

## 有耗色散光子晶体带隙结构的本征值分析新方法\*

王辉<sup>1)3)</sup> 沙威<sup>2)†</sup> 黄志祥<sup>3)‡</sup> 吴先良<sup>1)3)</sup> 沈晶<sup>1)</sup>

1)(合肥师范学院电子信息工程学院, 合肥 230061)

2)(香港大学电机电子工程学院, 香港薄扶林道)

3)(安徽大学, 计算智能与信号处理教育部重点实验室, 合肥 230039)

(2014年4月18日收到; 2014年5月16日收到修改稿)

为计算有耗色散光子晶体的带隙结构, 提出了新的本征值分析方法. 该方法借助于量子输运问题中的思想, 在本征值方程的推导过程中进行了巧妙的变换, 将复杂的非线性本征值问题转化为线性本征值问题; 并利用频域有限差分 (FDFD) 方法直接求解线性本征值方程, 最终得到有耗色散光子晶体结构的相关物理参数. 与其他方法相比, 该方法的最大特点为概念清晰、计算简便, 最终节省了计算时间及所需内存量. 利用该方法, 对介质光子晶体结构进行模拟, 结果与传统 FDFD 方法符合较好, 从而验证了方法的有效性. 此外, 利用所提方法计算了有耗色散光子晶体结构的色散曲线, 得到了表面等离子波激发的区域, 进一步讨论了损耗对其色散曲线及本征模场的影响. 相关结果对色散有耗光子晶体的研究具有一定的理论指导意义.

关键词: 有耗色散光子晶体, 带隙结构, 线性本征值方程

PACS: 42.70.Qs, 73.20.At, 78.20.Bh

DOI: 10.7498/aps.63.184210

## 1 引言

光子晶体是具有不同介电常数的材料按照周期性排列而形成的复合介质结构, 且其周期可与光波长相比拟, 某些波段的电磁波因周期性结构的强散射而在某个方向上不允许传播, 称这个频率范围为光子带隙或者光子禁带<sup>[1-4]</sup>. 光子带隙是光子晶体的最根本的特征, 也是制备和应用光子晶体的最重要的依据. 利用光子晶体所具有的独特光学特性, 可以制作各种光学器件实现对光的控制<sup>[5,6]</sup>, 比如光子晶体激光器<sup>[7]</sup>、光波导<sup>[8]</sup>、滤波器<sup>[9]</sup>等.

随着光子晶体研究的发展, 由有耗色散材料制备的光子晶体逐渐成为研究的热点问题之一. 贵金属可以激发表面等离子体激元, 这一特性在光探测方面有广泛的应用, 而大多数贵金属在光波段都具有色散性. 另外一些新型人工材料的电磁参数通常

情况下也是频率的函数, 所以对有耗色散光子晶体进行研究有很重要的意义. 本征值方法是求解光子带隙的重要方法. 当材料介电常数是与频率无关的常数时, 光子带隙的求解是一个标准的线性本征值问题<sup>[10,11]</sup>. 如果材料为色散材料而且有损耗, 光子带隙的计算就是一个复杂的非线性本征值方程求解问题<sup>[12-15]</sup>, 计算耗时<sup>[16,17]</sup>而且增加了计算所需内存量. 传统光子带隙计算方法<sup>[10-12,18]</sup>在计算色散关系时, 给定布洛赫波矢  $k$ , 频率  $\omega$  作为本征值 ( $\omega = \omega(k)$ ). 如果光子晶体材料是色散的, 布洛赫波矢  $k$  则为复数, 传统的光子带隙计算方法遇到困难, 此时产生了一些将布洛赫波矢  $k$  作为本征值的光子带隙计算方法 ( $k = k(\omega)$ ), 这些方法一般最后将问题转化为一个二次本征值方程求解问题, 比如 D-N (Dirichlet-to-Neumann) 变换法<sup>[13]</sup>, 有限元 (FEM) 方法<sup>[14,15]</sup>. 另外, Ramma 和 Fan<sup>[19]</sup> 通过引入辅助中间变量处理色散, 将问题转化为标准矩

\* 国家自然科学基金 (批准号: 51277001, 61101064, 61301062)、教育部新世纪优秀人才支持计划 (批准号: NCET-12-0596)、教育部博士学科点专项基金 (批准号: 20123401110009)、安徽省杰出青年基金 (批准号: 1108085J01) 和安徽省高校重点项目 (批准号: KJ2012A103) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: wsha@eee.hku.hk

