

慢变控制下Chen系统的复杂行为及其机理*

张晓芳[†] 韩清振 陈小可 毕勤胜

(江苏大学土木工程与力学学院, 镇江 212013)

(2014年5月4日收到; 2014年5月22日收到修改稿)

由于Chen系统的控制分析大都是基于同一时间尺度, 而两时间尺度耦合问题的相关研究基本上局限于单维慢变量情形. 本文探讨了基于慢时间尺度上的Duffing振子, 即含有两维慢子系统控制下Chen系统的动力学演化过程. 给出了诸如对称式fold/fold、对称式fold/Hopf、对称式homoclinic/homoclinic等不同形式的簇发振荡行为, 并揭示了其相应的产生机制, 指出慢子系统中两维慢变量的相互影响导致系统产生了类似于周期激励下的簇发行为.

关键词: Chen系统, 簇发, 分岔, 快慢效应

PACS: 05.45.-a, 05.45.Pq

DOI: 10.7498/aps.63.180503

1 引言

自Lorenz系统中的混沌现象被揭示以来, 非线性动力学理论得到了蓬勃发展, 各种混沌系统如Rossler振子、蔡氏电路等纷纷被建立起来, 其中Chen系统由于其混沌吸引子的特殊结构吸引了各国学者的研究兴趣, 围绕该系统开展了大量诸如控制、保密通信等相关工作^[1,2], 但这些工作大都基于同一时间尺度. 而在实际工程系统中存在着大量不同时间尺度耦合问题, 如化工系统^[3]、生态环境^[4]等, 不同时间尺度耦合系统常常表现为大幅振荡和微幅振荡的耦合, 即所谓的张弛振荡^[5]. 虽然在实际工程系统中发现了大量的这种振荡模式, 开始并没有引起太多的关注, 直到诺贝尔奖获得者Hodgkin和Huxley^[6]建立了两时间尺度神经元模型, 成功地阐明了神经动作电位产生的机制, 不同时间耦合的问题才引起了国内外的广泛关注.

如何处理不同尺度耦合系统的复杂行为一直是困扰国内外学者的难题之一. 起初, 人们通过引入准静态解将不同尺度系统约化到同一尺度上^[7], 或通过奇异摄动法给出其相应的近似解^[8],

更普遍的则是采用数值仿真^[9], 只是这些方法都无法解决不同时间尺度的相互作用. 直到Rinzel引入了快慢分析法, 不同时间尺度之间的相互作用及所导致的各种簇发振荡才得到较好的处理, 并引发了大量的有关簇发振荡及其机理的研究. 如Han等^[10]通过快慢分析法研究了两个时间尺度超混沌Lorenz系统的焦-焦型簇发; Shi等^[11]研究了分数阶Morris-Lecar (M-L)模型的簇发振荡, 其中包含多种整数阶M-L模型所不具有的簇发形式; Wang等^[12]通过引入有限时滞研究了簇发同步问题; Lü等^[13]通过引入参数研究了神经网络中的短簇发现象. 特别地, Izhikevich从余维的角度给出了单慢变量余维一分岔下的各种簇发振荡现象. 但这些工作大都是围绕单一慢变量开展的, 其相应的分岔机制也相对简单.

本文考虑两时间尺度下两维Duffing振子控制的Chen系统的复杂动力学行为. 在分析了快子系统, 即Chen系统随慢变量变化的分岔行为的基础上, 给出了受控系统随参数变化产生的各种簇发振荡行为, 并揭示了其相应的产生机制, 探讨了Duffing振子中两个慢变量对系统行为的共同影响.

* 国家自然科学基金(批准号: 21276115)资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: xfzhang@ujs.edu.cn

该模型结构相对简单, 两个子系统的动力学行为清晰, 基于不同时间尺度考察其耦合下的相应的动力特征, 不仅具有典型意义, 同时也是由单慢变量向多慢变量的一个探索.

