物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 63, No. 18 (2014) 180206

$K(m,n,p)$方程多-Compacton相互作用的数值研究*

王光辉[1)2)] 王林雪[1)] 王灯山[2)] 刘丛波[1)] 石玉仁[1)†]

1) (西北师范大学物理与电子工程学院, 兰州 730070)

2) (北京信息科技大学理学院, 北京 100192)

(2014 年 3 月 5 日收到; 2014 年 4 月 2 日收到修改稿)

采用有限差分法对非线性色散 $K(m,n,p)$ 方程的多-Compacton 之间的相互作用进行了数值研究. 该差分方法为二阶精度且线性意义下绝对稳定的无耗散格式, 通过添加人工耗散项有效防止了数值解的爆破现象. 首先对单-Compacton 的长时间演化行为进行了数值模拟, 验证了数值方法的有效性. 然后对双-Compacton 和三-Compacton 的碰撞过程进行了数值研究, 发现多-Compacton 碰撞之后基本保持碰撞之前的波形和波速, 但在波后产生小振幅的 Compacton-Anticompacton 对.

关键词: $K(m,n,p)$ 方程, Compacton, 有限差分法

PACS: 02.30.Jr, 02.60.Cb, 02.70.Bf **DOI:** 10.7498/aps.63.180206

1 引 言

物理学研究的自然现象就其本质来说都是非线性的. 传统的物理学和自然科学在研究过程中将许多现象在一定程度上近似为线性, 并取得了巨大成功. 随着对自然界中各复杂现象的深入研究, 越来越多的非线性现象开始进入我们的视野. 许多非线性现象可以用非线性演化方程来描述, 比较著名的有 Korteweg-de Vries (KdV) 方程, Nonlinear-Schrödinger 方程, Kadomtesev-Petvishvilii 方程等. 人们对 KdV 方程及其修正形式进行了广泛研究, 由此产生了一系列数学方法, 并发现了许多奇妙现象, 从而推动了非线性科学研究的发展[1−11].

1993 年, 美国 Los Alamos 国家实验室的 Rosena 和 Hyman[12] 研究了非线性色散项对液滴运动的影响, 给出了广义非线性色散 KdV 模型

$$
\begin{aligned}
&u_t + (u^m)_x + (u^n)_{xxx} \\
&= 0 \quad m > 0, 1 < n \leqslant 3,
\end{aligned} \tag{1}
$$

其中 u 是关于 t 和 x 的函数, 称之为 $K(m,n)$ 方程. 随后许多学者对 $K(m,n)$ 方程的相关问题进行了广泛研究[13−21], 发现 $K(m,n)$ 方程有紧支集的孤立波解——Compacton 解. 数值研究结果表明, 多-Compacton 在碰撞后将会保持原来的形状而不出现散射. 它们之间的碰撞是弹性的, 但与 KdV 方程描述的孤立子有所不同. KdV 方程具有无穷多守恒律而 $K(m,n)$ 只拥有有限数目的局部守恒律. 当两个 Compacton 碰撞后, 在相互作用过程中会产生小振幅的 Compacton-Anticompacton 对.

考虑到高阶项的影响后, 许多学者进行了研究并且得到了一些重要结论[22−29]. Dey[30] 研究了含有五阶色散项的 KdV 方程并得到了对应的解析解和适用范围. Tian 和 Yin[31] 研究了五阶广义 KdV 方程 $K(m,n,1)$, 得到了 $K(2,2,1)$ $K(3,3,1)$ 的解

* 国家自然科学基金 (批准号: 11047010, 11001263, 11375030)、北京市自然科学基金 (批准号: 1132016) 和北京市科技新星计划 (批准号: Z131109000413029) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: shiyr@nwnu.edu.cn

 http://wulixb.iphy.ac.cn

析解. 这些研究侧重于得到 $K(m,n,p)$ 方程的解析解, 很少考虑多个 Compacton 之间的相互作用.

考虑如下形式的 $K(m,n,p)$ 方程

$$u_t + \beta_1(u^m)_x + \beta_2(u^n)_{xxx} + \beta_3(u^p)_{xxxxx} = 0, \tag{2}$$

其中 u 是关于 t 和 x 的函数; β_1, β_2, β_3 是非线性项系数. 本文旨在考查方程 (2) 的多-Compacton 之间的相互作用. 首先构造了一个二阶精度的两层隐式差分格式, 该格式在线性意义下绝对稳定, 通过添加人工耗散项有效防止了数值解的爆破现象. 然后对单个 Compacton 的长时间演化行为进行了数值模拟, 验证了数值方法的有效性. 接着对双-Compacton 和三-Compacton 的碰撞过程进行了数值研究, 发现多-Compacton 碰撞之后基本保持碰撞之前的波形和波速, 但位相产生变化且在波后产生小振幅的 Compacton-Anticompacton 对.