‡ 通讯作者. E-mail: zxhuang@ahu.edu.cn

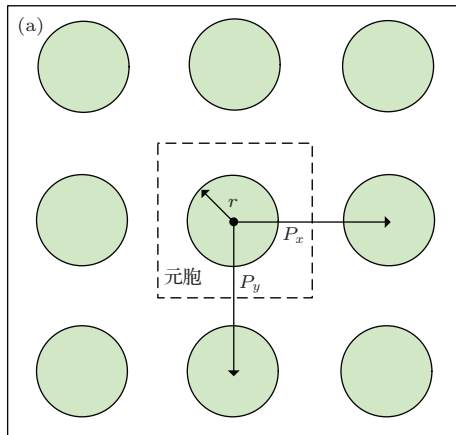
阵本征值方程的求解,而且当材料无耗时为哈密尔顿本征值方程;当材料有耗时为非哈密尔顿本征值方程.由于引入了中间变量,该方法增加了计算所需内存量,而且辅助中间变量的数量随着 Lorentz 模型项的增加而增加.时域有限差分(FDTD)方法<sup>[20,21]</sup>,作为电磁场计算中应用比较广泛的方法之一,可以计算色散光子晶体带隙结构<sup>[22]</sup>,但是其计算精度和离散网格及迭代步数有关,因而比较耗时,而且为了得到其本征模分布而进行的傅里叶变换也会引入噪声影响其精度.

在求解有耗色散光子晶体带隙结构时,为了避免上述问题,本文借助于量子输运问题中的思想<sup>[23]</sup>,在本征值方程的推导过程中经过巧妙变换,得到一个标准的线性本征值方程,并利用 FDFD 方法直接求解该方程.该方法较其他方法的最大特点为概念清晰、计算简便,避免了复杂的非线性本征值方程求解,节省了计算时间和计算所需内存量.损耗对光子晶体的群速度、品质因数以及本征模的对称性和简并产生影响,而光子晶体的这些参数直接影响着光子晶体的工程应用.比如,群速度决定了器件的功耗和在每单位传输距离上的传输时间;微腔量子电动力学中原子、分子的自发衰变率正比于品质因数<sup>[24]</sup>;本征模的对称性和简并与时间可逆性<sup>[25]</sup>、光子狄拉克锥<sup>[26]</sup>等物理概念紧密相关.因此本文还将讨论损耗对光子晶体色散曲线以及本征模场的影响.

## 2 基本理论

一般情况下,通过求解矢量波动方程(1)可以得到光子晶体的光子带隙图( $\omega = \omega(k)$ 色散关系),

$$\nabla \times \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \mathbf{H} = k_0^2 \mathbf{H}, \quad (1)$$



其中  $\epsilon$  是光子晶体构成材料的相对介电常数,  $\mathbf{H}$  是磁场,  $k_0 = \frac{\omega}{c}$  为真空中电磁波波数.为更好地理解和介绍,本文以二维光子晶体为例阐释该本征值算法,但该算法对三维光子晶体仍然适用.如图 1(a)所示为二维光子晶体的  $xoy$  截面,  $x, y$  方向为周期,周期长分别是  $P_x$  和  $P_y$ .在二维情况下,考虑光子晶体的平面传播特性,设  $z$  方向波数  $k_z = 0$ ,将电磁波分为  $TE_z(E_x, E_y, H_z)$  和  $TM_z(H_x, H_y, E_z)$  波.以  $TE_z$  波为例,对应的矢量波动方程(1)可以写成标量波动方程:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\epsilon(x, y)} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\epsilon(x, y)} \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) + k_0^2 H_z = 0. \quad (2)$$

以 Yee 网格剖分元胞(为了书写简洁,  $x, y$  方向仅剖分成 3 个网格),如图 1(b),网格点上场值  $\varphi_{i,j}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) 代表磁场  $H_z$ .对(2)式利用五点差分法<sup>[27]</sup>,得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x^2} \left( \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{\epsilon(i + \frac{1}{2}, j)} - \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i-1,j}}{\epsilon(i - \frac{1}{2}, j)} \right) \\ & + \frac{1}{\Delta y^2} \left( \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}}{\epsilon(i, j + \frac{1}{2})} - \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i,j-1}}{\epsilon(i, j - \frac{1}{2})} \right) \\ & + k_0^2 \varphi_{i,j} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $\Delta x, \Delta y$  分别是  $x, y$  方向网格剖分步长.由(3)式以及图 1(b)可以看出,非边界区域网格点上磁场的计算需要利用其周围的四个网格点上的磁场值.边界网格点上磁场值的计算需要用到边界区域外网格点上的磁场值,此时需要用到周期边界条件

$$\begin{aligned} & \varphi(x \pm P_x, y \pm P_y) \\ & = \varphi(x, y) \exp(\mp j k_x P_x \mp j k_y P_y), \end{aligned} \quad (4)$$