2 两时间尺度耦合数学模型

围绕Chen系统的行为及其控制, 已有大量的工作见诸报道, 其中较为普遍的方法是主动控制模式^[14]. 在此考虑由Duffing振子主动控制下的Chen系统, 其相应的数学模型可以表示为

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) + ku \\ \dot{y} = (c - a)x - xz + cy \\ \dot{z} = xy - bz \\ \dot{u} = \xi_1 v \\ \dot{v} = \xi_2(-\mu v + \alpha u - \beta u^3 + kx) \end{cases} \quad (1)$$

为考虑不同时间尺度效应, 令 $0 < \xi_1 \ll 1$, $0 < \xi_2 \ll 1$, 也即 u, v 为慢变量, 因而整个系统可以看作快慢两子系统的耦合, 其中快子系统可以表示为

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) + ku \\ \dot{y} = (c - a)x - xz + cy \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (2)$$

而慢子系统则为

$$\begin{cases} \dot{u} = \xi_1 v \\ \dot{v} = \xi_2(-\mu v + \alpha u - \beta u^3 + kx) \end{cases} \quad (3)$$

当 $k = 0$ 时, 快子系统为经典的Chen系统. 若参数 $b(2c - a) > 0$, Chen系统存在三个平衡点, 分别表示为 $E_{10}(0, 0, 0)$ 和 $E_{1\pm}(\pm\sqrt{(2c - a)b}, \pm\sqrt{(2c - a)b}, 2c - a)$. 当 $a = 35, b = 28, c = 22$ 时, 其相应的相轨迹如图1所示. 而当 $k = 0$ 时, 慢子系统为具有负刚度的Duffing振子. 若 $\sqrt{\alpha/\beta} > 0$, Duffing系统存在三个平衡点 $E_{20}(0, 0)$ 和 $E_{2\pm}(\pm\sqrt{\alpha/\beta}, 0)$. 当 $\xi_1 = 0.01, \xi_2 = 0.001, \mu = 100, \alpha = 2.0, \beta = 1.0$ 时其相应的相轨迹如图2所示.

3 快子系统的分岔分析

由于在快子系统(2)中 u 与 x, y, z 相比为变化缓慢的量, 相差至少一个数量级, 当 $t = t_0$ 时 u 为一

个确定的值, 故可以将 u 作为快子系统的分岔参数来分析.

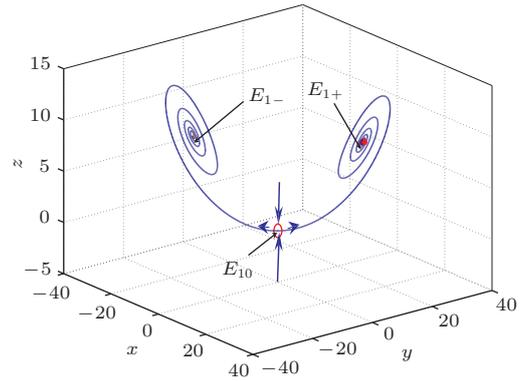


图1 Chen系统相图

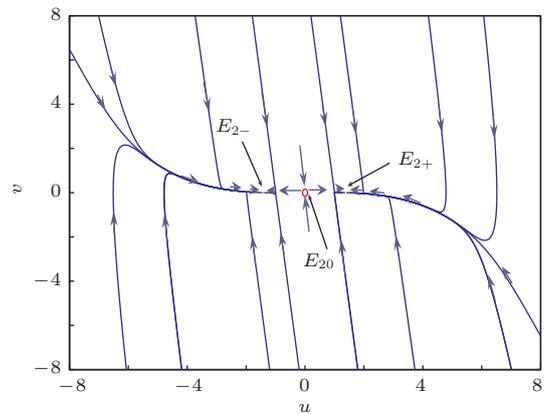


图2 Duffing系统相图

快子系统平衡点用 $E(x_0, y_0, z_0)$ 表示, 其中

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{ay_0 + ku}{a}, \\ z_0 &= \frac{(ay_0 + ku)y_0}{ba}, \end{aligned}$$