2 $K(m,n,p)$ 方程的 Compacton 解

当 $m=n=p$ 时, 可解析地得到方程 (2) 在一定参数情况下的单-Compacton 解. 做行波变换

$$u(x,t) = \tilde{u}(\xi), \quad \xi = x - vt - x_0, \tag{3}$$

这里 v 是波速; x_0 是任意常数, 可通过改变 x_0 的值而改变 Compacton 的中心位置. 将 (3) 式代入方程 (2) 后对 ξ 积分一次 (积分常数取为 0 并略去 "$\sim$"), 得

$$-vu + \beta_1 u^p + \beta_2(u^p)_{\xi\xi} + \beta_3(u^p)_{\xi\xi\xi\xi} = 0. \tag{4}$$

方程 (4) 具有如下形式的单-Compacton 解:

$$u(\xi) = \begin{cases} A\cos^{\delta}(B\xi) & |B\xi| \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & |B\xi| > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}, \tag{5}$$

其中

$$\delta = \frac{4}{p-1}, \tag{6}$$

$$A^{p-1} = \frac{v}{\beta_3 B^4 p\delta(p\delta-1)(p\delta-2)(p\delta-3)}, \tag{7}$$

$$B^2 = \frac{2(p^2\delta^2 - 2p\delta + 2)}{[p\delta(p\delta-2)]^2}\frac{\beta_1}{\beta_2}, \tag{8}$$

$$\beta_3 = \frac{1}{\beta_1}\left[\frac{\beta_2 p\delta(p\delta-2)}{2(p^2\delta^2-2p\delta+2)}\right]^2. \tag{9}$$

由 (7) 和 (8) 式可看出: 在其他参数确定时, 振幅大的波, 其速度也快, 这与 KdV 方程描述的孤立子有类似之处; 但 Compacton 的振幅与速度之间并非简单的正比关系, 这与 KdV 方程不同. 对 m, n, p 不相等的情况, 很难得到方程 (2) 的精确解析解; 对于多-Compacton 解, 也很难得到精确解析解, 一般做法是对其进行数值研究.

3 数值格式

为数值研究 $K(m,n,p)$ 方程单-Compacton 的长时间演化行为和多-Compacton 之间的相互作用, 构造如下有限差分格式. 考虑一个以 x 和 t 为坐标的有限区域, 对其进行离散化, 所使用的空间步长为记为 Δx, 时间步长记为 Δt. 在网格点 $(x_l, t_j) \triangleq (l, j)$ 处, 对函数 f 的各阶导数做如下离散近似:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{lj} \approx \frac{f_{l,j+1} - f_{lj}}{\Delta t}, \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{lj} \approx \frac{1}{4\Delta x} H_x(f_{l,j+1} + f_{lj}), \tag{11}$$

$$\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{lj} \approx \frac{1}{4(\Delta x)^3} H_x\delta_x^2(f_{l,j+1} + f_{lj}), \tag{12}$$

$$\left.\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}\right|_{lj} \approx \frac{1}{4(\Delta x)^5} H_x\delta_x^4(f_{l,j+1} + f_{lj}), \tag{13}$$

其中

$$\begin{aligned} H_x f_{lj} &= f_{l+1,j} - f_{l-1,j}, \\ \delta_x^2 f_{ij} &= f_{i+1,j} - 2f_{ij} + f_{i-1,j}, \\ H_x\delta_x^2 f_{lj} &= f_{l+2,j} - 2f_{l+1,j} + 2f_{l-1,j} - f_{l-2,j}, \\ H_x\delta_x^4 f_{lj} &= f_{l+3,j} - 4f_{l+2,j} + 5f_{l+1,j} - 5f_{l-1,j} \\ &\quad + 4f_{l-2,j} - f_{l-3,j}. \end{aligned}$$

对 $K(m,n,p)$ 方程 (2), 记 $F^{(m)} = u^m$, $F^{(n)} = u^n$, $F^{(p)} = u^p$, 则有

$$u_t + \beta_1 F_x^{(m)} + \beta_2 F_{xxx}^{(n)} + \beta_3 F_{xxxxx}^{(p)} = 0, \tag{14}$$

采用近似式 (10)—(13) 对方程 (14) 进行差分离散, 得以下隐式格式

$$\begin{aligned} & u_{l,j+1} - u_{lj} + sH_x(F_{l,j+1}^{(m)} + F_{lj}^{(m)}) \\ & + rH_x\delta_x^2(F_{l,j+1}^{(n)} + F_{lj}^{(n)}) + qH_x\delta_x^4(F_{l,j+1}^{(p)} + F_{lj}^{(p)}) \\ & = 0, \end{aligned} \tag{15}$$

其中

$$s = \frac{\Delta t}{4\Delta x}\beta_1, \quad r = \frac{\Delta t}{4(\Delta x)^3}\beta_2,$$
$$q = \frac{\Delta t}{4(\Delta x)^5}\beta_3.$$

