

## 正压大气环流中的曲面周期波和孤波\*

毛杰键<sup>1)</sup> 吴波<sup>1)</sup> 付敏<sup>1)</sup> 黄瑛<sup>1)</sup> 杨建荣<sup>1)†</sup> 任博<sup>2)</sup> 刘萍<sup>3)</sup>

1) (上饶师范学院物理与电子系, 上饶 334001)

2) (绍兴文理学院非线性科学研究所, 绍兴 312000)

3) (电子科技大学中山学院电子与信息工程学院, 中山 528402)

(2014年3月27日收到; 2014年5月18日收到修改稿)

大尺度正压大气环流的波动特征对理解气候变化具有重要的意义, 而非线性浅水波方程组是描述大尺度正压大气环流的原始控制方程. 本文对线性方程的复变函数解, 通过二次适当的移植, 求得浅水波方程组的发展方程的扰动位势的实变函数解, 该实变函数解析解由基流项和波动项两部分组成. 其中基流由波数、波速、 $\beta$ 效应、变形半径和时间的任意函数共同决定; 波动项与 $\beta$ 效应有关. 分析表明, 在大尺度正压大气环流中扰动位势存在曲面的周期波和孤波的现象, 周期波与孤波相互调制而呈现不稳定性; 当多个周期孤波同时出现时, 则彼此独立传播; 扰动位势波动项中的时间任意函数对曲面周期孤波的波幅有调制作用, 可控制波的产生、发展和消失. 所得结果对研究大气波动现象和气候变化具有一定的理论参考价值.

**关键词:** 大尺度正压大气, 非线性浅水波方程, 曲面波, 周期孤波

**PACS:** 02.90.+p, 92.60.Bh, 47.35.Lf, 92.70.Cp

**DOI:** 10.7498/aps.63.180204

## 1 引言

浅水波方程是研究大气和海洋中波和扰动及其相互作用的重要动力模型<sup>[1-6]</sup>, 它在气候动力学中也具有广泛的应用, 许多大尺度气候现象的产生和发展, 可从浅水波方程的解中得到解释. 最早是Phillips<sup>[3]</sup>用浅水波方程的数值近似解, 模拟Rossby-Haurwitz波的传播, 解释气候变化的现象; 文献[4, 5]也用浅水波方程的数值近似解, 模拟对流层大气的运动行为, 文献[6]解释了Rossby-Haurwitz波的不稳定性.

对于大尺度无黏性不可压缩正压大气环流, 可用 $\beta$ -平面近似的浅水波方程描述<sup>[1,2]</sup>:

$$U_t + UU_x + VU_y = -\Phi'_x + fV, \quad (1)$$

$$V_t + UV_x + VV_y = -\Phi'_y - fU, \quad (2)$$

$$\Phi'_t + U\Phi'_x + V\Phi'_y + (\bar{\Phi} + \Phi')(U_x + V_y) = 0. \quad (3)$$

最近, 我们利用多尺度微扰法, 导出了浅水波方程(1)–(3)中扰动位势的非线性发展方程<sup>[7]</sup>:

$$(c_2 + \mu^2 Bc_1 + \mu^2 Bc_1^3 \phi_{XXY} + \mu^2 c_1 B^3 \phi_{YY})\phi_X - \mu^2 (c_1 B\phi_Y + c_2) \times (B^2 \phi_{XY} + c_1^2 \phi_{XX}) = 0, \quad (4)$$

$$\phi \equiv \phi(X, Y, T), \quad X = c_1 x - c_2 t,$$

$$Y = By, \quad T = R_o t. \quad (5)$$

式中 $\phi$ 为扰动位势; Rossby数 $R_o = \frac{\bar{U}}{f_0 L}$ ;  $\mu = \frac{R}{L}$ ,

变形半径 $R = \frac{\sqrt{gH}}{f_0}$ ; Coriolis数取 $\beta$ 平面近似

$f = f_0 + \beta y = f_0(1 + R_o By)$ ,  $B = \frac{\beta L^2}{\bar{U}}$ ;  $L$ 为

水平尺度;  $H$ 为大气层厚度的尺度;  $\bar{U}$ 为水平速度的尺度;  $g$ 为重力加速度;  $c_1$ 是波数,  $c_2$ 为波频.

