Kerr-Newman黑洞隧穿辐射的新研究*

吴迪 朱晓丹 吴双清†

(西华师范大学物理与电子信息学院, 南充 637002)

(2014 年 4 月 20 日收到; 2014 年 5 月 15 日收到修改稿)

在文章 [吴迪等 2013 中国科学 物理学 力学 天文学 **43** 115] 中, 从有质量粒子的 Lagrangian 作用量出发, 对 Kerr 转动黑洞中类时的和类光的测地线方程给出了全新的统一推导, 结果表明对转动黑洞隧穿辐射的研究不需要局限地采用拖曳系. 这项工作完全克服了先前研究中存在的不足, 使得 Parikh-Wilczek 半经典隧穿方法更加完善和自洽. 本文将这一工作推广到转动带电黑洞情形, 对 Kerr-Newman 黑洞中有质量带电粒子测地线方程做了新的推导, 并对其隧穿辐射重新做了研究.

关键词: Kerr-Newman 黑洞, 隧穿辐射, 测地线方程

PACS: 04.70.Dy, 97.60.Lf **DOI:** 10.7498/aps.63.180401

1 引 言

大约在一百年之前, Einstein 建立了广义相对论, 首次将引力阐释为弯曲时空的几何效应, 即万有引力表现为物体在弯曲时空中做的惯性运动. 根据 Einstein 引力场方程, 人们求得了一大类描述奇特天体——黑洞的精确解. 在引力的这个经典理论中, 黑洞可以被看作是一个“一毛不拔”的吝啬鬼, 因为在它的附近, 万有引力强大得甚至连光也不能逃逸出来. 这就是最初人们对黑洞的感性认识. 但是突然性的转折发生在 1974 年, Hawking[1] 采用量子力学证明了黑洞不再是完全黑的, 通过量子隧道效应, 从其视界会发出理想的黑体热辐射, 这就是著名的 Hawking 辐射. 由于黑洞的熵等于其面积的 1/4, 而黑体辐射不携带任何信息, 当黑洞完全蒸发之后, 其全部信息会丧失掉, 这就是所谓的信息丢失佯谬. 2000 年, Parikh 和 Wilczek[2] (P-W) 采用半经典的隧穿方法研究了 Schwarzschild 黑洞中无质量粒子的 Hawking 辐射, 他们假设能量守恒定律成立和时空背景几何可以有一定的涨落, 通过计算黑洞辐射的隧穿几率给出了对 Hawking 辐射谱的修正, 证明了黑洞的辐射谱不再是纯热谱. 该项工作的重要性在于提供了一个解决信息丢失疑难问题的可能途经. 此后, 人们把 P-W 半经典隧穿方法推广到有质量粒子的 Hawking 辐射和转动黑洞情形[3−9], 对隧穿辐射做了大量的研究.

推广 P-W 半经典隧穿方法到其他的特别是转动黑洞的情形, 需要下述两个前提条件: 1) 找到用类 Painlevé 坐标表示的度规表示; 2) 求出零测地线和类时测地线方程. 在文献 [8] 中, 我们以三维 BTZ 黑洞为例讲清楚了应该如何做坐标变换得到正确的度规的类 Painlevé 坐标表示. 但是, 当人们考察转动黑洞的隧穿辐射时, 推导类光测地线似乎只有在拖曳坐标系中才能进行[4−6,8,9], 而在其他的非拖曳坐标系中似乎非常难以处理. 但是, 由于拖曳坐标变换除了在视界面上以外, 在其他的位置不是一个可积的, 这使得它是一个奇异的不可倒逆的坐标变换, 故拖曳坐标变换方法也因此受到一些学者的诟病而遭到排斥. 广义相对论的协变性原理告诉人们, 物理规律不应该依赖于坐标系的具体选择. 基于此原理, 人们完全有理由可以相信对转动

∗ 国家自然科学基金 (批准号: 10675051, 10975058, 11275157) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: sqwu@cwnu.edu.cn

 http://wulixb.iphy.ac.cn

黑洞隧穿辐射的研究不应该仅仅局限于拖曳坐标系, 在其他更一般的非拖曳坐标系中完全应该得到相同的结论. 这是当时对转动黑洞隧穿的研究存在不足的一个重要方面.