在任一节点(x_l,t_j)处, 该格式截断误差为

$$\begin{aligned}T(x_l,t_j) = & \left[\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+\frac{1}{4}\beta_1\frac{\partial^3 F^{(m)}}{\partial x\partial t^2}\right.\\ &\left.+\frac{1}{4}\beta_2\frac{\partial^5 F^{(n)}}{\partial x^3\partial t^2}+\frac{1}{4}\beta_3\frac{\partial^3 F^{(p)}}{\partial x^5\partial t^2}\right]_{(x_l,t_j)}\\ &\times(\Delta t)^2+O[(\Delta t)^3]\\ &+\left[\frac{1}{6}\beta_1\frac{\partial^3 F^{(m)}}{\partial x^3}+\frac{1}{4}\beta_2\frac{\partial^5 F^{(n)}}{\partial x^5}\right.\\ &\left.+\frac{1}{3}\beta_3\frac{\partial^7 F^{(p)}}{\partial x^7}\right]_{(x_l,t_j)}\\ &\times(\Delta x)^2+O[(\Delta x)^3]\\ = & O[(\Delta t)^2+(\Delta x)^2],\end{aligned}$$

故(15)式为二阶精度格式. 格式(15)为一非线性差分方程组, 求解甚为不便. 采用文献[32]中的方法对其进行线性化处理, 得

$$\begin{aligned}&F_{l,j+1}^{(\alpha)}+F_{lj}^{(\alpha)}\\ &\approx(2-\alpha)u_{lj}^{\alpha}+\alpha u_{lj}^{\alpha-1}u_{l,j+1}\quad(\alpha=m,n,p).\end{aligned}\tag{16}$$

将(16)式代入(15)式, 得下列七对角方程组

$$\begin{aligned}&a_{lj}u_{l-3,j+1}+b_{lj}u_{l-2,j+1}+c_{lj}u_{l-1,j+1}+u_{l,j+1}\\ &+d_{lj}u_{l+1,j+1}+f_{lj}u_{l+2,j+1}+g_{lj}u_{l+3,j+1}\\ &=z_{lj},\end{aligned}\tag{17}$$

其中

$$\begin{aligned}a_{lj}=&-pqu_{l-3,j}^{p-1},\\ b_{lj}=&\,4pqu_{l-2,j}^{p-1}-rnu_{l-2,j}^{n-1},\\ c_{lj}=&\,2rnu_{l-1,j}^{n-1}-5pqu_{l-1,j}^{p-1}-msu_{l-1,j}^{m-1},\\ d_{lj}=&-2rnu_{l+1,j}^{n-1}+5pqu_{l+1,j}^{p-1}+msu_{l+1,j}^{m-1},\\ f_{lj}=&-4pqu_{l+2,j}^{p-1}+rnu_{l+2,j}^{n-1},\\ g_{lj}=&\,pqu_{l+3,j}^{p-1},\\ z_{lj}=&\,u_{lj}+(m-2)s(u_{l+1,j}^{m}-u_{l-1,j}^{m})+(n-2)r\\ &\times[u_{l+2,j}^{n}-2u_{l+1,j}^{n}+2u_{l-1,j}^{n}-u_{l-2,j}^{n}]\\ &+(p-2)q[u_{l+3,j}^{p}-4u_{l+2,j}^{p}+5u_{l+1,j}^{p}\\ &-5u_{l-1,j}^{p}+4u_{l-2,j}^{p}-u_{l-3,j}^{p}].\end{aligned}$$

由线性化过程可知, 差分格式(17)式仍保持二阶精度, 但(17)式构成线性方程组, 采用迭代法或消去法容易求解.

为分析(17)式的数值稳定性, 设$u_{lj}=V_j\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kl\Delta x}$, 其中i为虚数单位, k为任意实数. 采用线性稳定性分析方法[33], 得误差增长因子G的模为

$$|G|=\sqrt{\frac{\sigma^2+4\sin^2(k\Delta x)\left((m-2)s\sigma^m-4(n-2)r\sigma^n\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)+16(p-2)q\sigma^p\sin^4\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\right)^2}{\sigma^2+4\sin^2(k\Delta x)\left(ms\sigma^m-4nr\sigma^n\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)+16pq\sigma^p\sin^4\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\right)^2}},$$

其中$\sigma=\max\limits_{l,j}|u_{lj}|$. 当$m=n=p$时, 易知对任何实数$k$, 均有$|G|\leqslant 1$, 所以(17)式在线性意义下无条件稳定.