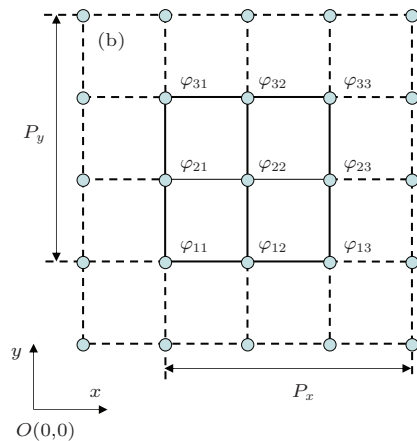


图1 二维光子晶体(a)横截面与(b)Yee网格剖分示意图

图1(b)中最外层虚线网格的引入目的为应用周期边界条件(4)式并不参与计算。

对方程(2)在每个网格点上应用五点差分法(3)和周期边界条件(4),得到矩阵形式的差分方程:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} & \mathcal{M}_{13} \exp(-jk_x P_x) \\ \mathcal{M}_{21} & \mathcal{M}_{22} & \mathcal{M}_{23} \\ \mathcal{M}_{31} \exp(jk_x P_x) & \mathcal{M}_{32} & \mathcal{M}_{33} \end{pmatrix} \times \psi = 0, \quad (5)$$

其中

$$\psi = (\varphi_{11} \varphi_{21} \varphi_{31} \varphi_{12} \varphi_{22} \varphi_{32} \varphi_{13} \varphi_{23} \varphi_{33})^T,$$

$\mathcal{M}_{ii}$  和  $\mathcal{M}_{ij}(i \neq j)$  定义如下:

$$\mathcal{M}_{ii} = \begin{pmatrix} D_{1i} & -T_{2i} & -T_{3i} \exp(-jk_y P_y) \\ -T_{1i} & D_{2i} & -T_{3i} \\ -T_{1i} \exp(jk_y P_y) & -T_{2i} & D_{3i} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} D_{mi} &= \frac{2}{\varepsilon_{mi} \cdot \Delta x^2} + \frac{2}{\varepsilon_{mi} \cdot \Delta y^2} - k_0^2, \\ T_{mi} &= \frac{1}{\varepsilon_{mi} \cdot \Delta y^2}, m = 1, 2, 3. \\ \mathcal{M}_{ij} &= -\frac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon_{1j}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon_{2j}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon_{3j}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

为了将  $k_x$  从方程(5)中的矩阵中分离出来,引入矩阵  $\mathcal{H}, \mathcal{P}$

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathcal{M}_{13} \\ \mathcal{M}_{21} & \mathcal{M}_{22} & \mathcal{M}_{23} \\ 0 & \mathcal{M}_{32} & \mathcal{M}_{33} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\mathcal{P} = -\begin{pmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{M}_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

那么(5)式变为

$$\mathcal{H}\psi = \exp(jk_x P_x)\mathcal{P}\psi. \quad (10)$$

对于给定的  $\omega$  和  $k_y$ , 如果矩阵  $\mathcal{H}, \mathcal{P}$  是可逆的, 那么(10)式就是一个标准的本征值问题. 遗憾的是, 矩阵  $\mathcal{P}$  明显是不可逆的, 因为其至少有一行所有的元

素都是零, 同时根据矩阵  $\mathcal{H}$  的元素可以证明  $\mathcal{H}$  是奇异矩阵. 为了克服这个缺陷, 对(10)式进行等价变换, 整理得:

$$(\mathcal{H} - \mathcal{P})\psi = [\exp(jk_x P_x) - 1]\mathcal{P}\psi, \quad (11)$$

$$(\mathcal{H} - \mathcal{P})^{-1}\mathcal{P}\psi = \frac{1}{\exp(jk_x P_x) - 1}\psi. \quad (12)$$

(12)式中矩阵  $(\mathcal{H} - \mathcal{P})$  总是可逆的, 因为它的元素是(2)式的差分系数, (12)式是一个标准的本征值问题. 求解(12)式, 得到本征值

$$\lambda = 1/(\exp(jk_x P_x) - 1),$$

然后根据关系式

$$k_x = \log\left(\frac{1}{\lambda} + 1\right)/(jP_x)$$

计算  $k_x$  的值, 可以看出  $k_x$  是一个复数. 由对称性可知, 通过对  $\omega$  扫频, 以及遍取  $k_y$  (或  $k_x$ ) 在不可约布里渊区边界上的值, 求得  $k_x$  (或  $k_y$ ) 就可以得到光子晶体的带隙图.