$A_m = \frac{\partial}{\partial m} A$ ,  $A = (U, V, \phi)$ ,  $m = (x, y, t)$ . 其中扰动位势和速度的多周期波与冲击波(爆炸波)并存

\* 江西省自然科学基金(批准号: 2009GZW0026, 2012BAB202008)、国家自然科学基金(批准号: 11465015, 11365017, 11305106, 11305031)和江西省教育厅科技落地项目(批准号: KJLD13086)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: sryangjr@163.com

的解析解表明, 扰动位势在经向和纬向具有不同周期和波长的周期波, 都受纬向孤波的调制, 大气中存在气旋和反气旋周期性分布的现象 [7], 可是实际大气环流中还存在基流, 而该解析解中无基流项.

本文探索描述正压大气环流的方程 (4) 中含有基流的新解析解. 在非线性系统中, 等相位线为直线的平面周期波和孤波, 已有一些揭示 [7-15]. 波的调制和剪切不稳定性线性理论, 已被许多学者发展和应用 [1,8]. 本文根据获得的解析解, 研究正压大气环流中等相位线为曲线的周期波和孤波, 分析曲面的周期波与孤波相互调制的不稳定性.

## 2 发展方程的新解析解

为了寻找非线性发展方程的解析解, 许多有效的方法被广泛应用, 如 Bäcklund 变换法 [16]、Darboux 变换法 [17]、对称群法和约化法 [17-20]、Hirota 线性法 [10,11] 等. Lou [16,17] 用 Bäcklund 变换法、Darboux 变换法、对称法获得了 (2+1) 维 Euler 方程的解析解; 最近又提出了一种称之为“From Nothing to Something”的思想 [21]. 受此启发, 我们改变以往习惯于直接探索非线性方程实变函数解的思路, 介绍利用线性方程的复变函数解, 间接寻找非线性发展方程 (4) 的实变函数解的一种方法.

首先, 考虑线性方程

$$c_1^2 \phi_{XXXX} + B^2 \phi_{XY^2} = 0, \quad (6)$$

它的解为

$$\phi = F_1 + F_2 + F_3, \quad (7)$$

$$F_1 = F_1(z_1, T), \quad F_2 = F_2(z_2, T),$$

$$F_3 = F_3(Y, T), \quad (8)$$

$$z_1 = \frac{iBX}{c_1} + Y = \frac{iB(c_1x - c_2t)}{c_1} + By, \quad (9)$$

$$z_2 = X/2 + \frac{ic_1Y}{2B} = \frac{c_1x - c_2t + ic_1y}{2}, \quad (10)$$

式中  $i^2 = -1$ . 由 (9) 和 (10) 式可知,  $z_1$  与  $\beta$  效应有关, 而  $z_2$  与  $\beta$  效应无关,  $F_1, F_2$  和  $F_3$  是所示变量的任意函数.

其次, 将线性方程的这个解与  $\phi_X(c_2 + \mu^2 Bc_1)$  组成方程

$$F_1 + F_2 + F_3 = (c_2 + \mu^2 Bc_1)\phi_X, \quad (11)$$

直接积分 (11) 式, 可得

$$\phi = \frac{\int (F_1 + F_2)dX}{(c_2 + \mu^2 Bc_1)} + \frac{F_3 X}{(c_2 + \mu^2 Bc_1)} + F_4, \quad (12)$$

式中  $F_4 = F_4(Y, T)$ , 是待定函数;  $c_2 + \mu^2 Bc_1 \neq 0$ . 由于我们的目的是求非线性方程 (4) 的解, 因此将 (12) 式移植到非线性方程, 代入 (4) 式, 寻找合适的待定函数  $F_1, F_2, F_3, F_4$ . 得到

$$F_3 = f_1 Y + f_2, \quad (13)$$

$$F_4 = -\frac{(c_2 + \mu^2 Bc_1)Y^3}{6\mu^2 B^3 c_1} + \frac{f_3 Y^2}{2} + f_4 Y + f_5, \quad (14)$$

式中  $f_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$  是  $T$  的任意函数. 将 (13), (14) 式代入 (7) 式, 得非线性方程 (4) 的解为

$$\phi = -\frac{(c_2 + \mu^2 Bc_1)Y^3}{6\mu^2 c_1 B^3} + \frac{f_3 Y^2}{2} + f_4 Y + f_5 + \frac{(f_1 Y + f_2)X + \int (F_1 + F_2)dX}{c_2 + \mu^2 Bc_1}, \quad (15)$$

式中  $F_1$  和  $F_2$  分别是  $z_1, z_2$  的任意复变函数;  $F_3$  和  $F_4$  是大气的基流, 由波数  $c_1$ 、波频  $c_2$ 、 $\beta$  效应、 $\mu$  和  $T$  的任意函数  $f_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$  共同决定. 我们将根据 (15) 式, 分析讨论正压大气环流中相互调制的周期波和孤波.