(15)式是无耗散格式, 由此而导出的(17)式也是无耗散格式, 在实际计算过程中会产生波的爆破(break up)现象(详细讨论见下节), 使得计算无法正常进行. 通过减小空间步长Δx和(或)时间步长Δt, 只能推迟而不能避免爆破现象的发生. 为克服此问题, 可引入人工耗散项, 修改(15)式为下列格式

$$\begin{aligned}&u_{l,j+1}-u_{lj}+sH_x(F_{l,j+1}^{(m)}+F_{lj}^{(m)})\\ &+rH_x\delta_x^2(F_{l,j+1}^{(n)}+F_{lj}^{(n)})\\ &+qH_x\delta_x^4(F_{l,j+1}^{(p)}+F_{lj}^{(p)})+\varepsilon\frac{\Delta t}{(\Delta x)^4}\delta_x^4u_{l,j+1}\\ &=0.\end{aligned}\tag{18}$$

(18)式左边最后一项的引入, 相当于在方程(2)左边添加$\varepsilon\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$作为耗散项, 其中耗散项系数$\varepsilon>0$. 也可选择2阶导数或者6阶导数项等作为耗散项. 通常情况下, 高阶导数对于高频波具有更强的耗散作用. 采用和前面相同的方法, 可对(18)式进行线性化处理, 所得结果与(17)式形式完全相同, 只是系数稍有变化, 具体为$b_{lj}\to b_{lj}+\gamma$, $c_{lj}\to c_{lj}-4\gamma$, $d_{lj}\to d_{lj}-4\gamma$, $f_{lj}\to f_{lj}+\gamma$, $u_{l,j+1}$的系数由1变为$1+6\gamma$, 其中$\gamma=\varepsilon\dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^4}$.

人工耗散项的引入, 也可以增强格式的数值稳定性. 需要注意的是, 耗散项系数ε的取值要适当: ε太小则不能有效抑制爆破现象的发生; ε过大则会使格式精度降低, 而且使波很快衰减, 不能长时间稳定传播下去, 从而引起非物理现象. 实际计算中, 考虑到引入ε后不使格式精度发生显著变化,

取 $\varepsilon = O[(\Delta x)^2]$ 比较合适.

4 数值模拟结果

我们首先对单 Compacton 的长时间演化行为进行模拟, 以检验前面数值方法的有效性. 然后采用该方法对 $K(m,n,p)$ 方程 (2) 的双-Compacton 和三-Compacton 之间的相互作用进行模拟研究. 在对单-Compacton 进行演化时, 以 $m = n = p = 2$ 的 $K(2,2,2)$ 方程为例进行, 空间计算范围取为 $x \in [0, 120]$. 初始条件取为

$$u(x,0) = \begin{cases} A\cos^{\delta}(B(x-x_0)) & |B(x-x_0)| \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & |B(x-x_0)| > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}, \quad (19)$$

其中 δ, A, B 由 (6)—(8) 式给出. 给定初始条件时, 应通过调节 x_0 的值适当选择 Compacton 的中心位置, 使其离边界足够远. 边界条件可以选择零边界条件或者周期边界条件. 前者适合于在计算时间范围内波的中心位置始终远离边界, 后者更适合于长时间演化行为的计算. 在下面的具体计算实例中, 我们采用了零边界条件; 若采用周期性边界条件, 所得结果与前者差别很小.

4.1 参数 ε 的影响

(17) 式是无耗散格式, 在实际计算过程中会产生波的爆破现象. 这是一种由数值方法导致的非物理现象. 图 1 (a) 显示了 $\varepsilon = 0$ 时单-Compacton 的数值演化. 可以看出, 波仅演化很短的时间后就发生了爆破现象. 图 1 (b) 显示了 ε 很小时 ($\varepsilon = 0.0001$) 单-Compacton 的演化. 可以看出, 此时波爆破的时间明显有所推迟, 但并没有阻止该现象的发生. 这种情况下也不宜用于长时间计算. 图 1 (c) 显示了 ε 相对较大时 ($\varepsilon = 0.1$) 单-Compacton 的演化. 此时虽可进行长时间演化, 但经过一段时间后, 波的振幅产生了显著的衰减, 波的中心位置也与精确解发生了很大的偏离. 图 1 (d) 显示了 $\varepsilon = 0.01$ 时单-Compacton 的演化. 可以看出, 此时经过长时间演化后, 数值解与精确解仍然符合得很好, 表明了前面建立的数值方法的有效性. 图 1 所示结果在进行数值计算时, $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.01$, $x_0 = 4\pi$, $\upsilon = 0.4$, $\beta_1 = \beta_2 = 3$, β_3 由 (9) 式给出.