而 y_0 满足

$$\frac{(c - a)(ay_0 + ku)}{a} - \frac{(ay_0 + ku)^2 y_0}{a^2 b} + cy_0 = 0.$$

平衡点的失稳可以得到可能存在的折叠分岔集LP和Hopf分岔集H, 折叠分岔集LP可以表示为

$$\begin{aligned} & \frac{3a^3 k^2 u^2 b^2 (a + 7c)^2}{4(6a^2 bc + k^2 u^2 - 3a^3 b)^2} \\ & - \frac{k^2 u^2 ab(a + 7c)}{6a^2 bc + k^2 u^2 - 3a^3 b} + a^2 b - 2abc \\ & = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Hopf分岔集H可以表示为

$$-\frac{m^3}{b} + \frac{kum^2}{ab} + \frac{2c - a}{m} - ck u/a = 0, \quad (5)$$

其中 $m = m_1/m_2$,

$$\begin{aligned}
 m_1 &= aku(-ab^2c - 3a^2bc + 3abc^2 \\
 &\quad + 4b^2c^2 - 5b^3c + a^3c - 2a^2c^2 \\
 &\quad + ac^3 + a^2b^2 + ab^3 + b^4), \\
 m_2 &= 2a^3b^2c + 3a^2b^3c^2 - 4a^2b^3c - 5a^4bc \\
 &\quad + 2a^3bc^2 + ab^2c^3 - 2ab^3c^2 + a^2bc^3 \\
 &\quad - 2a^4b^2 + 2a^5b + 2a^3b^3 + ab^4c \\
 &\quad - ack^2u^2 + abk^2u^2 + c^2k^2u^2 - b^2k^2u^2.
 \end{aligned}$$

取定 $a = 35, c = 22, k = 100$, 将 u, b 作为分岔参数做出 u - b 平面上的分岔集, 见图 3, 它将参数平面划分成 8 个区域, 每个区域对应着系统不同形式的解.

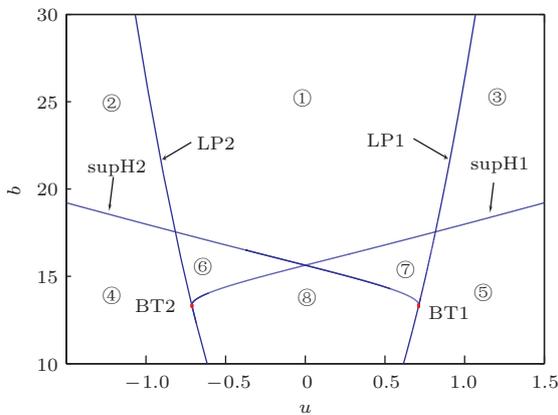


图 3 u - b 平面上的分岔集, BT1 和 BT2 为 Bogdana-Takens 分岔点

通过数值计算, 图 3 区域①中存在两个稳定的平衡点 E_{\pm} 和一个不稳定的平衡点 E_0 . 当参数穿过 fold 分岔线进入区域②和③时, 平衡点数目减少, 各存在一个稳定的平衡点; 当参数穿越 Hopf 进入区域④和⑤后, 此平衡点失稳, 分岔产生出一个稳定的极限环; 当经过 fold 分岔线进入区域⑥和⑦后, 极限环仍然存在, 平衡点由一个不稳定的平衡点增加到三个平衡点, 其中一个稳定两个不稳定; 而当参数再由 Hopf 分岔线进入区域⑧时, 其中的稳定平衡点失稳, 分岔产生出另一个稳定的极限环, 区域⑧中有三个不稳定的平衡点, 围绕 E_{\pm} 存在两个稳定的极限环.

4 快慢效应分析

取定参数 $a = 35, c = 22, k = 100, \xi_1 = 0.01, \xi_2 = 0.001, \mu = 100, \alpha = 2.0, \beta = 1.0$, 将参数 b 作

为控制参数, 讨论系统 (2) 随其变化时簇发类型的变化.