## 3 分析讨论

周期波和孤波对解析气候现象具有重要的意义, 如 Luo [22] 和 Huang 等 [23] 利用正压位涡方程的周期波和孤波探讨了气候异常的机理. 非线性发展方程的周期波和孤波存在多种不同的表达形式, 如双周期波 [24]、多周期孤波 [7]、由三角函数和双曲函数表示的带有奇性的复合子 [25]、包络的孤波及调制不稳定性 [26]. 本文主要分析讨论等相位线为曲线的曲面的周期波和孤波. 曲面波能在不均匀的介质中保持稳定的传播 [27], 在易扰动的介质中会出现形状复杂的曲面波 [28]. 曲面波广泛存在于光学 [29]、航空科学 [30]、超音波学 [31] 和海洋等领域中, 并在有关技术中得到应用, 如在探测海洋表面的技术中, 文献 [32-34] 等提出用曲面波频谱估计方法代替平面波频谱分析方案.

我们根据(15)式的解,取复变函数 $F_1$ 和 $F_2$ 的具体形式,研究大气中扰动位势所具有的曲面波现象.由于 $F_2$ 与 $\beta$ 效应无关,所以下主要以 $F_1$ 所表示的曲面波为例,分析周期波和孤波的相互作用及不稳定性的情况.

1) 首先选择

$$\begin{aligned} F_1 &= f_6 \frac{\partial}{\partial X} \operatorname{sech}(m(z_1 + a_1 T)^3), \\ F_2 &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

式中 $a_1$ 和 $m$ 是任意的常数, $f_6$ 是 $T$ 的任意函数.将(16)式代入(15)式,得到 $\operatorname{sech}$ 形式的复变函数解,对它进行有理化,分开实部和虚部,然后取出其中的实部,经验证该实部是非线性发展方程(4)中扰动位势的解,为

$$\begin{aligned} \phi_r &= \frac{f_1 Y + f_2}{c_2 + \mu^2 B c_1} X - \frac{(c_2 + \mu^2 B c_1) Y^3}{6 \mu^2 c_1 B^3} \\ &+ \frac{f_3 Y^2}{2} + f_4 Y + f_5 \\ &+ \frac{\cosh(\xi) \cos(\eta) f_6}{(c_2 + \mu^2 B c_1)((\cosh(\xi))^2 - (\sin(\eta))^2)}, \end{aligned} \quad (17)$$

式中

$$\xi = \frac{(Y + a_1 T)m(3B^2 X^2 - c_1^2(Y + a_1 T)^2)}{c_1^2}, \quad (18)$$

$$\eta = \frac{m B X(B^2 X^2 - 3c_1^2(Y + a_1 T)^2)}{c_1^3}. \quad (19)$$

(17)式可分为基流项

$$\begin{aligned} &\frac{f_1 Y + f_2}{c_2 + \mu^2 B c_1} X - \frac{(c_2 + \mu^2 B c_1) Y^3}{6 \mu^2 c_1 B^3} \\ &+ \frac{f_3 Y^2}{2} + f_4 Y + f_5 \end{aligned}$$

和波动项 $\frac{\cosh(\xi) \cos(\eta) f_6}{(c_2 + \mu^2 B c_1)((\cosh(\xi))^2 - (\sin(\eta))^2)}$ 两部分.其中基流项由纬向波数 $c_1$ 、纬向波频 $c_2$ 、 $\beta$ 效应、 $\mu$ 和 $T$ 的任意函数 $f_i$ ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ )共同决定,表明大尺度大气在环流过程中,它的基流不仅随空间变化,而且随时间变化.在波动项中,由(18)式决定的 $\xi$ 是孤波的等相位线(如图1),由(19)式决定的 $\eta$ 是周期波的等相位线(如图2).它们的等相位线均为多曲线,所以该扰动位势的周期波和孤波属于多曲面波.多曲面孤波与周期波相互调制,当 $\xi = 0$ 和 $\eta = \pi/2 + k\pi$ ( $k$ 为整数)时,出现了周期性的奇点,是不稳定的周期孤波.图3展示了扰动位势由多曲面的周期波和孤波相互调制而形成

的不稳定的周期孤波结构.做图时考虑了大尺度中纬度的物理背景以及(4)和(5)式,选取了典型参数的值为 $L = 10^6$  m,  $g = 9.8$  m·s<sup>-2</sup>,  $H = 10^4$  m,  $f_0 = 10^{-4}$  s<sup>-1</sup>,  $\bar{U} = 10$  m·s<sup>-1</sup>,由此可得 $B = 1.6$ ,  $\mu = 3$ ,  $R_0 = 0.1$ .

