异质神经元的排列对环形耦合神经元网络频率同步的影响*

孙晓娟† 杨白桦 吴晔 肖井华

(北京邮电大学理学院, 北京 100876)

(2014 年 4 月 2 日收到; 2014 年 5 月 21 日收到修改稿)

以一维环形耦合的非全同 FitzHugh-Nagumo 神经元网络为研究对象, 讨论这种异质神经元在环上的不同排列对其频率同步的影响. 研究结果显示, 异质神经元的排列不同, 对应的神经元网络达到频率同步所需的临界耦合强度也不完全相同. 在平均意义下, 异质性较小的神经元在环上的距离越近, 神经元网络达到频率同步所需的临界耦合强度越大; 相反, 异质性较大的神经元在环上的距离越近, 神经元网络达到同步所需的临界耦合强度越小. 通过对频率同步过程的分析, 进一步给出了产生这一现象的动力学机理.

关键词: 频率同步, 异质神经元, 神经元网络, 环形耦合

PACS: 05.45.Xt, 05.90.+m, 87.19.lj **DOI:** 10.7498/aps.63.180507

1 引 言

同步是神经元系统中所观察到的重要的非线性动力学现象之一[1]. 在我们的运动、嗅觉、视觉、触觉等行为活动中, 都伴随着同步的发生, 且同步是我们可以实现此类认知活动的基础. 此外, 在大脑中同步的异常发生, 也会给我们带来坏处. 例如, 癫痫、帕金森等疾病是由异常同步所导致的. 因此, 同步对于神经元系统而言, 就有极其重要的研究意义.

鉴于同步在神经元系统中的重要性, 非线性动力学领域的研究者们对神经元系统的同步问题做了大量的研究工作. 例如, Shi 和 Lu[2] 利用线性稳定性理论给出了环形神经元网络完全同步的判据. Wang 等[3] 进一步利用动力系统的渐近稳定性理论和矩阵理论, 给出对称耦合神经元网络同步的一个充分条件.

此外, 通过数值仿真的手段发现噪声、时滞及网络拓扑结构等因素对神经元系统同步也有着重要的影响. Neiman 等[4] 发现噪声可以增强神经元网络的相位同步; Zhou 和 Kurths 等[5] 以及 Shi 和 Lu[6] 则进一步指出噪声不仅可以增强神经元系统的同步性, 还可以诱发神经元系统产生同步现象. 对于时滞, Dhamala 等[7] 发现时滞可以促进神经元系统同步现象的发生, 且 Wang 等[8] 指出时滞还可以诱使神经元系统发生同步转迁现象. 网络拓扑结构对神经元网络的同步也有着重要作用. 例如, Perc[9] 的研究指出, 将规则网络中的边以一定的概率随机重连时, 神经元网络的同步性也会增强. Wang 等[8] 还指出随机重连概率也可以诱发神经元网络产生同步转迁现象.

除了噪声、时滞、网络拓扑结构这些因素之外, 互异性在神经元系统中也是普遍存在的, 如神经元动力学方程的不同、动力学方程相同但参数不同、神经信息传递时的时滞不同等. Zhou 等[10] 曾发现当神经元网络中各神经元的动力学方程相同、但是参数有所不同时, 这种参数的异质性可以增强环形耦合神经元系统的相干共振性. Li 等[11] 讨论了异质性神经元网络的多空间相干共振现象; Wierci-

∗ 国家自然科学基金 (批准号: 11272024, 11375033) 和中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: 2013RC0904) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: sunxiaojuan@bupt.edu.cn

 http://wulixb.iphy.ac.cn

groch 等[12] 则分析了异质性神经元网络的完全同步和相位同步. 此外, 在其他生物系统 (心肌细胞网络) 中, 贾冰和古华光[13] 则从实验的角度验证了异质心肌细胞系统的同步, 还给出了心肌细胞网络从不同步到同步的动力学规律.

对于环形耦合的系统来说, 若参数不同的振子在环上的排列不同, 则系统达到同步所需的临界耦合强度也有可能不同. 例如, Wu 等[14] 通过对环形耦合的异质 Kuramoto 振子同步行为的研究发现, 对参数不同的振子进行适当排列后, 达到同步所需的耦合强度会降低, 即系统整体的同步性增强.

