\ j &= 1, \dots, n-1, n. \end{aligned} \quad (\text{A15})$$

第四步: 由 (A11), (A12) 导出  $a, c$  的第二关系式为

$$\begin{aligned} \frac{a_{j-1} - 2a_j + a_{j+1}}{h} &= \frac{h}{3}[c_{j-1} + 4c_j + c_{j+1}], \\ j &= 1, \dots, n-1, n. \end{aligned} \quad (\text{A16})$$

若记向量:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, \tilde{\mathbf{y}} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n)^T, \mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T, \text{ 则 } \mathbf{a}, \mathbf{c} \text{ 的两个关系式可以分别改写为}$$

$$\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{y}} - 2\alpha n \mathbf{Q} \mathbf{C}, \quad (\text{A17})$$

$$\mathbf{T} \mathbf{C} = \mathbf{Q} \mathbf{a}. \quad (\text{A18})$$

由 (A17), (A18) 可以继续推导得到向量  $\mathbf{c}$  的表达式为

$$\mathbf{c} = (\mathbf{T} + 2\alpha n \mathbf{Q}^2)^{-1} \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{y}}, \quad (\text{A19})$$

其中  $\mathbf{T}, \mathbf{Q}$  为下列  $n \times n$  阶矩阵

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{4h}{3} & \frac{h}{3} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{h}{3} \\ \frac{h}{3} & \frac{4h}{3} & \frac{h}{3} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \frac{h}{3} & \frac{4h}{3} & \frac{h}{3} \\ \frac{h}{3} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{h}{3} & \frac{4h}{3} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{h} & \frac{1}{h} & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & -\frac{2}{h} & \frac{1}{h} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \frac{1}{h} & -\frac{2}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{h} & -\frac{2}{h} \end{bmatrix}.$$

经过上述四步后, 可以得到一维一阶周期函数数值微分的算法流程, 见图 A1.

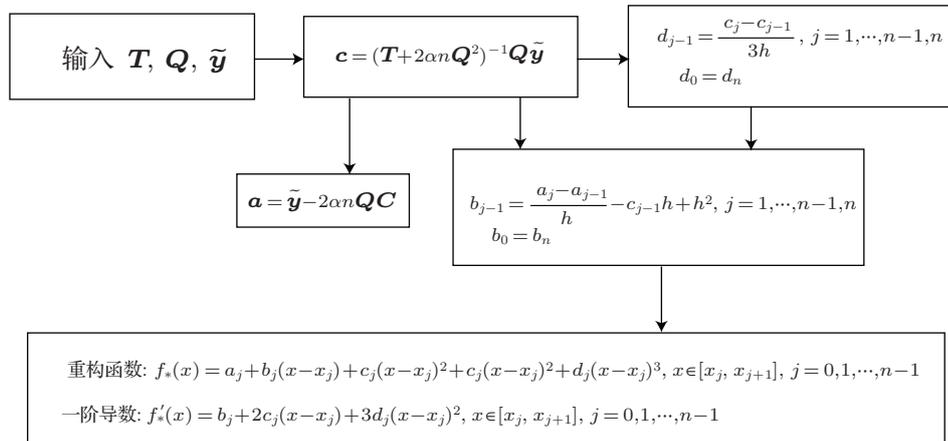


图 A1 一维一阶周期函数数值微分的算法流程

参考文献

[1] Gao S T, Zhou Y S, Lei T, Sun J H 2005 *Sci. China Earth Sci.* **35** 107 (in Chinese) [高守亭, 周玉淑, 雷霆, 孙建华 2005 中国科学: 地球科学 **35** 107]  
 [2] Jia M, Lou C, Lou S Y 2006 *Chin. Phys. Lett.* **23** 2878  
 [3] Zhou Y S, Cao J, Gao S T 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6654 (in Chinese) [周玉淑, 曹洁, 高守亭 2008 物理学报