另一方面, 当人们研究有质量粒子的隧穿辐射时, 需要求得粒子的测地线方程. 众所周知, 对无质量粒子的测地线, 可以利用线元 $\mathrm{d}s^2 = 0$ (类光) 来推导其满足的运动方程, 这等价于利用光子的4-速度为零这个条件. 而对于有质量粒子的测地线, Zhang 和 Zhao[4−6] 首先建议利用群速度和相速度的关系 $v_\mathrm{p} = \dfrac{1}{2}v_\mathrm{g}$ 来推导其测地线. 随后在其他许多工作和我们先前的工作[8,9] 中也沿用了他们的方法. 然而, 我们知道, 无论是类光测地线还是类时测地线方程都可以利用最小作用量原理从 Lagrangian 作用量中通过变分得到[10]. 所以, 先前对有质量粒子测地线的推导方法是与作用量变分原理相悖的, 显得十分勉强. 对两类粒子的测地线方程, 应该采用相同的推导方法来做统一的处理. 这是对有质量粒子的隧穿辐射研究存在不足的另一个方面.

综上所述, 在先前几乎所有涉及有质量粒子和/或转动黑洞中粒子的 Hawking 辐射研究工作中, 对其隧穿辐射的处理存在两个重要的缺陷: 1) 与无质量粒子的情形不同的是, 人们对有质量粒子的测地线方程采用了不同的、而且非常牵强的推导方法; 2) 对转动黑洞的隧穿辐射处理需要在拖曳坐标系中进行分析. 在撰写论文[8,9] 时, 吴双清就对这两点感到十分勉强, 希望能用一个统一的方法来推导两类粒子的测地线方程, 而且也能同时克服只能使用拖曳坐标系的这一局限性. 这个想法在 2008 年得到实现, 具体体现在我们最近发表的论文[11] 中. 在我们的工作发表之前, 文献 [12—14] 也采用了同样的思想, 不过那些工作仅考虑了静态球对称情形, 而我们的工作更具有普遍性. 在文献 [11] 中, 我们以 Kerr 黑洞为代表性的例子, 采用 Lagrange 力学中的分析方法对有质量粒子和无质量粒子的测地线运动方程在拖曳坐标系和一般的非拖曳系中做统一的推导, 然后对 Kerr 黑洞的隧穿辐射在拖曳坐标系中重新做了进一步的研究. 该工作同时克服了先前同类工作中的两个最大缺陷. 研究结果表明, 对转动黑洞隧穿辐射的研究完全不需要局限在拖曳系中, 这使得 P-W 方法更加自洽和完善, 是对该理论的一个新的重要发展.

本文将上述工作推广到转动带电 Kerr-Newman (K-N) 黑洞中有质量带电粒子的隧穿辐射情形, 采用 Lagrange 力学中的变分法在一般的坐标系中重新推导出了有质量带电粒子的测地线方程, 并在考虑了自引力修正和电磁相互作用的条件下, 在一般的非拖曳坐标系中给出了 Hawking 辐射的隧穿几率. 这项工作是对我们先前所做的研究[8,9] 的重要改进.

在第 2 节中, 我们利用 3 个守恒的积分运动常数在一般的坐标系中从经典作用量中推导出有质量带电粒子的测地线方程; 第 3 节采用 P-W 的半经典隧穿方法, 在考虑了能量守恒、角动量守恒和电荷守恒的条件下在一般的非拖曳坐标系中重新探讨了 K-N 黑洞中有质量带电粒子的隧穿辐射, 给出了 Hawking 辐射的隧穿几率.