由于同步的强弱在神经元系统中具有极其重要的意义, 那么对于具有不同参数的神经元网络而言, 在不改变网络拓扑结构的前提条件下, 改变神经元的不同排列是否会影响神经元网络整体的同步性呢? 为此, 本文以一维环形耦合的非全同 Fitz Hugh-Nagumo (FHN) 神经元网络为研究对象, 考虑这种异质 FHN 神经元的排列对其神经元网络同步的影响. 在神经元系统中, 平均放电频率与其各类功能性活动有着密切联系. 例如, 研究显示 gamma 波与高度注意状态有关[15], alpha 波则与运动有直接关系[16] 等. 因此, 关于平均放电频率的研究在神经元系统中具有重要的意义. 本文将重点讨论异质 FHN 神经元的排列对频率同步的影响.

本文首先介绍了所讨论的神经元系统的模型, 而后通过数值模拟的手段, 研究了非全同振子排列对环形耦合神经元网络频率同步的影响; 并进一步分析了这一影响产生的动力学机理; 最后给出本文的结论.

2　系统模型

本文以 FHN 神经元模型[17,18] 作为一维环形耦合神经元网络节点的动力学方程, 其方程如下:

$$\begin{aligned}\varepsilon\dot{x}_i &= x_i - \frac{x_i^3}{3} - y_i + k(x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i),\\ \dot{y}_i &= x_i + a_i,\end{aligned} \tag{1}$$

其中下标 i 表示是一维环形耦合神经元网络中的第 i 个神经元; $1 \leqslant i \leqslant N$, N 为环形神经元网络中所包含神经元的数目; x_i 是电压快速变量; y_i 是慢恢复变量; ε 是一个常数, 这里取值为 $\varepsilon = 0.01$; $k(x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i)$ 为耦合项, 即每个神经元与其最近的两个神经元相连接, k 为耦合强度.

本文中所考虑的神经元的异质性指的是方程 (1) 中各神经元的参数 a_i 的不同. 本文中 a_i 的取值范围为 $0.6 \leqslant a_i \leqslant 0.96$, 且

$$a_i = 0.6 + (i-1)\frac{0.96 - 0.6}{N-1}. \tag{2}$$

对于单个 FHN 神经元

$$\begin{aligned}\varepsilon\dot{x} &= x - \frac{x^3}{3} - y,\\ \dot{y} &= x + a.\end{aligned} \tag{3}$$

当 $a < 1$ 时, 神经元产生动作电位; 当 $a > 1$ 时, 神经元处于静息状态. 图 1 为不同参数 a 所对应的单个 FHN 神经元的放电序列图. 如图 1 所示, 在我们考虑的 a 的取值范围内, 单个 FHN 神经元呈现周期的峰放电模式; 且 a 越小, FHN 神经元的放电频率越高, 详见图 2. 其中, 神经元放电频率定义为 $f = \dfrac{1}{\langle T_{i+1} - T_i \rangle}$, 这里 T_k 表示神经元第 k 次发放的起始时刻. 在数值仿真过程中, 当前一时刻的膜电位小于 0 而下一时刻的膜电位大于 0 时, 则认为该时刻为神经元动作电位的起始时刻.