从以上对本征值方程的推导过程可以看出, 本文本征值算法的核心思想就是从(5)式中的矩阵中分离出待求量  $k_x$  (或者  $k_y$ ), 通过运算, 将其转化成线性本征值方程(12)中的本征值项, 将问题转化成标准的线性本征值问题, 概念清晰. 存在两个重要的且巧妙的变换, 一是通过引入矩阵  $\mathcal{H}, \mathcal{P}$ , 将待求量  $k_x$  (或者  $k_y$ ) 从矩阵中分离出来; 二是通过等价变换使得方程(10)转化为标准的线性本征值方程.

### 3 数值计算与结果分析

#### 3.1 算法验证

为了验证算法的有效性, 计算介质柱光子晶体带隙图, 并与传统FDFD算法进行结果对比. 注意本文中计算所用的频率均采用归一化频率  $\frac{\omega a}{2\pi c}$ . 考虑相对介电常数  $\varepsilon = 12$  的介质柱在空气中 ( $\varepsilon_{\text{air}} = 1$ ) 周期排列构成的光子晶体, 晶格常数为  $a = P_x = P_y$ , 介质柱半径  $r = 0.4a$ . 图2给出了在归一化频率 [0 0.5] 范围内的光子带隙图, 本文算法(红色圆圈)与传统FDFD(黑色虚线)算法的结果进行了对比, 图2内插图给出了不可约布里渊区示意图. 由图2可看出, 两种算法符合较好, 表明所构建算法的有效性. 同时我们注意到, 归一化频率 [0.34 0.42] 区间为禁带区, 沿  $\Gamma-M$  方向的电磁波不能传播, 而沿  $M-X, X-\Gamma$  方向的电磁波则可以传播.

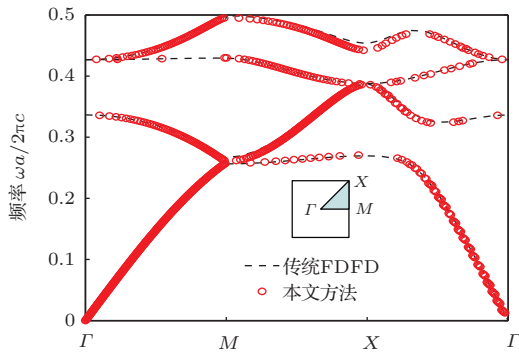


图2 二维介质柱光子晶体带隙图及不可约布里渊区示意图 介质柱相对介电常数  $\epsilon = 12$ , 半径  $r = 0.4a$ , 其中  $a$  为晶格常数

### 3.2 色散有耗光子晶体

考虑由方柱构成的光子晶体, 方柱边长为  $0.4a$ ,  $a$  为晶格常数, 此处我们假设方柱为色散材料, 且有损耗. 由第2部分基本理论中线性本征值方程的推导过程可以看出, 本文算法中材料的相对介电常数可以是离散的数据点, 也可以是频率的函数形式. 本文中用如下 Drude 模型来表征方柱复相对介电常数:

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\gamma}, \quad (13)$$

其中  $\omega_p$  为等离子体极化共振频率,  $\gamma$  为碰撞频率或阻尼系数, 代表的是材料的损耗因子,  $i$  是虚数单位. 当  $\gamma = 0$  时,  $\epsilon$  为实数且是频率  $\omega$  的函数, 此时表明材料无耗但是具有色散性. 当  $\gamma \neq 0$  时,  $\epsilon$  为虚部不等于零的复数, 此时材料为色散有耗材料, 那么固定  $k_y$  计算得到的  $k_x$  (或者固定  $k_x$  得到的  $k_y$ ) 的虚部也不为零. 如果是纯虚数, 其对应的电磁波相位不发生变化, 那么电磁波是不能传播的; 如果其虚部存在, 对应的本征模比较复杂, 相应的电磁波在传播的过程中衰减 (虚部小于零) 或者被放大 (虚部大于零).