2 有质量粒子的测地线运动方程

在这一小节, 我们采用分析力学中的最小作用量原理推导出带电有质量粒子的测地线方程. 在转动带电的 K-N 黑洞中, 无论是类时的还是类光的测地线至少存在 3 个守恒的第一积分常数[10], 即与两个 Killing 矢量 ∂_t 和 ∂_ϕ 分别对应的能量 E 和角动量 L 以及哈密顿 $H = \dfrac{1}{2}mg_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$. 因为这 3 个守恒的积分常数完全可以确定经典粒子的运动方程, 所以我们只需采用变分法从 Lagrangian 作用量中导出这 3 个守恒的积分常数, 然后利用它们推导出类时的测地线方程即可. 其中, Hamiltonian 量为一守恒量 $H = -mk/2$, 它等价于类时测地线的 4-速度归一化条件.

下面我们在一般的坐标系中推导出转动带电 K-N 黑洞中有质量带电粒子的测地线方程. 文献 [8] 给出了用类 Painlevé 坐标表示的 K-N 黑洞线元的一个新形式:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = &- \mathrm{d}t^2 + \Bigg[\sqrt{\frac{\varSigma}{r^2+a^2}}\mathrm{d}r + \sqrt{\frac{r^2+a^2-\varDelta}{\varSigma}}\\ &\times(\mathrm{d}t - a\sin^2\theta\mathrm{d}\phi)\Bigg]^2 + \varSigma\mathrm{d}\theta^2\\ &+ (r^2+a^2)\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2, \end{aligned} \tag{1}$$

$$A = \frac{Qr}{\varSigma}(\mathrm{d}t - a\sin^2\theta\mathrm{d}\phi), \tag{2}$$

式中, $\varDelta = r^2 + a^2 - 2Mr + Q^2$, $\varSigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$.

在此坐标系中, 我们考虑静止质量为m和带电荷为q的检测粒子的经典作用量[10]

$$\begin{aligned} L =& \frac{m}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + qA_\mu\dot{x}^\mu \\ =& \frac{m}{2}\bigg\{-\dot{t}^2+\Sigma\dot{\theta}^2+(r^2+a^2)\sin^2\theta\dot{\phi}^2 \\ &+\bigg[\sqrt{\frac{r^2+a^2-\Delta}{\Sigma}}(\dot{t}-a\sin^2\theta\dot{\phi}) \\ &+\dot{r}\sqrt{\frac{\Sigma}{r^2+a^2}}\bigg]^2\bigg\} \\ &+\frac{qQr}{\Sigma}(\dot{t}-a\sin^2\theta\dot{\phi}), \end{aligned} \tag{3}$$

由此可求得粒子的广义动量为

$$\begin{aligned} P_t =& \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} \\ =& m\bigg[-\dot{t}+\dot{r}\sqrt{\frac{r^2+a^2-\Delta}{r^2+a^2}} \\ &+\frac{r^2+a^2-\Delta}{\Sigma}(\dot{t}-a\sin^2\theta\dot{\phi})\bigg]+\frac{qQr}{\Sigma} \\ \equiv& E, \\ P_\phi =& \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} \\ =& m\sin^2\theta\bigg[(r^2+a^2)\dot{\phi}-a\dot{r}\sqrt{\frac{r^2+a^2-\Delta}{r^2+a^2}} \\ &-\frac{r^2+a^2-\Delta}{\Sigma}a(\dot{t}-a\sin^2\theta\dot{\phi})\bigg] \\ &-\frac{qQr}{\Sigma}a\sin^2\theta \\ \equiv& L, \\ P_r =& \frac{\partial L}{\partial\dot{r}} = m\bigg[\sqrt{\frac{r^2+a^2-\Delta}{r^2+a^2}}(\dot{t}-a\sin^2\theta\dot{\phi}) \\ &+\frac{\Sigma}{r^2+a^2}\dot{r}\bigg], \\ P_\theta =& \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = m\Sigma\dot{\theta}. \end{aligned}$$