4.1 对称式 fold/fold 簇发

控制参数取 $b = 28.0$, 做出快子系统平衡点随参数 u 的变化曲线 (图 4), 图中虚线代表不稳定的平衡点, 实线代表稳定的平衡点. 当 $u < -1.031755$ 时, E_+ 为一个稳定平衡点, 在 $[-1.031755, 1.031755]$ 内系统存在两个稳定的平衡点 E_+, E_- 和一个不稳定的平衡点 E_0 ; $u > 1.031755$ 时, 系统存在一个稳定平衡点 E_- , 图中 LP1, LP2 表示 fold 分岔点, 对应的分岔参数为 $u = \pm 1.031755$.

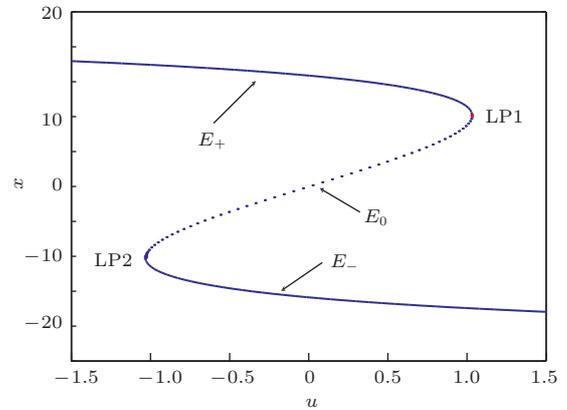


图 4 $b = 28.0$ 时快子系统平衡点分岔曲线

由时间历程图 5 可以明显地观察到簇发现象. 为了分析系统的簇发机制, 将快子系统平衡点曲线与受控系统 u - x 平面内的相轨迹进行叠加 (图 6). 假设系统轨迹从上半支的 A 点 ($u = 0$) 出发, 结合时间历程图 5 可以发现系统轨迹将向右运动. 随着慢变量 u 的变化, 在 LP1 处快子系统发生 fold 分岔导致平衡点 E_+ 失稳, 快子系统只存在一个稳定的平衡点 E_- . 受 E_- 吸引系统轨迹跳到平衡点曲线下半支的 B 点处. 和单一慢变量的快慢系统不同, Chen 系统由于受到慢变的 Duffing 振子振荡特性的控制, 轨迹没有回头而是继续向右运动. 这种现象类似于慢周期激励下产生的簇发振荡 [15], 我们可以从 u 和 v 的时间历程图 7 来进一步分析其产生的原因. 从图 7 不难发现, 在 B, C 点之间的慢变量 v 都大于 0, 从 Duffing 系统中 u 和 v 的关系可知, u 将继续增加, 直到 C 处 $v = 0$, 且此后 $v < 0$, 故在 C 处 u 取得最大值 ($u = 1.48587$), 使得系统

轨迹到达 C 点后, 开始向左运动. 随着慢变量 u 的减少, 系统因快子系统在 $LP2$ 处发生 fold 分岔, 下半支稳定平衡点消失而跳到平衡点上半支的 D 点处. 同样由于慢变的 Duffing 振子的作用, 系统轨迹到达 D 后将继续向左运动直至 E 点取得最小值 ($u = -1.48587$), 然后向右运动. 系统轨迹最终回到 A 点完成一个周期, 从而构成由于两个 fold 分岔引起的对称式 fold/fold 簇发.

4.2 对称式 fold/Hopf 簇发现象

取 $b = 16.5$, 将 u 作为可变参数, 做出快子系统平衡点随 u 的变化曲线如图 8 所示, 图中虚线代表不稳定的平衡点, 实线代表稳定的平衡点. 当 $u < -0.792026$ 时, 快子系统存在一个不稳定平衡点 E_+ , 在 $[-0.792026, -0.372323]$ 内快子系统存在一个稳定平衡点 E_- 和两个不稳定平衡点 E_+, E_0 ;