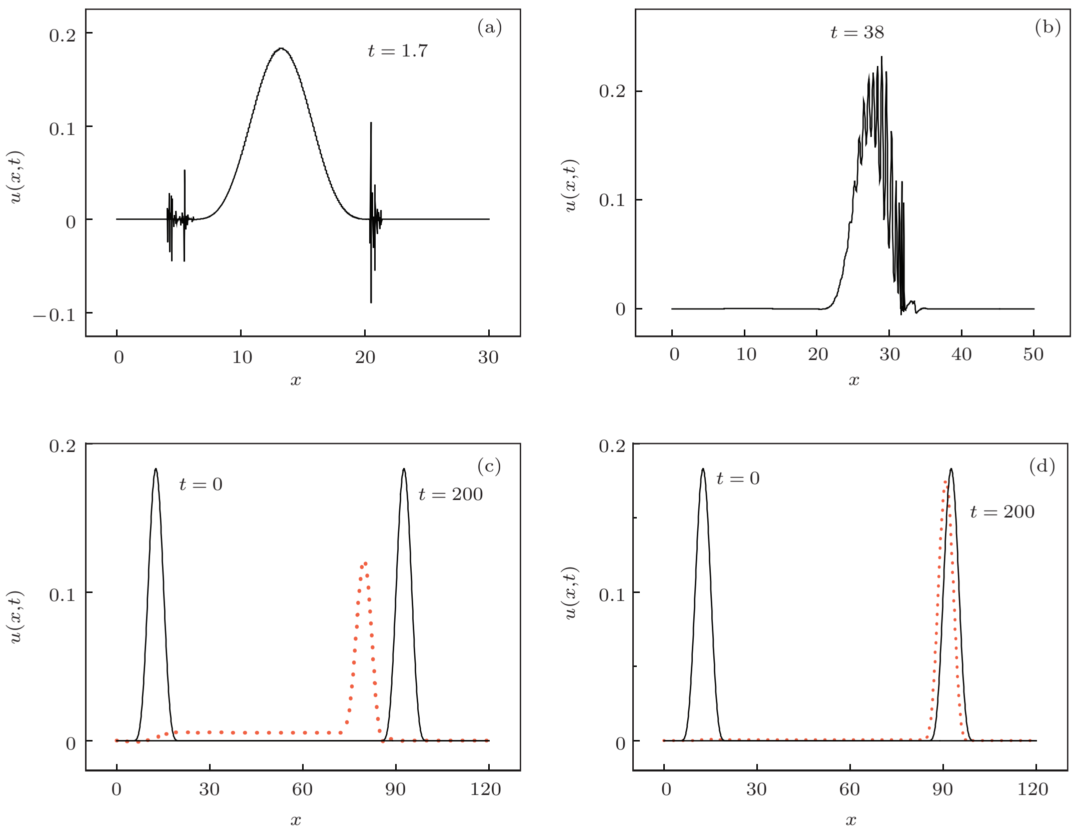

图 1 不同 ε 情形下 $K(2,2,2)$ 方程单-Compacton 的数值演化 (a) $\varepsilon = 0$; (b) $\varepsilon = 0.0001$; (c) $\varepsilon = 0.1$; (d) $\varepsilon = 0.01$; 其他参数为 $x_0 = 4\pi$, $\upsilon = 0.4$, $\beta_1 = \beta_2 = 3$

4.2 双-Compacton的相互作用

前面对于$K(2,2,2)$方程单-Compacton的数值演化的研究, 既表明了人工耗散项引入的必要性与重要性, 也显示了前面建立的数值方法的正确性. 下面, 我们利用该方法对$K(m,n,p)$方程双-Compacton的碰撞过程进行数值模拟. 初始条件可以写为

$$u(x,0)=\sum_{j=1}^{2}u_j(x,0),$$

其中

$$u_j(x,0)=\begin{cases}A_j\cos^{\delta}(B_j(x-x_{0j})) & |B_j(x-x_{0j})|\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ 0 & |B_j(x-x_{0j})|>\dfrac{\pi}{2}\end{cases},\tag{20}$$

$u_j(x,0)$, A_j, v_j, x_{0j}分别为第j个Compacton的初值、振幅、速度和初始中心位置, A_j, B_j分别由(7)和(8)式给出. 注意应适当选择两个Compacton的初始中心位置, 使其相距足够远, 则初始时刻它们之间的相互作用可忽略不计.

图2(a)—(c)分别显示了$m=n=p=2,3,5$时双-Compacton相互作用过程的数值模拟, 各参数取为$x_{10}=3\pi$, $x_{20}=9\pi$, $v_1=0.4$, $v_2=0.2$, $\beta_1=3$, $\beta_2=3$, $\varepsilon=0.01$. 选择合适的初始条件使得初始时刻振幅较大(因而运动速度也较快)的Compacton位于另一个振幅较小的Compacton的左边. 从图2可以看出, 经过一段时间后, 振幅较大的Compacton追上振幅较小的Compacton, 两者发生碰撞. 碰撞过程结束后, 振幅较大的超过另一个, 从而构成振幅大者在前, 振幅小者在后的Compacton序列. 图中虚线表示两个Compacton之间若没有相互作用时在$t=200$时的波形. 可以看出, 由于双-Compacton之间相互碰撞时的非线性相互作用, 使得在碰撞后两者的位相发生了明显的变化, 但波形、振幅和速度的变化并不明显, 这与KdV方程双孤子的碰撞有类似之处. 另一个显著的特点是, 两个Compacton碰撞后, 在波的后面(左面)产生了一对小振幅的Compacton-Anticompacton对, 而且它们的传播速度非常缓慢. 这是与KdV方程描述的孤立子碰撞不同的地方.