经过Legendre变换, 可得到有质量带电粒子的Hamiltonian为

$$\begin{aligned} \tilde{H} =& \dot{t}P_t+\dot{r}P_r+\dot{\theta}P_\theta+\dot{\phi}P_\phi-L \\ =& \frac{1}{2}mg_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \\ =& \frac{m}{2}\bigg\{-\dot{t}^2+\Sigma\dot{\theta}^2+(r^2+a^2)\sin^2\theta\dot{\phi}^2 \\ &+\bigg[\sqrt{\frac{r^2+a^2-\Delta}{\Sigma}}(\dot{t}-a\sin^2\theta\dot{\phi}) \\ &+\dot{r}\sqrt{\frac{\Sigma}{r^2+a^2}}\bigg]^2\bigg\}. \end{aligned} \tag{4}$$

在带电粒子的作用量(3)式中, 与两个循环坐标t和ϕ对应的广义动量$P_t = E$ 和$P_\phi = L$为两个守恒的积分常数. 此外, Hamiltonian也应该是一个运动常数$H = -mk/2$, 此即类时测地线的4-速度归一化条件. 由这3个积分常数我们可得到如下决定有质量带电粒子的测地线的三个方程:

$$\begin{aligned} &-\dot{t}+\frac{r^2+a^2-\Delta}{\Sigma}(\dot{t}-a\sin^2\theta\dot{\phi}) \\ &+\dot{r}\sqrt{\frac{r^2+a^2-\Delta}{r^2+a^2}} = \frac{1}{m}\Big(E-\frac{qQr}{\Sigma}\Big), \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &(r^2+a^2)\sin^2\theta\dot{\phi}-a\sin^2\theta\bigg[\dot{r}\sqrt{\frac{r^2+a^2-\Delta}{r^2+a^2}} \\ &+\frac{r^2+a^2-\Delta}{\Sigma}(\dot{t}-a\sin^2\theta\dot{\phi})\bigg] \\ =& \frac{1}{m}\Big(L+\frac{qQr}{\Sigma}a\sin^2\theta\Big), \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &-\dot{t}^2+\bigg[\sqrt{\frac{r^2+a^2-\Delta}{\Sigma}}(\dot{t}-a\sin^2\theta\dot{\phi}) \\ &+\dot{r}\sqrt{\frac{\Sigma}{r^2+a^2}}\bigg]^2+(r^2+a^2)\sin^2\theta\dot{\phi}^2 \\ =& -k-\frac{P_\theta^2}{m^2\Sigma}. \end{aligned} \tag{7}$$

联立这三个方程, 经过一些代数处理后, 对有质量带电粒子的测地线可求出广义速度:

$$\dot{r} = \pm\frac{\sqrt{W}}{m\Sigma}, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \dot{t} =& \frac{1}{m\Sigma\Delta}\Big\{-(r^2+a^2)[(r^2+a^2)E+aL \\ &-qQr]+a\Delta(L+Ea\sin^2\theta) \\ &\pm\sqrt{(r^2+a^2-\Delta)(r^2+a^2)W}\Big\}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi} =& \frac{1}{m\Sigma\Delta}\Big\{-a[(r^2+a^2)E+aL-qQr] \\ &+\frac{\Delta}{\sin^2\theta}(L+Ea\sin^2\theta) \\ &\pm a\sqrt{\frac{r^2+a^2-\Delta}{r^2+a^2}W}\Big\}, \end{aligned} \tag{10}$$

式中,

$$\begin{aligned} W =& [(r^2+a^2)E+aL-qQr]^2-\frac{\Delta}{\sin^2\theta}(L \\ &+Ea\sin^2\theta)^2-\Delta\big(m^2k\Sigma+P_\theta^2\big). \end{aligned}$$

由(8)—(10)式, 可得出有质量带电粒子的测地线方程为

$$\begin{aligned}\bar{r} &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{r}}{\dot{t}} \\ &= \Delta\left\{\sqrt{(r^2+a^2)(r^2+a^2-\Delta)} \pm \frac{-(r^2+a^2)[(r^2+a^2)E+aL-qQr]+a\Delta(L+Ea\sin^2\theta)}{\sqrt{W}}\right\}^{-1},\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}\bar{\phi} &= \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{t}} \\ &= \frac{-a[(r^2+a^2)E+aL-qQr]+\dfrac{\Delta}{\sin^2\theta}(L+Ea\sin^2\theta)\pm a\sqrt{\dfrac{r^2+a^2-\Delta}{r^2+a^2}W}}{-(r^2+a^2)[(r^2+a^2)E+aL-qQr]+a\Delta(L+Ea\sin^2\theta)\pm\sqrt{(r^2+a^2)(r^2+a^2-\Delta)W}},\end{aligned}\tag{12}$$

其中, $\mp$ 号分别代表事件视界处出射和入射测地线.