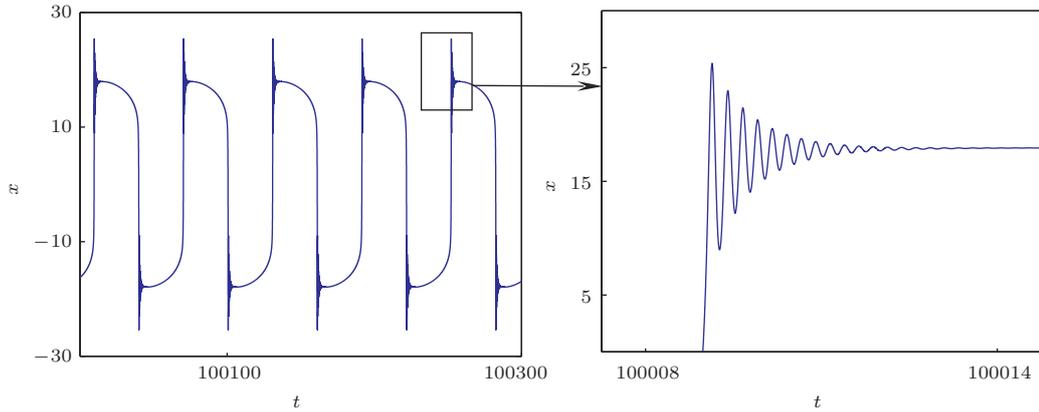


图 5 $b = 28.0$ 时的时间历程图

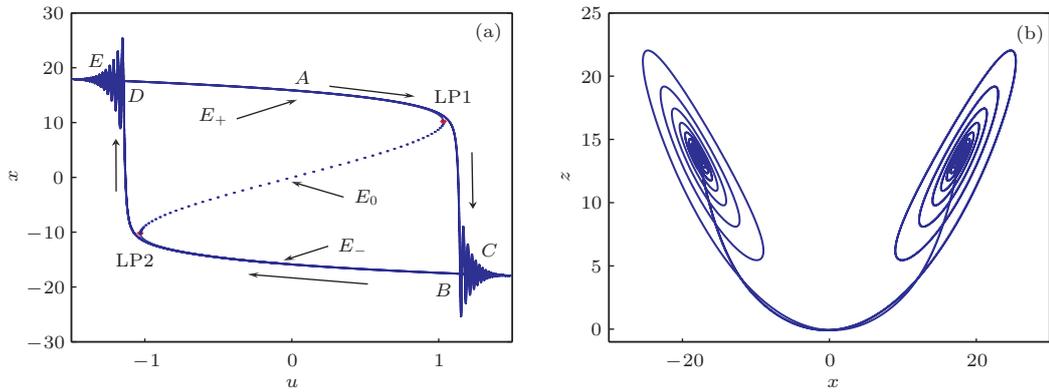


图 6 对称式 fold/fold 簇发 (a) $b = 28.0$ 时平衡点曲线与 x 随 u 的变化曲线叠加; (b) $b = 28.0$ 时 x - z 平面相轨迹