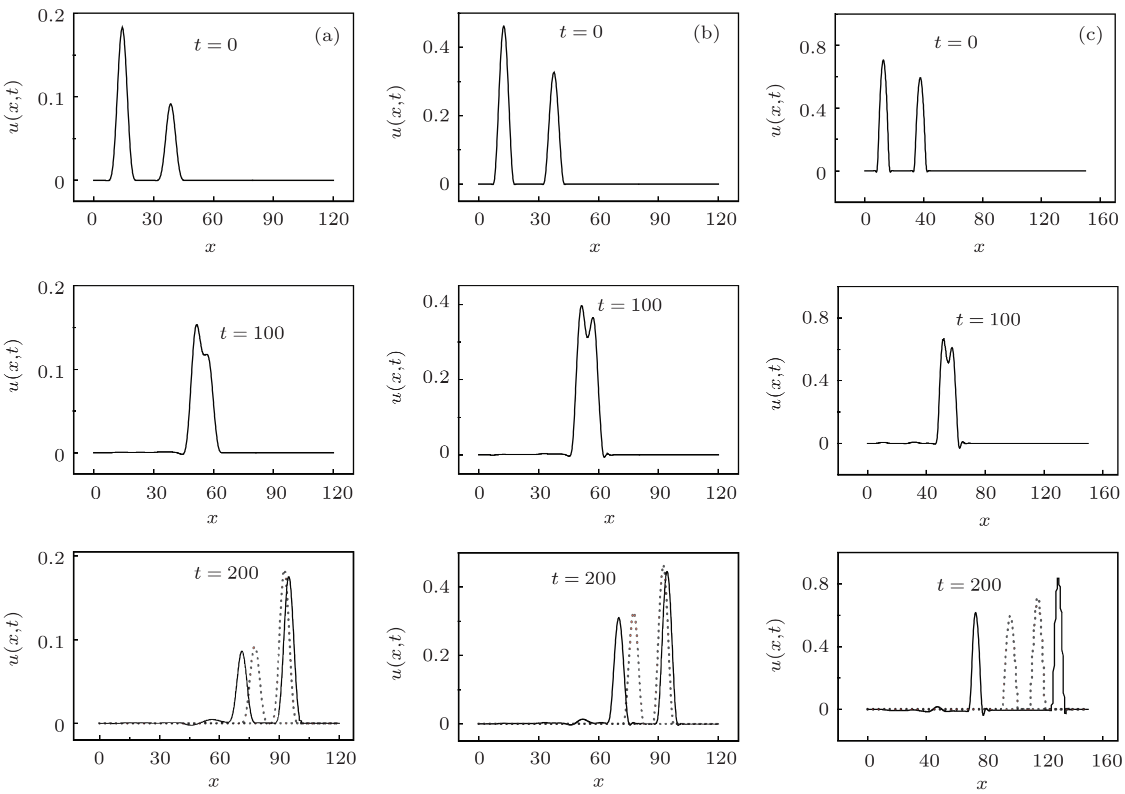

图2 双-Compacton相互作用过程的数值模拟($m=n=p$) (a) $p=2$; (b) $p=3$; (c) $p=5$; $x_{10}=3\pi$, $x_{20}=9\pi$, $v_1=0.4$, $v_2=0.2$, $\beta_1=3$, $\beta_2=3$, $\varepsilon=0.01$

4.3 三-Compacton的相互作用

下面对 $K(m,n,p)$ 方程三-Compacton 的碰撞过程进行数值模拟. 初始条件可以写为

$$u(x,0)=\sum_{j=1}^{3}u_j(x,0).$$

仍选择三个 Compacton 的初始中心位置足够远, 从而它们之间的相互作用可忽略. 在此条件下, 需调节它们之间的距离, 使得三-Compacton 能够同时发生碰撞. 图3 (a)—(c) 分别显示了 $m=n=p=2,3,5$ 时三-Compacton 相互作用过程的数值模拟, 各参数取为

$$x_{10}=4\pi, x_{20}=8\pi, x_{30}=12\pi,$$
$$v_1=0.4, v_2=0.3, v_3=0.2,$$
$$\beta_1=3, \beta_2=3, \varepsilon=0.01.$$