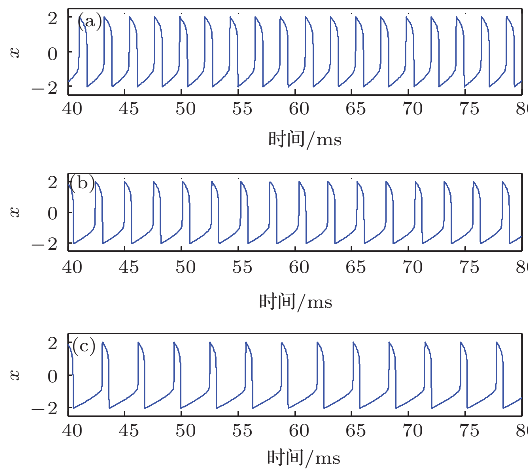

图 1　单个 FHN 神经元膜电位的时间历程　(a) $a = 0.6$; (b) $a = 0.8$; (c) $a = 0.96$

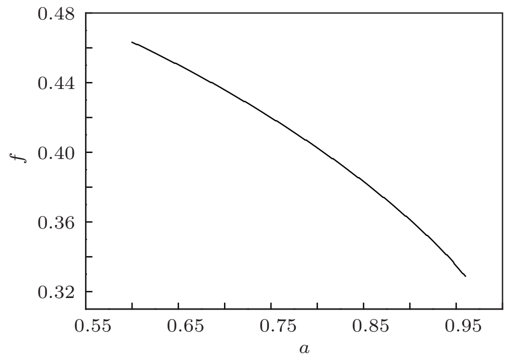

图 2　单个 FHN 神经元的平均放电频率随参数 a 变化的趋势

本文主要研究在初始参数a_i和环状拓扑结构保持不变的前提下, 具有不同参数a_i的神经元在一维环上的不同排列对于环形耦合神经元网络频率同步的影响. 对于节点数为N的系统, 其不同的排列有$\dfrac{(N-1)!}{2}$种; 对于N小于等于10的系统, 可以遍历所有的排列; 而对于N大于10的系统, 排列数很大, 故随机选择一定数量的排列进行研究.

本文中, 神经元网络的频率同步是指经过一定时间历程之后, 网络中各神经元的放电频率近乎相等. 在数值仿真中, 当各神经元的放电频率的方差小于一个很小的常数时, 我们认为神经元网络达到频率同步. 这里, 我们取这个常数为1×10^{-6} (1×10^{-6}与单个神经元的比约为10^6).

3 数值仿真结果

当$N=100$时, 随机选取这100个异质神经元在环上的7000个排列, 计算每一个排列所对应的神经元网络达到频率同步所需的临界耦合强度k_c. 图3显示的是这7000个k_c的统计直方图. 从图3中可以看出, 不同排列所对应的临界耦合强度k_c是不完全相同的, 有些排列对应的k_c小 (k_c大约在0.05附近), 有些排列对应的k_c大 (k_c大约在0.17附近). 我们知道, 对于一个网络而言, 临界耦合强度越小越容易同步. 因此, 从图3的结果可知, 神经元网络在拓扑结构相同的条件下, 异质神经元在环上位置的不同 (即排列不同) 会对系统整体的频率同步性有较大的影响, 适当的排列会大大提高系统的同步性能.

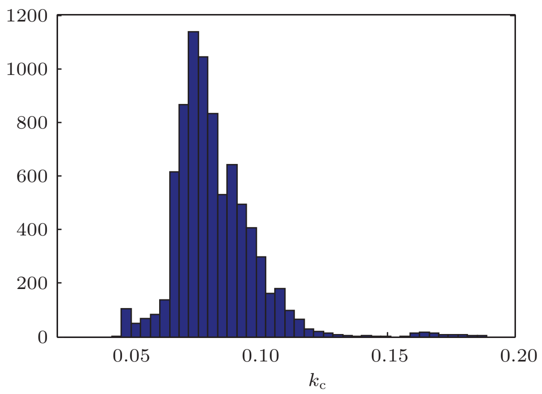

图3 神经元个数为100, 随机选取7000个排列所对应临界耦合强度k_c的直方图

那么, 什么样的排列较易同步, 达到频率同步所需的临界耦合强度较小? 什么样的排列较难同步, 所需的临界耦合强度较大呢? 为此, 我们考虑N较小的情形, 即$N=8$. 这时所有可能的排列共有2520种. 通过计算所有排列的临界耦合强度, 并分析所对应排列的特性. 我们发现, 异质性较小的神经元在环上的距离越近, 神经元网络达到频率同步所需的临界耦合强度越大; 相反, 异质性较大的神经元在环上的距离越近, 神经元网络达到同步所需的临界耦合强度越小. 比较典型的两个排列如图4所示.