为了研究损耗对色散曲线的影响, 分别针对无耗、有耗并逐渐加大损耗的情况进行仿真, 即分别取  $\gamma = 0$ ,  $\gamma = 0.01\omega_p$  和  $\gamma = 0.1\omega_p$ . 令  $\omega_p = \frac{2\pi c}{a}$ , 针对不同阻尼系数  $\gamma$  的三种情况, 图3给出了归一化频率与  $k_r$  的色散关系图, 其中  $k_r$  为沿  $\Gamma-M$  方向 ( $k_x = 0$ ) 计算得到的  $k_y$  的实部, 蓝色实线、红色虚线和带标识符“+”绿色实线分别对应的是  $\gamma = 0$ ,  $\gamma = 0.01\omega_p$  和  $\gamma = 0.1\omega_p$ . 如前文所述, 波数  $k$  的虚部在电磁波的传播中有着重要的意义, 图4给出了对应于图3 的归一化频率与  $k_i$  在不同阻尼系数  $\gamma$  下的色散曲线, 其中  $k_i$  为沿  $\Gamma-M$  方向 ( $k_x = 0$ ) 计算得到的  $k_y$  的虚部. 图3表明, 在归

一化频率  $[0.51 \ 0.85]$  区间, 阻尼系数较小时 ( $\gamma = 0$ ,  $\gamma = 0.01\omega_p$ ), 存在很多平坦的曲线, 在这些曲线上群速  $\frac{d\omega}{dk_r}$  为零, 为表面等离子体激元模. 为更清楚地展现这些平坦的曲线, 将图3和图4 在归一化频率区间  $[0.51 \ 0.85]$   $\gamma = 0$  和  $\gamma = 0.01\omega_p$  对应的一部分色散曲线放大置于图5.

由图3、图4和图5可以看出, 当阻尼系数较小 ( $\gamma = 0$ ,  $\gamma = 0.01\omega_p$ ) 时, 色散曲线在归一化频率  $[0.51 \ 0.85]$  区间震荡十分剧烈, 当  $\gamma = 0.1\omega_p$  时, 色散曲线整体则较为平滑. 另外注意到, 无耗 ( $\gamma = 0$ ) 情况下, 在禁带区实部  $k_r$  取值为不可约布里渊区的边界, 即  $k_r = \frac{\pi}{a}$ . 而在有耗情况下, 相应的色散曲线到不了不可约布里渊区的边界, 或者仅有一个频点触碰到边界, 这一现象可以在图5(a) 以及图6中看到. 无耗情况下,  $k_r$  在整个禁带区取值都为  $\frac{\pi}{a}$ , 且群速为无穷大. 相应地, 在有耗情况下,  $k_r$  在整个禁带区仅在一频点上群速无穷大, 且该频点对应的  $k_r$  的值小于等于  $\frac{\pi}{a}$  (和损耗相关). 图5同时表明阻尼系数越小, 色散曲线在表面等离子体激元频率区间震荡越大.

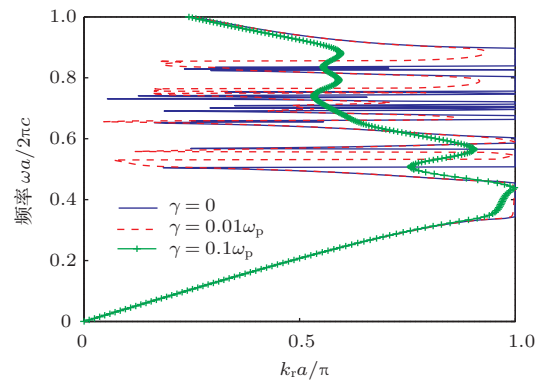


图3 (网刊彩色) 归一化频率与沿  $\Gamma-M$  方向 ( $k_x = 0$ ) 计算得到  $k_y$  的实部  $k_r$  在不同  $\gamma$  下的色散关系, 方柱边长为  $0.4a$

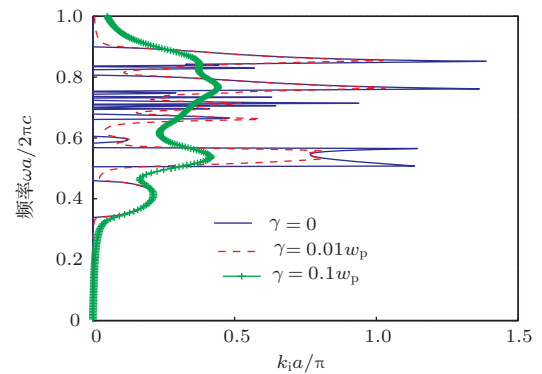


图4 (网刊彩色) 归一化频率与沿  $\Gamma-M$  方向 ( $k_x = 0$ ) 计算得到  $k_y$  的虚部  $k_i$  在不同  $\gamma$  下的色散关系, 方柱边长为  $0.4a$