当考察Hawking辐射时, 我们需要知道粒子在事件视界附近的渐近行为. 由(11), (12)式可知, 出射粒子的测地线在K-N黑洞外视界附近的渐近行为如下:

$$\begin{aligned}\bar{r} &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \xrightarrow{r\to r_+} \frac{(r_+-r_-)(r-r_+)}{2(r_+^2+a^2)} \\ &= \kappa(r-r_+),\end{aligned}\tag{13}$$

$$\bar{\phi} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \xrightarrow{r\to r_+} \frac{a}{r_+^2+a^2} = \Omega,\tag{14}$$

其中, $\kappa = \dfrac{r_+-r_-}{2(r_+^2+a^2)}$ 为外视界处的表面引力, 而视界角速度和静电势则分别为

$$\Omega = \frac{a}{r_+^2+a^2}, \quad \Phi = \frac{Qr_+}{r_+^2+a^2}.$$

3 事件视界处粒子的隧穿几率

黑洞的Hawking辐射是发生在事件视界面附近的量子隧穿效应. 如果在黑洞视界附近产生了一对虚的正反粒子, 其中带负电的负能粒子被黑洞吸收, 而带正电的正能粒子则逃逸到无穷远处. 按照隧穿图像, 这等价于一个带正电的正能粒子通过隧道效应穿出黑洞的外视界逃到无穷远处. 当带电粒子隧穿出去时, 将会引起黑洞质量、电荷和角动量减少, 同时黑洞的视界面发生收缩, 收缩前后的视界分别为 r_i 和 r_f, 此两点在Parikh和Wilczek[3]看来即为隧穿势垒的两个转折点. 当考虑到带电粒子之间的自引力和电磁相互作用时, 在满足能量守恒、角动量守恒和电荷守恒的条件下, 我们认为时空的总能量、电荷和比角动量 $(a=J/M)$ 可以保持不变而允许黑洞质量和电荷发生微小的涨落. 当黑洞辐射掉能量为 ω 和电荷为 q 的带电粒子后, 其时空线元和电磁4-矢势变为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\hat{s}^2 = &-\mathrm{d}t^2+\Sigma\mathrm{d}\theta^2+(r^2+a^2)\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2 \\ &+\left[\sqrt{\frac{r^2+a^2-\Delta'}{\Sigma}}(\mathrm{d}t-a\sin^2\theta\mathrm{d}\phi)\right. \\ &\left.+\sqrt{\frac{\Sigma}{r^2+a^2}}\mathrm{d}r\right]^2,\end{aligned}\tag{15}$$

$$\hat{A} = \frac{(Q-q)r}{\Sigma}(\mathrm{d}t-a\sin^2\theta\mathrm{d}\phi),\tag{16}$$

式中, $\Delta' = r^2+a^2-2(M-\omega)r+(Q-q)^2$.

当能量为 ω 和电荷为 q 的带电粒子通过隧道效应穿出视界出射后, 黑洞的质量、角动量和电荷分别变为 $(M-\omega)$, $(M-\omega)a$ 和 $Q-q$, 黑洞收缩前后的视界分别为

$$\begin{aligned}r_i &= M+\sqrt{M^2-Q^2-a^2} \\ r_f &= M-\omega+\sqrt{(M-\omega)^2-(Q-q)^2-a^2}.\end{aligned}$$