在波动项中, $T$ 的任意函数 $f_6$ 对扰动位势多曲面周期孤波的波幅有调制的作用,在此讨论它的取值为以下三种情况.

当 $f_6 = \operatorname{sech}(a_2 T + a_3)$ , $a_2$ 和 $a_3$ 为任意常数时,在 $-1 < (a_2 T + a_3) < 1$ 范围内, $f_6$ 为有限值;不在此范围 $f_6$ 趋于零.此时可描述扰动位势随时间的变化而产生和消失的情况.

当 $f_6 = \exp(a_2 T + a_3)$ 时,若 $a_2 > 0$ , $f_6$ 随时间的增大而增大,则波动项可描述扰动位势随时间的增大而产生的情况;若 $a_2 < 0$ , $f_6$ 随时间的增大而减小,则波动项可描述扰动位势随时间的增大而消失的情况.

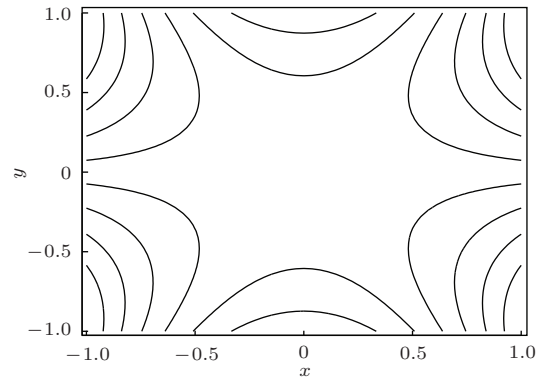


图1 由(18)式决定的孤波的等相位线 对应的参量值为 $a_1 = 1$ ,  $c_1 = -1$ ,  $c_2 = 10$ ,  $f_1 = 0.002$ ,  $f_2 = 0.01$ ,  $f_3 = 0.1$ ,  $f_4 = -0.01$ ,  $f_5 = 0.01$ ,  $f_6 = 0.1$ ,  $m = 3$ ,  $t = 0$

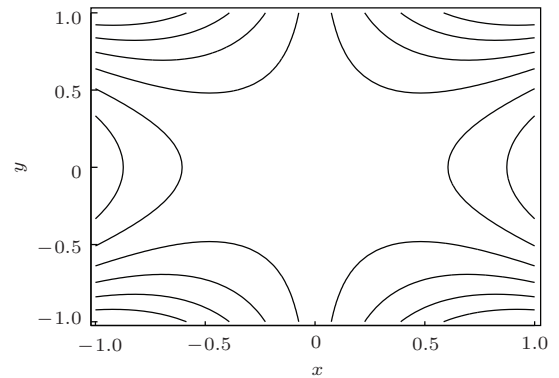


图2 由(19)式决定的周期波等相位线 对应的参量值为 $a_1 = 1$ ,  $c_1 = -1$ ,  $c_2 = 10$ ,  $f_1 = 0.001$ ,  $f_2 = 0.01$ ,  $f_3 = 0.1$ ,  $f_4 = -0.01$ ,  $f_5 = 0.01$ ,  $f_6 = 0.1$ ,  $m = 3$ ,  $t = 0$

当  $f_6 = \sin(a_2T + a_3)$  时, 波动项可描述扰动位势随时间而做周期性变化的状况.