57 6654]  
 [4] Gao S T, Zhou F F 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 3830  
 [5] Ran L K, Chu Y L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 8094 (in Chinese) [冉令坤, 楚艳丽 2009 物理学报 **58** 8094]  
 [6] Zhou Y S, Cao J 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2898 (in Chinese) [周玉淑, 曹洁 2010 物理学报 **59** 2898]  
 [7] Qin Xu, Cao Jie, Gao S T 2011 *Adv. Atmos. Sci.* **28**

- 1433
- [8] Cao Jie, Qin Xu 2011 *Adv. Atmos. Sci.* **28** 1445
- [9] Luo Z X, Sun Z A, Ping F 2011 *Chin. Phys. B* **20** 049201
- [10] Groetsch C W 1991 *Amer. Math. Monthly* **98** 847
- [11] Hanke M, Scherzer O 2001 *Amer. Math. Monthly* **108** 512
- [12] Groetsch C W 1992 *J. Optimiz. Theory App.* **74** 373
- [13] Murio D A 1987 *Comput. Math. Appl.* **13** 381
- [14] Vasin V V 1973 *USSR Comp. Math. Math. Phys.* **13** 161
- [15] Locker J, Prenter P M 1980 *J. Mathanal. Appl.* **74** 504
- [16] Wang Y B, Jia X Z, Cheng J 2002 *Inverse Probl.* **18** 1461
- [17] Tikhonov A N, Arsenin V Y 1977 *Solutions of ill-posed problems*, Winston and Sons, Washington, USA
- [18] Zhao X F, Huang S X 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 119203 (in Chinese) [赵小峰, 黄思训 2011 物理学报 **60** 119203]
- [19] X Zhao, S Huang 2012 *J. Atmos. Sci.* **69** 2808
- [20] He R, Huang S X, Zhou C T, Jiang Z H 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 049201 (in Chinese) [何然, 黄思训, 周晨腾, 姜祝辉 2012 物理学报 **61** 049201]
- [21] Cai Q F, Huang S X, Gao S T, Zhong K, Li Z Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3912 (in Chinese) [蔡其发, 黄思训, 高守亭, 钟科, 李自强 2008 物理学报 **57** 3912]
- [22] Yang G F, Ye Y Z, Wang S Z 2004 *Journal of Fudan University (Natural Science)* **43** 315 (in Chinese) [杨古帆, 叶予璋, 王盛章 2004 复旦学报 (自然科学版) **43** 315]
- [23] Bourke W 1972 *Mon. Wea. Rev.* **100** 683

## A new method for calculating vorticity and divergence using global wind field\*

Guan Ji-Ping<sup>†</sup> Huang Si-Xun Zhang Li-Feng

(College of Meteorology and Oceanography, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101, China)

( Received 12 December 2013; revised manuscript received 27 April 2014 )

### Abstract

Vorticity and divergence can be calculated using wind field in numerical forecast. The issue involves the problem of calculating differentiation using observation data, and it is ill-posed in mathematics. In a limited domain, the one-dimensional numerical differentiation can be used to calculate vorticity and divergence, but the method requires that the data along the boundary be accurate. This paper suggests a new method of calculating vorticity and divergence using the periodical function's one-dimensional numerical differentiation algorithm, and comparison is made with usually used difference method. The stream function and velocity potential are calculated using vorticity and divergence, and the initial wind field is reconstructed using the stream function and velocity potential. Results show that the algorithm proposed in this paper is stable, feasible, and its accuracy is superior to the difference method. It provides a new idea that the method may be used in global meteorology data diagnosis analysis and forecast.

**Keywords:** wind field, vorticity, divergence, numerical differentiation

**PACS:** 92.60.Wc, 92.60.-e

**DOI:** 10.7498/aps.63.179201

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 41205074, 41175025, 41375063, 41205073), and the Basic Theory Research Program of College of Meteorology and Oceanography, PLA University of Science and Technology, China.

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [guan\\_ji\\_ping@126.com](mailto:guan_ji_ping@126.com)