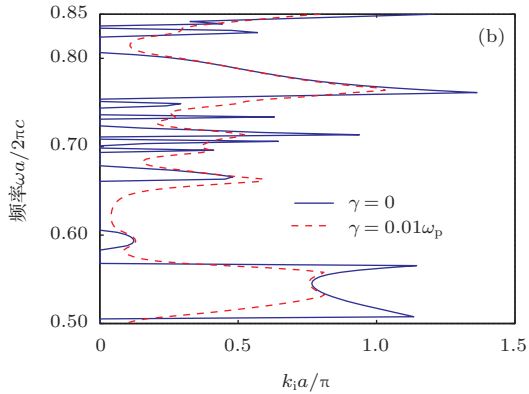
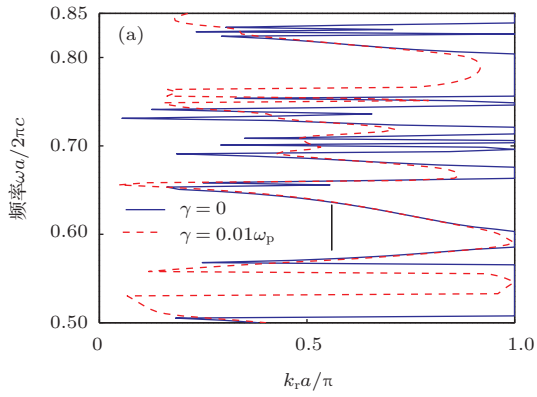


图5 归一化频率区间 [0.51 0.85]  $\gamma = 0$  和  $\gamma = 0.01\omega_p$  对应的色散曲线 (a) 实部; (b) 虚部

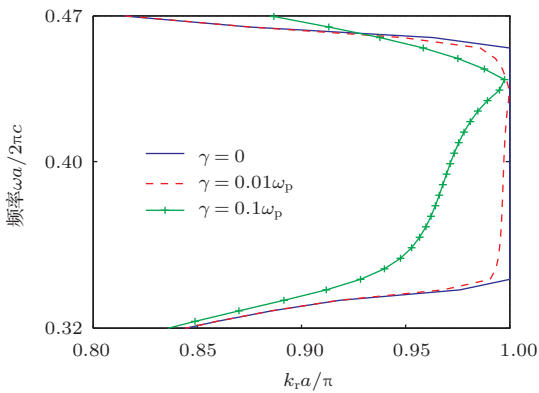


图6 光子禁带区色散曲线放大图

为了研究那些平坦的曲线背后的物理, 以及进一步讨论损耗对光子晶体本征模场分布的影响, 下面从其对应的场分布展开分析. 图7、图8和图9给出了在归一化频率0.701 (对应表面等离子体激发频率) 下磁场  $H_z$  的场分布, 分别对应  $\gamma = 0$ ,  $\gamma = 0.01\omega_p$ ,  $\gamma = 0.1\omega_p$  的情况, 磁场由三者最大绝对值归一化. 因为表面等离子体激发是一种表面波, 其场强的最大值集中在方柱和空气的接触面, 而且向两边指数衰减, 图7、图8和图9都能很好地说明这个特性. 而随着损耗  $\gamma$  的增大, 场分布的对称性被破坏 (如图9) 且趋于集中在一个方向上. 与