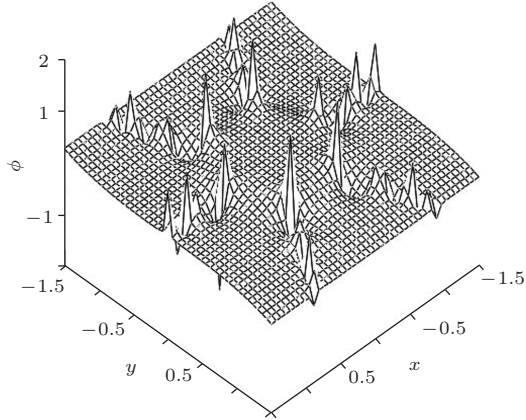


图3 由(17)式决定的曲面周期孤波 对应的参量值为  $a_1 = 1, c_1 = 0.1, c_2 = -1.2, f_1 = 0.0001, f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = 0.001, f_6 = 0.2, m = 1, t = 0$

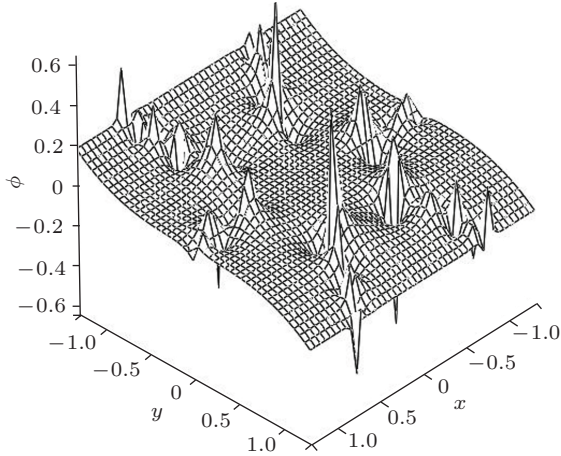


图4 由(21)式决定的曲面周期孤波 对应的参量值为  $a_1 = 1, c_1 = 0.1, c_2 = -1.2, f_1 = 0.0001, f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = 0.002, f_6 = 0.05, m = 1, t = 0$

将(17)式依次代入文献[7]中的(18), (22), (23) 以及(9)和(10)式, 可确定正压大气环流中速度场的分布.

2) 考虑取

$$\begin{aligned} F_1 &= I * f_6 \frac{\partial}{\partial X} \operatorname{sech}(m(z_1 + a_1T)^3), \\ F_2 &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

式中  $a_1$  和  $m$  是任意的常数,  $f_6$  是  $T$  的任意函数. 将(20)式代入(15)式, 有理化后取实部, 经验证可得非线性发展方程(4)中扰动位势的又一个多曲面周期孤波解为

$$\phi_r = \frac{f_1 Y + f_2}{c_2 + \mu^2 B c_1} X - \frac{(c_2 + \mu^2 B c_1) Y^3}{6 \mu^2 c_1 B^3}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{f_3 Y^2}{2} + f_4 Y + f_5 \\ &+ \frac{\sinh(\xi) \sin(\eta) f_6}{(c_2 + \mu^2 B c_1)((\cosh(\xi))^2 - (\sin(\eta))^2)}. \end{aligned} \quad (21)$$

与(17)式相比, 基流项、奇点、 $\xi$  和  $\eta$  相同, 但波动项不同, 为

$$\frac{\sinh(\xi) \sin(\eta) f_6}{(c_2 + \mu^2 B c_1)((\cosh(\xi))^2 - (\sin(\eta))^2)},$$

当  $\xi = 0$  和  $\eta = \pi/2 + k\pi$  ( $k$  为整数) 时, 也周期性地出现奇点, 是不稳定的周期孤波, 如图4.

3) 考虑选择

$$\begin{aligned} F_1 &= 0, \\ F_2 &= f_7 \frac{\partial}{\partial X} \operatorname{sech}(n(z_2 + a_2T)^3), \end{aligned} \quad (22)$$

式中  $a_2$  和  $n$  是任意的常数,  $f_7$  是  $T$  的任意函数. 将(22)式代入(15)式, 有理化后取实部, 可得到与上述相似的不稳定多曲面周期孤波解, 其中基流项相同, 也由波数  $c_1$ 、波频  $c_2$ 、 $\beta$  效应、 $\mu$  和  $T$  的任意函数  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ) 共同决定; 不同的是波动项  $\frac{\cosh(\xi_2) \cos(\eta_2) f_7}{(c_2 + \mu^2 B c_1)((\cosh(\xi_2))^2 - (\sin(\eta_2))^2)}$  中的相位. 考虑(9)和(10)式后,

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \frac{n}{8} (c_1 x - c_2 t)((c_1 x - c_2 t)^2 \\ &\quad - 3(y c_1 + 2a_2 R_o t)^2), \\ \eta_2 &= \frac{n}{8} (y c_1 + 2a_2 R_o t)(3(c_1 x - c_2 t)^2 \\ &\quad - (y c_1 + 2a_2 R_o t)^2), \end{aligned}$$

可见  $\xi_2$  和  $\eta_2$  都与  $\beta$  效应无关.