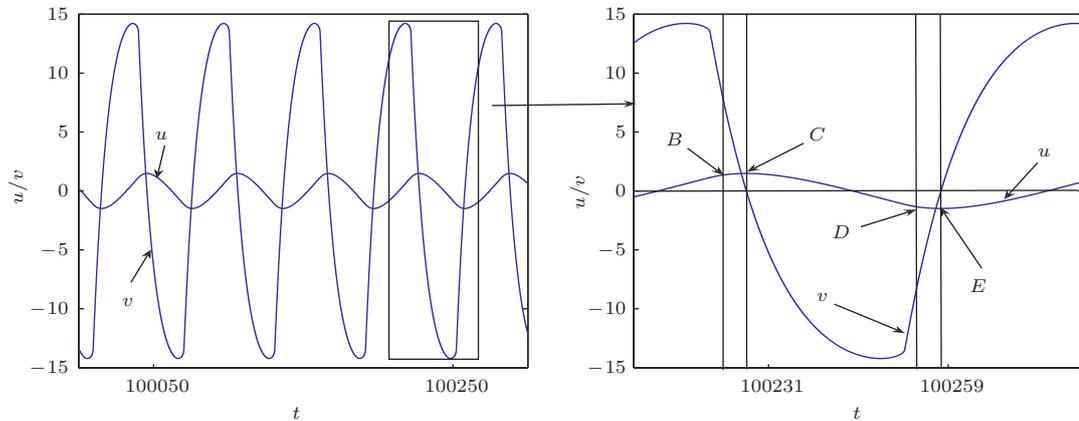


图 7 $b = 28.0$ 时 u/v 的时间历程

在 $[-0.372323, 0.372323]$ 内快子系统存在两个稳定平衡点 E_+ , E_- 和一个不稳定平衡点 E_0 ; 在 $[0.372323, 0.792026]$ 内快子系统存在一个稳定平衡点 E_+ 和两个不稳定平衡点 E_0, E_- . 图中LP1, LP2 表示fold分岔点, 分岔参数为 $u = \pm 0.792026$, supH1, supH2代表超临界Hopf分岔点, 分岔参数为 $u = \pm 0.372323$, 快子系统分岔产生稳定极限环.

由时间历程图9可以观察到明显的簇发现象. 假设系统在平衡点曲线上半支的A点($u = 0$)处沿着 u 增大的方向变化(如图10), 可以看出受稳定平衡点 E_+ 的影响系统振动幅度逐渐减小. 到达LP1处快子系统发生fold分岔, 系统轨迹跳到下半支进入激发态, 受慢子系统Duffing振荡的影响; 进一步分析慢子系统 u 和 v 的关系可知(与图7中相似), 系统轨迹将继续围绕supH1产生的极限环向右运动, 并在B处 u 取得最大值($u = 1.14404$); 此后系统轨迹开始向左运动. 当参数经过supH1时, 系统因快子系统发生超临界Hopf分岔而退出激发态, 受稳定平衡点 E_- 吸引其振幅逐渐减小. 当 u 值经过LP2点时, 快子系统发生fold分岔导致系统轨迹

跳跃至上半支进入激发态; 同样原因, 系统将围绕supH2分岔产生稳定极限环并继续向左运动, 在C处 u 取得最小值($u = -1.14404$); 此后系统轨迹开始向右运动, 当参数经过supH2点时, 系统因快子系统的超临界Hopf分岔而退出激发态, 受稳定平衡点 E_+ 影响系统轨迹振幅减小, 最终系统轨迹回到初始点时完成一个完整的周期, 从而构成对称式fold/Hopf簇发.