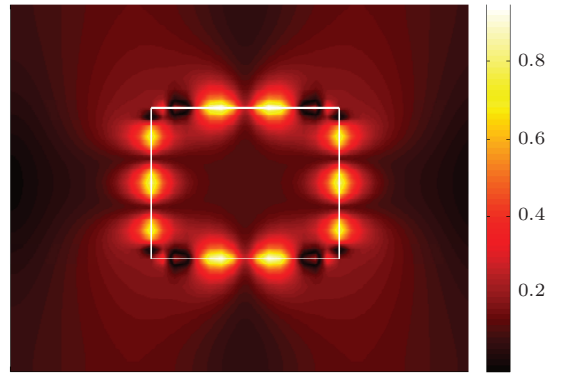


图7 (网刊彩色) 归一化频率0.701下磁场  $H_z$  (归一化) 场分布  $\gamma = 0.001\omega_p$

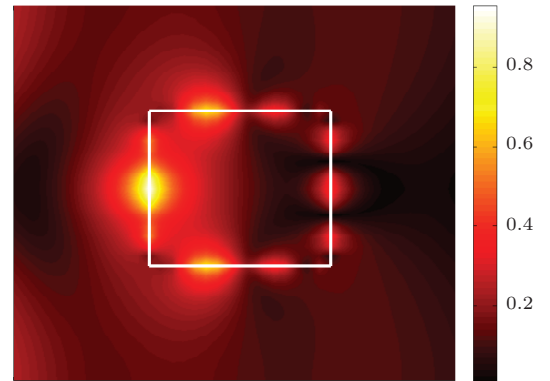


图8 (网刊彩色) 归一化频率0.701下磁场  $H_z$  (归一化) 场分布  $\gamma = 0.01\omega_p$

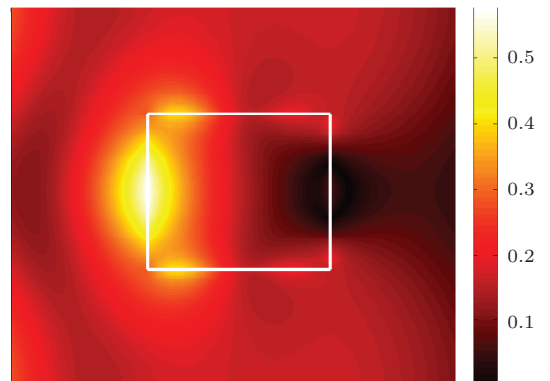


图9 (网刊彩色) 归一化频率0.701下磁场  $H_z$  (归一化) 场分布  $\gamma = 0.1\omega_p$

$\gamma = 0.1\omega_p$  时磁场分布 (图9) 相比, 无损耗或者损耗较小时磁场分布 (图7) 更集中在方柱与空气的接触面上, 说明无损耗或者损耗较小时, 场的分布更集中. 另外由图7、图8和图9可以看出, 随着损耗  $\gamma$  的增大场强变小, 说明损耗大电磁能量的消耗也大. 图10给出了由  $Q = \frac{k_r}{k_i}$  定义的本征模的品质因数随归一化频率变化的曲线. 由图可以看出, 损耗越小品质因数越大. 因为无损耗情况下的  $Q$  值为

无穷大, 图 10 仅给出了有损耗时的  $Q$  值, 图中峰值对应于图 4 中虚部最小值点, 这也可以由  $Q$  值的表达式可以看出.

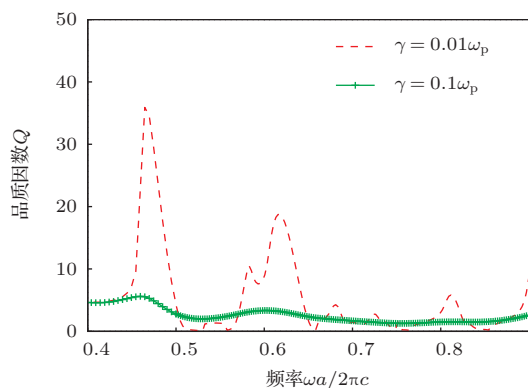


图 10 品质因数  $Q$

## 4 结 论

与介质光子晶体相比, 有耗色散光子晶体在电磁波控制方面有着更为广阔的应用前景. 本征值方法是计算光子带隙的重要方法, 本文借助于量子输运问题中的思想, 在本征值方程的推导过程中进行了巧妙的变换, 使得最后只需利用 FDFD 方法求解一个标准的线性本征值方程, 避免了求解复杂的非线性本征值问题, 节省了计算时间以及计算所需内存量. 在数值计算和结果分析中, 首先通过对介质光子晶体的仿真, 验证了本文算法的有效性. 随后利用本文算法对有耗色散光子晶体进行了数值模拟, 其中利用 Drude 模型表征有耗色散材料的复相对介电常数, 计算了有耗色散光子晶体的色散曲线, 得到了表面等离子体激发的区域. 进一步讨论了损耗对其色散关系的影响, 结果表明, 损耗小则场分布较为集中, 且具有对称性. 本文相关结果对有耗色散材料构成的光子晶体的研究具有一定的理论指导意义.

## 参考文献

[1] Johu S 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 2486  
 [2] Yablonovitch E 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 2059