4) 最后考虑多个波同时存在的情况. 选取

$$F_1 = f_6 \frac{\partial}{\partial X} \operatorname{sech}(m(z_1 + a_1T)^3), \quad (23)$$

$$F_2 = f_7 \frac{\partial}{\partial X} \operatorname{sech}(n(z_2 + a_2T)^3), \quad (24)$$

式中  $a_1, a_2, m$  和  $n$  是任意的常数,  $f_6$  和  $f_7$  是  $T$  的任意函数. 将(23)和(24)式代入(15)式, 有理化后取实部, 可得到非线性发展方程(4)中扰动位势的解. 其中基流项与上述相同, 而波动项是由(17)式和(22)式决定的两个独立的多曲面周期孤波的叠加, 它们相遇后, 各自保持相遇前的形状和速度不变的独立传播.

## 4 结 论

本文根据描述大尺度正压大气环流的原始非线性浅水波方程组的发展方程, 研究了扰动位

势的基流和波动共存的现象. 首先, 从线性方程 (6) 的复变函数解出发, 经过两次适当的移植, 获得了非线性发展方程 (4) 的实变函数解析解. 该解析解由基流项和波动项两部分组成. 其中基流项由波数  $c_1$ 、波频  $c_2$ 、 $\beta$  效应、 $\mu$  和  $T$  的任意函数  $f_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$  共同决定, 是空间和时间的函数. 在波动项中含有两个任意的复变函数, 其中一个与  $\beta$  效应有关, 另一个则与  $\beta$  效应无关. 然后具体分析讨论了选取复变函数的 sech 形式, 如 (16), (20), (22)—(24) 式所表达的波. 结果表明: 大气环流中的扰动位势存在由周期波与孤波相互调制而形成的周期孤波; 周期波与孤波的等相位线是多曲线, 如图 1、图 2, 因此是多曲面的周期孤波, 如图 3、图 4; 如果扰动位势的多个曲面周期孤波同时出现, 则彼此独立传播; 当  $\xi = 0$  和  $\eta = \pi/2 + k\pi$  ( $k$  为整数) 时, 则出现周期性的奇点, 是不稳定的波; 波动项中  $T$  的任意函数  $f_i (i = 6, 7)$  对多曲面周期孤波的波幅有调制作用, 可控制多曲面周期孤波的产生、发展和消失. 我们所得到的非线性发展方程的解析解, 反映了大气环流扰动位势新的波动现象, 具有一定的理论参考价值. 对于复变函数所表达的其他情况, 如孤波和偶极子等, 将另文讨论.