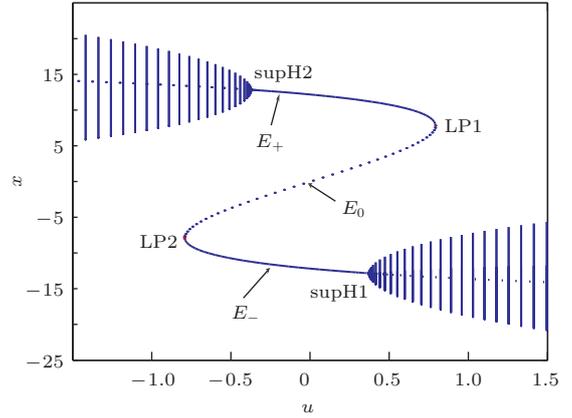


图8 $b = 16.5$ 时快子系统平衡点分岔曲线

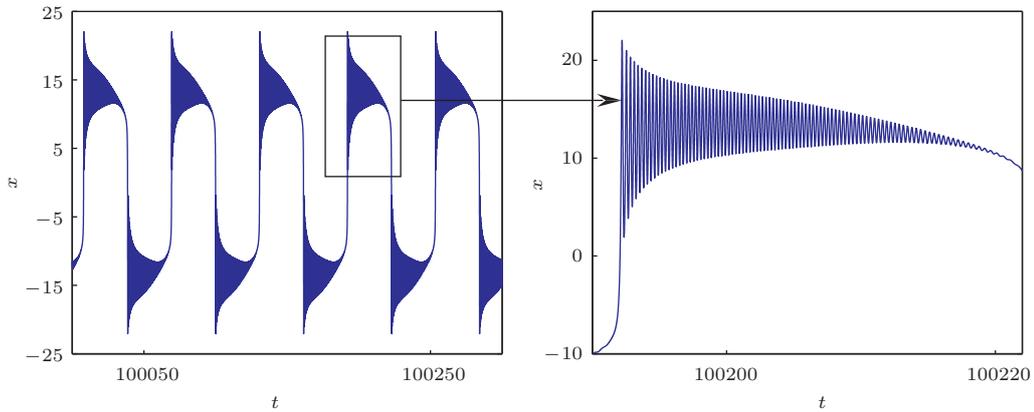


图9 $b = 16.5$ 时的时间历程图

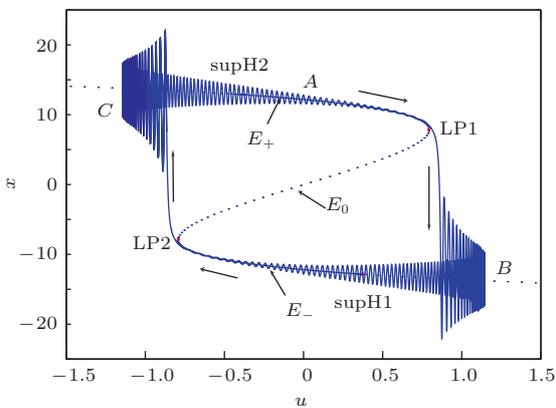


图10 $b = 16.5$ 时平衡点曲线和 x 随 u 变化曲线叠加

4.3 对称式homoclinic/homoclinic簇发

由控制参数 $b = 12.79$ 时平衡点分岔曲线(图11)可知, 此时快子系统的平衡点都不稳定. 当 $u < -0.1056$ 时, 快子系统存在稳定的极限环LPC1, 当 $u > 0.1056$ 时, 快子系统存在一个稳定极限环LPC2. 在hom1处($u = 0.1056$)发生鞍点的同宿分岔上侧极限环消失, 在hom2处($u = -0.1056$)同样由于鞍点的同宿分岔下侧极限环消失, 在 $[-0.1056, 0.1056]$ 内上下两个极限环共存. 图中LP1, LP2为fold分岔, 分岔参数为 $u = \pm 0.697321$.

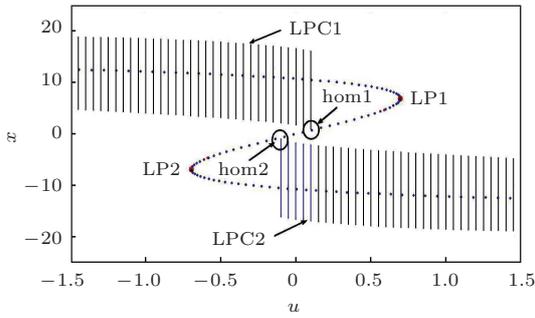


图 11 $b = 12.79$ 时快子系统平衡点分岔曲线

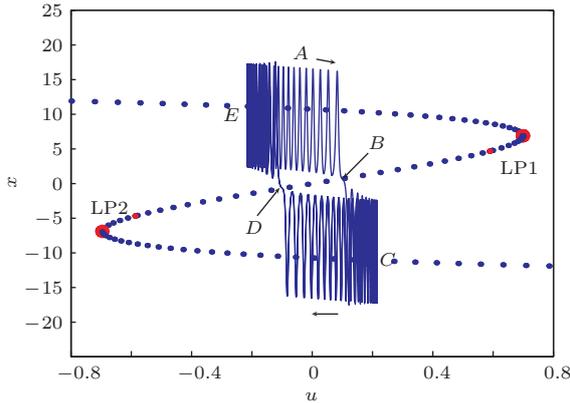


图 12 $b = 12.79$ 时平衡点曲线和 x 随 u 变化曲线的叠加

系统此时的轨迹在 $u-x$ 平面投影如图 12 所示. 设系统在上侧极限环上做周期运动; 当参数 u 变化到 B 处 (hom1) 时, 由于鞍点的同宿分岔, 极限环 LPC1 消失; 系统跳到下侧极限环上, 受慢子系统 Duffing 振荡的作用, 系统轨迹围绕极限环振荡并继续向右运动且在 C 处 u 取得其最大值 ($u = 0.21504$); 此后系统轨迹向左运动. 随着参数继续变化, 系统到达 D (hom2) 后同样由于鞍点同宿分岔而跳到上侧极限环; 相同原因, 系统轨迹继续围绕极限环并向左运动, 参数 u 在 E 处取得最小值 ($u = -0.21504$); 此后系统轨迹开始向右运动, 最终回到 A 处, 完成一个周期.