[3] Winn J N, Fink S, Joannopoulos J D 1998 *Opt. Lett.* **23** 1573  
 [4] Joannopoulos J D, Villeneuve P R, Fan S 1997 *Nature* **386** 143  
 [5] Wang D, Xu S, Cao Y W, Qin F 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 018401 (in Chinese) [王冬, 徐莎, 曹延伟, 秦奋 2014 物理学报 **63** 018401]  
 [6] Huang Z X, Koschny T, Soukoulis C M 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 187402  
 [7] Painter O, Lee R K, Scherer A, Yariv A, O'Brien J D, Dapkus P D, Kim I 1999 *Science* **284** 1819  
 [8] Noda S, Chutinan A, Imada M 2000 *Nature* **407** 608  
 [9] Fan S H, Johnson S G, Joannopoulos J D, Manolatos C, Haus H A 2001 *J. Opt. Soc. Am. B* **18** 162  
 [10] Yang H Y D 1996 *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **44** 2688  
 [11] Joannopoulos J D, Johnson S G, Winn J N, Meade R D 2008 *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light* (New Jersey: Princeton University Press) pp10–12, 252–258  
 [12] Sakoda K 2001 *Optical Properties of Photonic Crystal* ser. Optical Sciences (New York: Springer Press) pp151–154, 13–21  
 [13] Jiang B, Zhang Y J, Wang Y F, Zheng W H 2012 *J. Appl. Phys.* **112** 033112  
 [14] Davanco M, Urzhumov Y, Shvets G 2007 *Opt. Express* **15** 9681  
 [15] Fietz C, Urzhumov Y, Shvets G 2011 *Opt. Express* **19** 19027  
 [16] Ruhe A 1973 *SIAM J. Numer. Anal.* **10** 674  
 [17] Shvets G, Urzhumov Y A 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 243902  
 [18] Guo S P, Wu F, Albin S, Rogowski R S 2004 *Opt. Express* **12** 1741  
 [19] Raman A, Fan S H 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 087401  
 [20] Wang H, Wu B, Huang Z X, Wu X L 2014 *Comput. Phys. Commun.* **185** 862  
 [21] Wang H, Huang Z X, Wu X L, Ren X G 2011 *Chin. Phys. B* **20** 114701  
 [22] Qiu M, He S L 2000 *J. Appl. Phys.* **87** 8268  
 [23] Luisier M, Schenk A, Fichtner W, Klimeck G 2006 *Phys. Rev. B* **74** 205323  
 [24] Qiao P F, Sha W E I, Choy W C H, Chew W C 2011 *Phys. Rev. A* **83** 043824  
 [25] Fung K H, Tang R C H, Chan C T 2011 *Opt. Lett.* **36** 2206  
 [26] Huang X, Hang Z H, Zheng H, Chan C T 2011 *Nature Mat.* **10** 582  
 [27] Sha W E I, Choy W C H, Chew W C 2010 *Opt. Express* **18** 5993

# A novel eigenvalue method for calculating the band structure of lossy and dispersive photonic crystals\*

Wang Hui<sup>1)3)</sup> Sha Wei E. I.<sup>2)†</sup> Huang Zhi-Xiang<sup>3)‡</sup> Wu Xian-Liang<sup>1)3)</sup> Shen Jing<sup>1)</sup>

1) (School of Electronic and Information Engineering, Hefei Normal University, Hefei 230061, China)

2) (Department of Electrical and Electronic Engineering, The University of Hong Kong, Pokfulam Road, Hong Kong, China)

3) (Key Laboratory of Intelligent Computing and Signal Processing, Ministry of Education, Anhui University, Hefei 230039, China)

( Received 18 April 2014; revised manuscript received 16 May 2014 )

## Abstract

A novel eigenvalue method is proposed to calculate the band structure of lossy and dispersive photonic crystal (PC). Using an idea from quantum transport problem, a standard linear eigenvalue equation rather than a nonlinear eigenvalue equation is obtained by a rigorous and artful transformation. And the physical parameters of lossy and dispersive PC are obtained by solving the linear eigenvalue equation using finite-difference frequency-domain (FDFD) method. Compared with other methods, the proposed method has great features, such as clear concept, simple calculation, less computing time and storage. A dielectric PC is simulated by the proposed method, and the results accord well with those from the traditional FDFD method, which verifies the validity of the proposed method. Moreover, the dispersion relation of the lossy and dispersive PC is calculated by the proposed method, and the surface plasmon frequency is obtained. Furthermore, the influence of loss on the dispersion relation and eigenmode field distribution is studied. The results provide some theoretical guidance for studying the lossy and dispersive PC.

**Keywords:** photonic crystals with lossy and dispersive materials, band structure, linear eigenvalue equation

**PACS:** 42.70.Qs, 73.20.At, 78.20.Bh

**DOI:** 10.7498/aps.63.184210

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 51277001, 61101064, 61301062), the Program for New Century Talents in University of Ministry of Education of China (Grant No. NCET-12-0596), the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20123401110009), the Fund for Distinguished Young Scholars of Anhui Province, China (Grant No. 1108085J01), and the Key Program of the Higher Education Institutions of Anhui Province, China (Grant No. KJ2012A103).

† Corresponding author. E-mail: [wsha@eee.hku.hk](mailto:wsha@eee.hku.hk)

‡ Corresponding author. E-mail: [zxhuang@ahu.edu.cn](mailto:zxhuang@ahu.edu.cn)