## 参考文献

- [1] Vincent H C 2010 *J. Hydro-Enviro. Res.* **3** 173
- [2] Callaghan T G, Forbes L K 2006 *J. Comput. Phys.* **217** 845
- [3] Phillips N A 1959 *Mon. Weather Rev.* **87** 333
- [4] Williamson D L, Drake J B, Hack J J, Jakob R, Swartrauber P N 1992 *J. Comput. Phys.* **102** 211
- [5] Thuburn J, Li Y 2000 *Tellus A* **52** 181
- [6] Baines P G 1976 *J. Fluid Mech.* **73** 193
- [7] Mao J J, Yang J R 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 130205 (in Chinese) [毛杰健, 杨建荣 2013 物理学报 **62** 130205]
- [8] Pinilla C, Chu V H 2008 *J. Coastal Res.* **52** 207
- [9] He J R, Li H M 2011 *Phys. Rev. E* **83** 066607
- [10] Yang J R, Mao J J 2008 *Commun. Theor. Phys.* **49** 22
- [11] Yang J R, Mao J J 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4337
- [12] Yang J R, Mao J J, Tang X Y 2013 *Chin. Phys. B* **22** 115203
- [13] Mao J J, Yang J R 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4999 (in Chinese) [毛杰健, 杨建荣 2005 物理学报 **54** 4999]
- [14] Mao J J, Yang J R 2006 *Chin. Phys.* **15** 2804
- [15] Mao J J, Yang J R 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5049 (in Chinese) [毛杰健, 杨建荣 2007 物理学报 **56** 5049]
- [16] Lou S Y, Jia M, Huang F, Tang X Y 2007 *J. Theor. Phys.* **46** 2082
- [17] Lou S Y, Jia M, Tang X Y, Huang F 2007 *Phys. Rev. E* **75** 056318
- [18] Tang X Y, Shukla P K 2007 *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** 5921
- [19] Tang X Y, Shukla P K 2007 *Phys. Scr.* **76** 665
- [20] Lou S Y, Tang X Y, Lin J 2000 *J. Math. Phys.* **41** 8286
- [21] Lou S Y, Li Y Q, Tang X Y 2013 *Chin. Phys. Lett.* **30** 080202
- [22] Luo D H 2005 *J. Atmos. Sci.* **62** 3202
- [23] Huang F, Tang X Y, Lou S Y, Lu C H 2007 *J. Atmos. Sci.* **64** 52
- [24] Chow K W 2002 *Wave Motion* **35** 71
- [25] Ma W X 2002 *Phys. Lett. A* **301** 35
- [26] Luo D H 1996 *Wave Motion* **24** 315
- [27] Steinbock O, Zykov V S, Muller S C 1993 *Phys. Rev. E* **48** 3295
- [28] Gao X, Zhang H, Zykov V, Bodenschatz E 2014 *New J. Phys.* **16** 033012
- [29] Barboza R, Bortolozzo U, Assanto G, Vidal-Henriquez E, Clerc M G, Residori S 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 143901
- [30] Uchida S 1956 *J. Aeronaut. Sci.* **23** 830
- [31] Mitria F G, Fellah Z E A 2011 *Ultrasonics* **51** 523
- [32] Zhao X F, Huang S X 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 099204 (in Chinese) [赵小峰, 黄思训 2013 物理学报 **62** 099204]
- [33] Karimian A, Yardim C, Gerstoft P, Hodgkiss W S, Barrios A E 2012 *IEEE Trans.* **60** 4408
- [34] Jensen F B, Kuperman W A, Porter M B, Schmidt H 2011 *Computational Ocean Acoustics* (2nd Ed.) (New York: Springer-Verlag)

# Periodic wave and solitary wave of curved face in barotropic atmospheric circulation\*

Mao Jie-Jian<sup>1)</sup> Wu Bo<sup>1)</sup> Fu Min<sup>1)</sup> Huang Ying<sup>1)</sup>  
Yang Jian-Rong<sup>1)†</sup> Ren Bo<sup>2)</sup> Liu Ping<sup>3)</sup>

1) (*Department of Physics and Electronics, Shangrao Normal University, Shangrao 334001, China*)

2) (*Institute of Nonlinear Science, Shaoxing University, Shaoxing 312000, China*)

3) (*College of Electron and Information Engineering, University of Electronic Science and Technology of China Zhongshan Institute, Zhongshan 528402, China*)

( Received 27 March 2014; revised manuscript received 18 May 2014 )

## Abstract

The wave motion characteristic of large-scale barotropic atmospheric circulation, which can be described by the original nonlinear shallow water equations, is important for comprehending the climatic change. Employing the complex solution of linear equation, and transplanting it twice, the new analytic solution of disturbed height field of the nonlinear evolution equation is obtained which is constructed by the basic flow term and fluctuation term. The basic flow is codetermined by the wave number, wave velocity,  $\beta$  effect, radius of deformation and arbitrary function of time. The fluctuation term is related to  $\beta$  effect, and displays that in the disturbed height field there exist the periodic wave and solitary wave of curved face, which modulate each other and present instability; several periodic-solitary waves can propagate independently when they appear simultaneously; the arbitrary function of time in the fluctuation term has a modulation effect on the amplitude of periodic-solitary wave, and can control the occurrence, development and vanishing of wave. The results have a certain theoretical reference value for studying the atmospheric fluctuation phenomena and climatic change.

**Keywords:** large-scale barotropic atmosphere, nonlinear shallow water equations, wave of curved face, period-solitary wave

**PACS:** 02.90.+p, 92.60.Bh, 47.35.Lf, 92.70.Cp

**DOI:** [10.7498/aps.63.180204](https://doi.org/10.7498/aps.63.180204)

---

\* Project supported by the Natural Science Foundation of Jiangxi Province, China (Grant Nos. 2009GZW0026, 2012BAB202008), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11465015, 11365017, 11305106, 11305031), and the Technology Landing Project of the Education Department of Jiangxi Province of China (Grant No. KJLD13086).

† Corresponding author. E-mail: [sryangjr@163.com](mailto:sryangjr@163.com)