5 结 论

通过对受控 Chen 系统复杂行为的分析发现, 当控制器和被控系统存在不同时间尺度时, 受控

系统会产生各种不同模式的簇发振荡. 不同于单一慢变量的快慢系统, 作为慢子系统的 Duffing 系统包含两个慢变量, 它们相互作用, 共同影响系统的行为. 参数不同则快子系统存在不同的分岔模式, 在簇发振荡中的这些不同分岔模式导致了不同的簇发现象, 如对称式 fold/fold 簇发、对称式 fold/Hopf 簇发以及对称式 homoclinic/homoclinic 簇发等. 由于 Duffing 系统具有振荡的特性, 所以在慢变 Duffing 系统控制下的 Chen 系统会产生类似于慢周期激励下的簇发现象.

参考文献

- [1] Hadeif S, Boukabou A 2014 *J. Franklin Inst.* **351** 2728
- [2] Smaoui N, Karouma A, Zribi M 2011 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **16** 3279
- [3] Alhajaj A, Dowell N M, Shah N 2013 *Energy Procedia* **37** 2552
- [4] Powathil G G, Gordon K E, Hill L A, Chaplain M A 2012 *J. Theor. Biol.* **308** 1
- [5] Bridge J, Mendelowitz L, Rand R, Sah S, Verdugo A 2009 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **14** 1598
- [6] Hodgkin A L, Huxley A F 1952 *J. Physiol.* **117** 500
- [7] Gyorgui L 1992 *Field R J. Nature* **355** 808
- [8] Shen J H, Zhou Z Y 2013 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **18** 2213
- [9] Shinizu K, Sekikawa M, Inaba N 2011 *Phys. Lett. A* **375** 1566
- [10] Han X J, Jiang B, Bi Q S 2009 *Phys. Lett. A* **373** 3643
- [11] Shi M, Wang Z H 2014 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **19** 1956
- [12] Wang Q Y, Aleksandra M, MAtjaz P, Lu Q S 2011 *Chin. Phys. B* **20** 040504
- [13] Lü Y B, Shi X, Zheng Y H 2013 *Chin. Phys. B* **22** 040505
- [14] Wang M J, Zeng Y C, Chen G H, He J 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 010509 (in Chinese) [王梦蛟, 曾以成, 陈光辉, 贺娟 2011 物理学报 **60** 010509]
- [15] Zhang X F, Chen Z Y, Bi Q S 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3802 (in Chinese) [张晓芳, 陈章耀, 毕勤胜 2010 物理学报 **59** 3802]

Complicated behavior and mechanism of Chen system with slowly variable control*

Zhang Xiao-Fang[†] Han Qing-Zhen Chen Xiao-Ke Bi Qin-Sheng

(Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

(Received 4 May 2014; revised manuscript received 22 May 2014)

Abstract

Since most of the work relevant to the control of Chen system is based on the same time scale, and the results associated with the coupled systems with two time scales are mainly for the cases with only one slow variable, in this paper we investigate the dynamical evolution of the Chen system with the controller described by Duffing oscillator on a slow time scale, which implies two slow variables may be involved in the coupled vector field. Different types of bursting oscillations such as the symmetric fold/fold bursting, symmetric fold/Hopf bursting, symmetric homoclinic/homoclinic bursting, and mechanism are presented, revealing that the mutual influence between the two slow variables may cause the bursting behaviors similar to those in the periodic excited systems.

Keywords: Chen system, bursting, bifurcation, fast-slow effect

PACS: 05.45.-a, 05.45.Pq

DOI: [10.7498/aps.63.180503](https://doi.org/10.7498/aps.63.180503)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 21276115).

[†] Corresponding author. E-mail: xfzhang@ujs.edu.cn