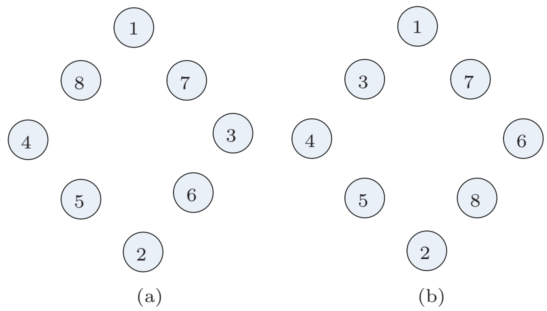

图4 异质神经元的两种不同排列方式 (a) 较小的临界耦合强度$k_c=0.031$; (b) 较大的临界耦合强度$k_c=0.064$

图4中所表示的两个排列, 其中一个所对应的临界耦合强度较小为$k_c=0.031$ (图4(a)), 另一个则较大为$k_c=0.064$ (图4(b)). 序号1—8对应的神经元的参数a_i从0.6按(2)式递增到0.96. 前面我们提到a_i越小, 单个神经元放电频率越高, 见图2. 图4(a)中, 序号为1, 2, 3, 4的神经元(高频神经元)位于网络奇数位置; 而序号为5, 6, 7, 8的神经元(低频神经元)位于网络的偶数位置. 这样就形成了系统中高低频交错的排列特性, 即异质性较大的神经元在环上的距离较近, 对应的$k_c=0.031$较小. 图4(b)中, 频率高和频率低的神经元各自成群. 序号为1, 2, 3, 4, 5的神经元都位于(b)图中网络偏左侧的部分, 而序号为6, 7, 8的元素神经元则位于(b)图中网络偏右侧的部分, 形成了高频和低频各自成群的排列特性. 即异质性较小的神经元在环上的距离较近, 对应的$k_c=0.064$较大.

以上是对于$N=8$时我们发现的规律, 对于较大的N是否还能观察到这一规律呢? 即异质性较小的神经元在环上的距离越近, 神经元网络达到频率同步所需的临界耦合强度越大; 相反, 异质性较大的神经元在环上的距离越近, 神经元网络达到同步所需的临界耦合强度越小. 为此, 我们引入度量量

$$E=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{|a_i-a_j|}{d_{ij}}, \tag{4}$$

这里, d_{ij} 表示两个神经元在网络中的最短距离. 例如, 在图4(a)中, 节点3和节点2之间的最短距离 $d_{23}=2$. 而在图4(a)中, 从节点2到节点3有两个通路: 远的一个是2-5-4-8-1-7-3, 共经过6条边; 而近的一个是2-6-3, 共经过2条边. 我们定义最近的那个通路所经过的边的数目为这两个节点之间的距离, 即 $d_{23}=2$. 由最短距离 d_{ij} 的定义易知, 当 N 固定不变时, 环形网络中 d_{ij} 的取值形式是固定不变的. 例如, 当 $N=8$ 时, d_{ij} 共有28个值, 其中8个值取3、8个值取2、8个值取1、剩余4个值取4. 因此, 计算 E 值, 相当于给这些 d_{ij} 来分配不同的分子. 由(4)式可知, 当 N 固定不变时, 分子越大, 则神经元异质性越大, 故 E 值也越大; 相反, 分子越小, 则神经元异质性越小, 故对应的 E 值也越小. 按照这种分配原则, 综合来讲, 异质性越大的神经元距离越近, E 值越大; 而异质性越小的神经元距离越近, E 值越小. 图5(a)和(b)分别给出了不同 N 值对应的图4(a)和(b)所给出的排列类型的 E 值随着 N 变化的趋势. 由图5可知, 对于同一类型的排列来说, E 值随着 N 的增加而增加.