选择三-Compacton 的初始中心位置为: 振幅最小的位于最右边, 振幅最大的位于最左边, 另一个位于它们中间, 从而形成振幅从小到大排列的 Compacton 序列. 从图3可以看出, 经过一段时间后, 三个 Compacton 发生碰撞; 碰撞过后, 形成振幅从大到小排列的 Compacton 序列. 同时, 在碰撞过程中产生运动速度很慢且振幅很小的 Compacton-Anticompacton 对. 图中虚线表示三个 Compacton 之间若没有相互作用时在 $t=200$ 时的波形. 可以看出, 由于 Compacton 碰撞时的非线性相互作用, 使得在碰撞后它们的位相均发生了明显的变化, 但波形、振幅和速度的变化非常微弱. 这与双-Compacton 碰撞类似.

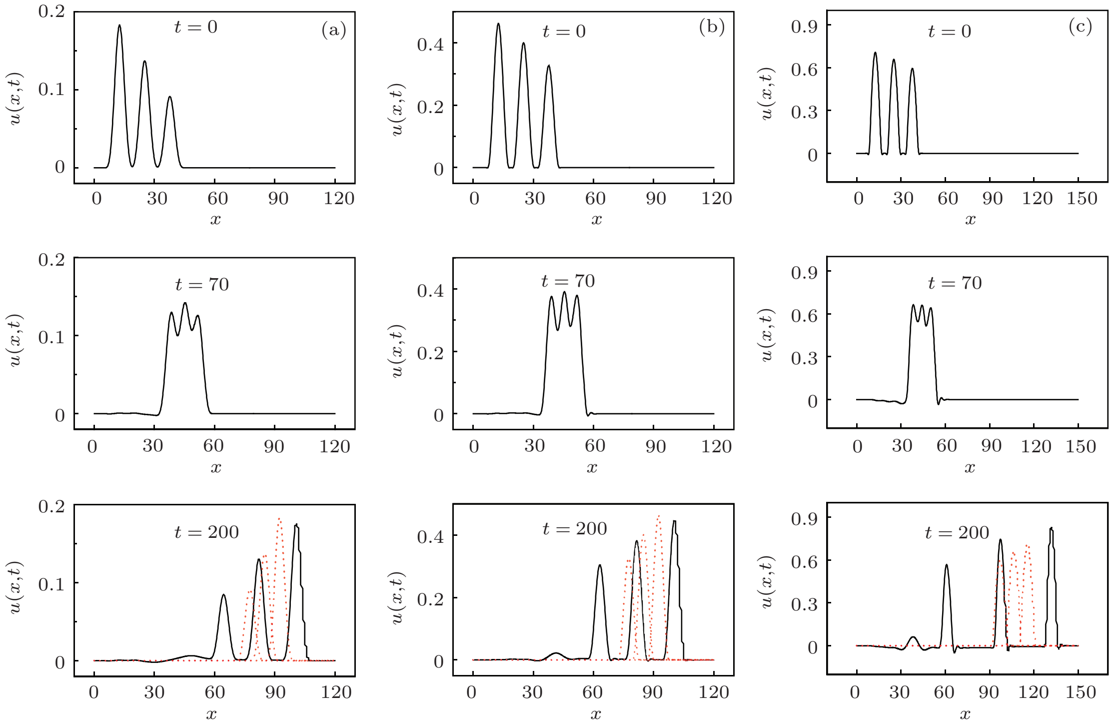

图3 三-Compacton 相互作用过程的数值模拟 ($m=n=p$) (a) $p=2$; (b) $p=3$; (c) $p=5$; $x_{10}=4\pi$, $x_{20}=8\pi$, $x_{30}=12\pi$, $v_1=0.4$, $v_2=0.3$, $v_3=0.2$, $\beta_1=3$, $\beta_2=3$, $\varepsilon=0.01$

5 结 论

对 $K(m,n,p)$ 多-Compacton 之间的相互作用进行了数值研究. 首先构造了一个二阶精度的两层隐式差分格式, 该格式在线性意义下绝对稳定, 通过添加人工耗散项有效防止了数值解的爆破现象. 然后对单个 Compacton 的长时间演化行为进行了数值模拟, 验证了数值方法的有效性. 接着对双-Compacton 和三-Compacton 的碰撞过程进行了数值研究, 发现多-Compacton 碰撞之后基本保持碰撞之前的波形和波速, 但位相产生变化且在波后产生小振幅的 Compacton-Anticompacton 对.