带电粒子的隧穿几率与它穿越势垒的作用量满足关系

$$\Gamma \sim \mathrm{e}^{-2\mathrm{Im}S}.\tag{17}$$

将Hamilton正则运动方程

$$\begin{cases}\bar{r} = \left.\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}P_r}\right|_{(r;\phi,P_\phi,A_t,P_{A_t})} = \dfrac{\mathrm{d}(M-\omega)}{\mathrm{d}P_r} \\ \bar{\phi} = \left.\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}P_\phi}\right|_{(\phi;r,P_r,A_t,P_{A_t})} = a\Omega\dfrac{\mathrm{d}(M-\omega)}{\mathrm{d}P_\phi} \\ \bar{A}_t = \left.\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}P_{A_t}}\right|_{(A_t;r,P_r,\phi,P_\phi)} = \Phi\dfrac{\mathrm{d}(Q-q)}{\mathrm{d}P_{A_t}}\end{cases},\tag{18}$$

代入带电粒子的作用量[9]

$$\begin{aligned}S &= \int_{t_i}^{t_f}(P_r\bar{r}-P_\phi\bar{\phi}-P_{A_t}\bar{A}_t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{r_i}^{r_f}\left[\int_{(0,0,0)}^{(P_r,P_\phi,P_{A_t})}(\bar{r}\mathrm{d}P'_r-\bar{\phi}\mathrm{d}P'_\phi\right. \\ &\quad\left.-\bar{A}_t\mathrm{d}P'_{A_t})\right]\frac{\mathrm{d}r}{\bar{r}},\end{aligned}\tag{19}$$

可以得到

$$\mathrm{Im}S=\mathrm{Im}\int_{r_i}^{r_f}\int_{(M,Q)}^{(M-\omega,Q-q)}[(1-a\varOmega')\mathrm{d}(M-\omega') - \varPhi'\mathrm{d}(Q-q')]\frac{\mathrm{d}r}{\bar{r}}. \tag{20}$$

为了完成上述积分, 需要利用外视界附近出射粒子的径向测地线方程的渐近行为

$$\bar{r}\approx\kappa'(r-r_+),\quad \kappa'=\frac{r'_+-r'_-}{2(r'^2_++a^2)}, \tag{21}$$

以及外视界处的角速度和静电势

$$\varOmega'_+=\frac{a}{r'^2_++a^2},\quad \varPhi'_+=\frac{(Q-q')r'_+}{r'^2_++a^2}, \tag{22}$$

其中,

$$r'_\pm=M-\omega'\pm\sqrt{(M-\omega')^2-(Q-q')^2-a^2}.$$

可以证明, 黑洞熵 $S'=\pi(r'^2_++a^2)$ 满足下述热力学第一定律的微分形式

$$\mathrm{d}(M-\omega')=\frac{\kappa'}{2\pi}\mathrm{d}S'+a\varOmega'_+\mathrm{d}(M-\omega') + \varPhi'_+\mathrm{d}(Q-q'). \tag{23}$$

利用此等式容易完成积分 (20) 式, 并得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}S &\approx \mathrm{Im}\int_{r_i}^{r_f}\int_{(M,Q)}^{(M-\omega,Q-q)}\frac{1}{\kappa'(r-r'_+)}\big[\mathrm{d}(M-\omega') - a\varOmega'_+\mathrm{d}(M-\omega')-\varPhi'_+\mathrm{d}(Q-q')\big]\mathrm{d}r\\ &=-\frac{1}{2}\int_{S_{\mathrm{BH}}(M,Q)}^{S_{\mathrm{BH}}(M-\omega,Q-q)}\mathrm{d}S'\\ &=-\frac{1}{2}\Delta S_{\mathrm{BH}}=\frac{\pi}{2}(r_i^2-r_f^2).\end{aligned} \tag{24}$$

因而, 有质量的带电粒子穿越势垒的隧穿几率为

$$\varGamma\sim\mathrm{e}^{-2\mathrm{Im}S}=\mathrm{e}^{\pi(r_f^2-r_i^2)}=\mathrm{e}^{\Delta S_{\mathrm{BH}}}, \tag{25}$$

其中,

$$\begin{aligned}\Delta S_{\mathrm{BH}}&=S_{\mathrm{BH}}(M-\omega,Q-q)-S_{\mathrm{BH}}(M,Q)\\&=\pi(r_f^2-r_i^2)\end{aligned}$$

为K-N黑洞在辐射带电粒子前后的熵差. 此结果与文献 [9] 所得的结论完全一致.