我们分别计算了 $N=8$ 和 $N=100$ 情况下, 不同排列的 E 值与所对应的临界耦合强度 k_c 值. 由于一个 E 值会对应多个 k_c 值, 因此图5所示的数值结果是平均意义下的结果. 在图6(a)中, 每一个 E 值所对应的 k_c 是其所对应所有 k_c 的平均值; 在图6(b)中, 为了更加清晰地刻画 k_c 与 E 值之间的关系, 我们随机选取了3000个排列的 E 值, 将其从小到大进行排列, 每40个 E 值取一个平均值, 而与这个平均的 E 所对应的 k_c 则是这40个 E 值所对应的所有 k_c 的平均. 从图6(a), (b)中可看出, 在此平均意义下, E 值较大的所对应的 k_c 较小. 由于异质性较大的神经元距离越近, E 值越大, 故 $N=100$ 时, 上述所发现的规律在平均意义下依然存在. 即异质性较小的神经元在环上的距离越近, 神经元网络达到频率同步所需的临界耦合强度越大; 相反, 异质性较大的神经元在环上的距离越近, 神经元网络达到同步所需的临界耦合强度越小.

为了解释这一规律发生的内在机理, 我们依然以 $N=8$ 为例, 通过对两个典型排列的频率同步的分岔过程的分析来进行阐述, 数值结果如图7所示. 图7(a)和(b)的排列分别与图4(a)和(b)相对应. 由上可知, 图4(a)达到频率同步所需的 k_c 较小, 而图4(b)则所需的 k_c 较大. 通过比较这两个排列频率同步的分岔过程,我们发现对于图4(b)中的