参考文献

[1] Abdul-Majid W 2007 *Appl. Math. Comput.* **184** 1002

[2] Li H M, Lou S Y 2002 *J. Liaoning Normal Univ.* (*Natural Science Edition*) **25** 23 (in Chinese) [李画眉,

楼森岳 2002 辽宁师范大学学报 (自然科学版) **25** 23]

[3] Yin J L, Fan Y Q, Zhang J, Tian L X 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 080201 (in Chinese) [殷久利, 樊玉琴, 张娟, 田立新 2011 物理学报 **60** 080201]

[4] Xu G Q 2013 *Chin. Phys. B* **22** 050203

[5] Wu J L, Lou S Y 2012 *Chin. Phys. B* **12** 120204

[6] Jia M, Wang J Y, Lou S Y 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 020201

[7] Lei Y, Lou S Y 2013 *Chin. Phys. Lett.* **30** 060202

[8] Yin J L, Tian L X 2003 *J. Jiangsu Univ.*（*Natural Science Edition*）**24** 9 (in Chinese) [殷久利, 田立新 2003 江苏大学学报 (自然科学版) **24** 9]

[9] Abassy T A, El-Tawil M, Kamel H 2004 *Internat. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **5** 327

[10] Cooper F, Hyman J, Khare A 2001 *Phys. Rev. E* **64** 1

[11] Wazwaz A M 2002 *Appl. Math. Comput.* **133** 213

[12] Rosenau P, Hyman J M 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 564

[13] Zhou Y B, Wang M L, Wang Y M 2003 *Phys. Lett. A* **308** 31

[14] Abbasbandy S 2007 *Phys. Lett. A* **361** 478

[15] Abassy T A, El-Tawil M A, El-Zoheiry H 2007 *Comput. Math. Appl.* **54** 940

[16] Levy D, Shu C W, Yan J 2004 *J. Comput. Phys.* **196** 751

[17] He B, Meng Q 2010 *Appl. Math. Comput.* **217** 1697

[18] Zheng C L, Chen L Q, Zhang J F 2005 *Phys. Lett. A* **340** 397

[19] Wang Y F, Lou S Y, Qian X M 2010 *Chin. Phys. B* **19** 050202

[20] Yao R X, Jiao X Y, Lou S Y 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1821

[21] Lou S Y, Ruan H Y 2001 *J. Phys. A* **34** 305

[22] Soliman A A 2006 *Chaos, Soliton. Fract.* **29** 294

[23] Ganji D D, Rafei M 2006 *Phys. Lett. A* **356** 131

[24] Abbasbandy S, Zakaria F S 2008 *Nonlinear Dyn.* **51** 83

[25] Zhang S 2007 *Phys. Lett. A* **365** 448

[26] Li X Z, Wang M L 2007 *Phys. Lett. A* **361** 115

[27] Wazwaz A M 2002 *Appl. Math. Comput.* **133** 229

[28] Rosenau P 2006 *Phys. Lett. A* **356** 44

[29] Rosenau P 1997 *Phys. Lett. A* **230** 305

[30] Dey B 1998 *Phys. Rev. E* **57** 4733

[31] Tian L X, Yin J L 2005 *Chaos, Soliton. Fract.* **23** 159

[32] Abassy T A, Zoheiry H E, El-Tawil M A 2009 *J. Comput. Appl. Math.* **232** 388

[33] Lu J F, Guan Z 2003 *Numerical Methods for Solving Partial Differential Equations* (Beijing: Tsinghua University Press) pp28–37 (in Chinese) [陆金甫, 关治 2003 偏微分方程数值解法 (北京: 清华大学出版社) 第 28—37 页]

Numerical investigation on the interaction between multi-compacton of $K(m, n, p)$ equation*

Wang Guang-Hui[1)2)] Wang Lin-Xue[1)] Wang Deng-Shan[2)] Liu Cong-Bo[1)] Shi Yu-Ren[1)†]

1) (*College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China*)

2) (*School of Applied Science, Beijing Information Science and Technology University, Beijing 100192, China*)

(Received 5 March 2014; revised manuscript received 2 April 2014)

Abstract

We numerically investigate the interaction between multi-compactons of the $K(m, n, p)$ equation by a finite difference scheme that is of the second-order accuracy and absolutely stable in linearization sense. By adding an artificial dissipation term, it works well for preventing the break-up phenomena of the numerical solutions. Firstly, we simulate the long-time evolution behaviors of the single-compacton to verify the validity of the numerical method. It is shown that the numerical method is effective for solving this problem. Secondly, we study the nonlinear interaction between two-compacton and three-compacton by this numerical method. The numerical results indicate that the wave-frame and wave-velocity after collision are nearly the same as before collision. However, compacton-anticompacton pair induced behind the wave arises with small amplitudes.

Keywords: $K(m, n, p)$ equation, compacton, finite difference scheme

PACS: 02.30.Jr, 02.60.Cb, 02.70.Bf **DOI:** 10.7498/aps.63.180206

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11047010, 11001263, 11375030), the Natural Science Foundation of Beijing, China (Grant No. 1132016), and the Star Plans for Science and Technology of Beijing, China (Grant No. Z131109000413029).

† Corresponding author. E-mail: shiyr@nwnu.edu.cn