4 结 论

本文采用Lagrange力学中的变分法在一般的非拖曳坐标系中对K-N黑洞中有质量带电粒子的测地线运动方程做了全新的推导. 然后采用P-W的半经典隧穿方法重新讨论了K-N黑洞中有质量带电粒子的隧穿辐射, 给出了Hawking辐射的隧穿几率. 研究结果表明, 对转动黑洞的隧穿辐射处理完全可以在一般的坐标系中进行分析. 需要指出的是, 本文建议的方法可以普遍地适用于任何种类黑洞中类时的和类光的测地线方程的推导和对隧穿辐射的研究. 这是对先前的相关工作的显著改进, 它克服了先前工作中的缺陷, 使得P-W方法更加完善和自洽, 是对隧穿辐射研究的一个重要发展.

参考文献

[1] Hawking S W 1975 *Commun. Math. Phys.* **43** 199

[2] Parikh M K, Wilczek F 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 5042

[3] Zhang J Y, Zhao Z 2005 *J. High Energy Phys.* **0510** 055

[4] Zhang J Y, Zhao Z 2005 *Mod. Phys. Lett. A* **20** 1673

[5] Zhang J Y, Zhao Z 2005 *Phys. Lett. B* **618** 14

[6] Zhang J Y, Zhao Z 2006 *Phys. Lett. B* **638** 110

[7] Wu S Q, Jiang Q Q 2006 *J. High Energy Phys.* **0603** 079

[8] Jiang Q Q, Wu S Q, Cai X 2006 *Phys. Rev. D* **73** 064003

[9] Jiang Q Q, Wu S Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4428 (in Chinese) [蒋青权, 吴双清 2006 物理学报 **55** 4428]

[10] Chandrasekhar S 1992 *The Mathematical Theory of Black Holes* (Oxford: Oxford University Press)

[11] Wu D, Jiang Q Q, Wu S Q, Zhang L, Zhang L M 2013 *Sci. Sin. Phys. Mech. Astron.* **43** 115 (in Chinese) [吴迪, 蒋青权, 吴双清, 张蕾, 张礼梅 2013 中国科学 物理学 力学 天文学 **43** 115]

[12] Fang H Z 2010 *Chin. Phys. B* **19** 110404

[13] Miao Y G, Xue Z, Zhang S J 2011 *Europhys. Lett.* **96** 10008

[14] Miao Y G, Xue Z, Zhang S J 2012 *Gen. Rel. Grav.* **44** 555

物理学报 Acta Phys. Sin. Vol. 63, No. 18 (2014) 180401

New studies of tunneling radiation from Kerr-Newman black holes*

Wu Di Zhu Xiao-Dan Wu Shuang-Qing†

(*College of Physics and Electric Information, China West Normal University, Nanchong 637002, China*)

(Received 20 April 2014; revised manuscript received 15 May 2014)

Abstract

In the paper [Wu D *et al*. Sci. Sin. Phys. Mech. Astron. **43** 115], starting from the action of a massive particle's Lagrangian, we have made a new, unified derivation of the timelike and null geodesics of a rotating Kerr black hole. Our results demonstrate that one need not constrain himself to adopt the dragging coordinate system to investigate the tunneling radiation of rotating black holes. That work completely overcomes all shortcomings existing in the previous related researches, thus making Parikh-Wilczek's semi-classical approach more perfect and consistent. In this paper, we extend that work to the case of a rotating charged black hole to present a new derivation of the geodesic equation of a massive charged particle in the Kerr-Newman black hole and to reinvestigate its tunneling radiation.

Keywords: Kerr-Newman black hole, tunnelling radiation, geodesic equation

PACS: 04.70.Dy, 97.60.Lf **DOI:** 10.7498/aps.63.180401

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10675051, 10975058, 11275157).

† Corresponding author. E-mail: sqwu@cwnu.edu.cn