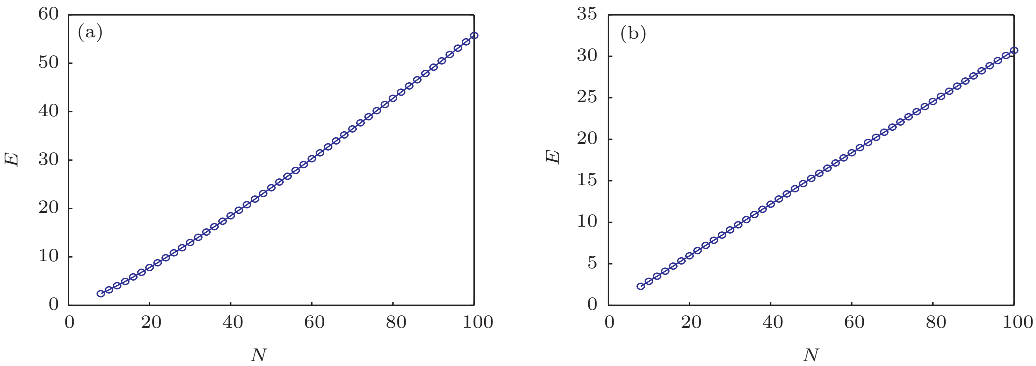

图5 E 值随着 N 变化的趋势 (a) 对应于图4(a)所表示的排列类型; (b) 对应于图4(b)所表示的排列类型

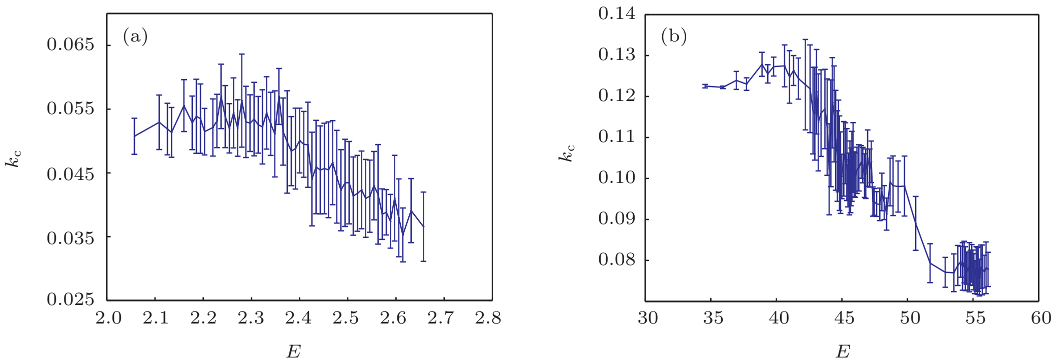

图6 度量量 E 与临界耦合强度 k_c 之间的关系 (a) $N=8$; (b) $N=100$

排列, 随着耦合强度的增加, 频率较大的神经元和频率小的神经元首先分别达到频率同步, 从而形成两个集团, 而后随着耦合强度的进一步增加, 才达到神经元网络整体的频率同步. 显然, 分成两个同步的小集团之后, 这两个集团之间会存在较强的竞争, 都会争着使整个神经元网络能同步到自己所同步的频率上. 因此, 神经元网络整体要想达到同步, 所需的耦合强度会较大. 而对于图4(a)中的排列而言, 不存在这种竞争关系, 随着耦合强度的增加, 神经元从起初的频率逐步向同一个频率靠近, 最终达到一定的耦合强度时, 所有神经元的频率达到了同步, 因此所需的耦合强度较小. 若两个神经元的异质性较小, 则它们的放电频率相近. 当它们的距离相近时, 就容易先达到频率同步, 从而形成小的同步集团. 因此, 在一个环形网络中, 如果异质性较小的神经元对在环上的距离相近时, 则该类排列所需的 k_c 相对较大(从平均意义上来讲); 相反, 若异质性较大的神经元对在环上的距离相近时, 不容易形成集团, 从而易于达到同步, 所需的 k_c 相对较小.

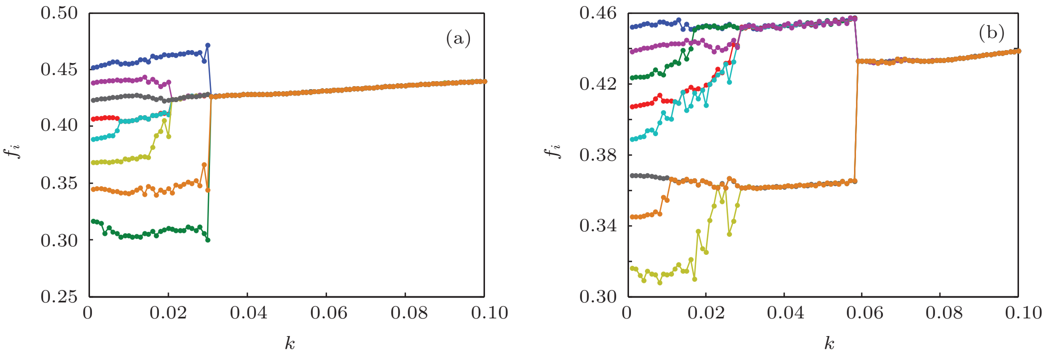

图7 (a) 图4(a)所表示的排列的频率同步分岔图; (b) 图4(b)所表示的排列的频率同步分岔过程图; $N = 8$

4 结 论

通过数值仿真的手段, 分析了异质神经元不同排列对环形神经元网络频率同步的影响. 结果显示, 在神经元网络的异质性和网络拓扑结构不变的条件下, 改变异质神经元在环上的位置对神经元网络整体的频率同步性有着较大的影响. 从平均意义上来讲, 异质性较小的神经元在环上的距离越近, 神经元网络达到频率同步所需的临界耦合强度越大; 相反, 异质性较大的神经元在环上的距离越近, 神经元网络达到同步所需的临界耦合强度越小. 通过对不同排列频率分岔过程的分析, 我们给出了产生这一现象的内在动力学机制.

以往有关同步的理论及数值研究, 主要针对不同拓扑结构特征网络同步性能的好坏、不同耦合方式对复杂网络同步性能的影响, 或是分析噪声、时滞、异质性因素对复杂网络同步性及同步态的作用等[19]. 但是对网络拓扑结构相同及异质性一定的条件下, 网络中具有异质性的各节点的不同排列对其同步性能影响的讨论则较少. Wu等[14]以具有不同固有频率的Kuramoto振子为节点, 分析了异质Kuramoto振子在环形耦合网络上的不同排列对该环形网络相位同步的影响. 结果显示, 当固有频率高的振子与固有频率低的振子交互排列时, 网络的同步性较强; 当固有频率高的振子集中于环形网络的一侧, 而固有频率低的振子集中于环形网络的另一侧时, 网络的同步性较弱. 本文则以具有生理学含义的FHN神经元为节点, 进一步分析了异质性节点在环形耦合网络上的不同排列对其同步的影响. 由本文的结果可知, 与Kuramoto振子为节点的情形类似, 异质性神经元在环形网络上的不同排列也对其频率同步性有较大的影响. 同步性较好的排列与同步性较差的排列特征与文献[14]给出的特征类似, 但又不完全相同. 本文中指出, 在平均意义下, 异质性较小的神经元在环上的距离越近, 该环形网络的同步性越弱; 相反, 异质性较大的神经元在环上的距离越近, 该环形网络的同步性越强. 因此, 本文更进一步指出了异质性节点的不同排列对环形耦合网络同步性能的重要作用. 我们知道, 环形耦合的网络是非常简单的一类网络结构. 目前, 有关异质性节点的排列对网络同步性影响方面的工作, 主要以环形耦合的网络为对象进行讨论, 对于其他更复杂的网络是否有类似的现象,

我们将在今后的工作中进一步深入分析和探讨.

参考文献

[1] Uhlhaas P J, Singer W 2006 *Neuron* **52** 155
[2] Shi X, Lu Q S 2004 *Chin. Phys. Lett.* **21** 1695
[3] Wang H X, Lu Q S, Wang Q Y 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22** 2173
[4] Neiman A, Schimansky-Geier L, Cornell-Bell A, Moss F 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 4896
[5] Zhou C S, Kurths J 2003 *Chaos* **13** 401
[6] Shi X, Lu Q S 2005 *Chin. Phys.* **14** 1088
[7] Dhamala M, Jirsa V K, Ding M Z 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 074104
[8] Wang Q Y, Duan Z S, Perc M, Chen G R 2008 *Europhys. Lett.* **83** 50008
[9] Perc M 2007 *Chaos, Solition. Fract.* **31** 280
[10] Zhou C S, Kurths J, Hu B B 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 098101
[11] Li Y Y, Jia B, Gu H G, An S C 2012 *Commun. Theoret. Phys.* **57** 817
[12] Wiercigroch M, Ji Q B, Han F, Lu Q S 2009 *Chin. Phys. B* **18** 482
[13] Jia B, Gu H G 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 240505 (in Chinese) [贾冰, 古华光 2012 物理学报 **61** 240505]
[14] Wu Y, Xiao J H, Hu G, Zhan M 2012 *Europhys. Lett.* **97** 40005
[15] Tiitinen H, Sinkkonen J, Reinikainen K, Alho K, Lavikainen J, Nätänen R 1993 *Nature* **364** 59
[16] Pfurtscheller G, Neuper C, Andrew C, Edlinger G 1997 *Int. J. Psychophys.* **26** 121
[17] Fitzhugh R 1961 *Biophys. J.* **1** 445
[18] Nagumo J S, Arimoto S, Yashizawa S 1962 *Proc. the IRE* **50** 2061
[19] Arenas A, Diaz-Guilera A, Kurths J, Moreno Y, Zhou C S 2008 *Phys. Reports* **469** 93

Effects of arrangement of heterogeneous neurons on frequency synchronization of a ring-coupled neuronal network*

Sun Xiao-Juan† Yang Bai-Hua Wu Ye Xiao Jing-Hua

(*School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China*)

(Received 2 April 2014; revised manuscript received 21 May 2014)

Abstract

In this paper, we discuss the effects of heterogeneous neuron arrangement on the frequency synchronization of a ring-coupled FitzHugh-Nagumo neuronal network. The obtained numerical results reveal that the threshold of coupling strength for frequency synchronization may be different for different arrangements of the heterogeneous neurons on a ring. On average, the closer to each other the neurons which are less heterogeneous on a ring, the larger the critical coupling strength needed for neuronal network to achieve frequency synchronization is; the closer to each other the neurons which are more heterogeneous, the smaller the critical coupling strength needed for neuronal network to achieve frequency synchronization is. Furthermore, we give the underlined mechanism for this phenomenon by analyzing the process of frequency synchronization.

Keywords: frequency synchronization, heterogeneous neurons, neuronal network, ring couple

PACS: 05.45.Xt, 05.90.+m, 87.19.lj **DOI:** 10.7498/aps.63.180507

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11272024, 11375033), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities (Grant No. 2013RC0904).

† Corresponding author. E-mail: sunxiaojuan@bupt.edu.cn