基于Hilbert变换实现数字全息高精度相位重建*

范锋¹⁾ 栗军香²⁾ 宋修法¹⁾ 朱巧芬¹⁾ 王华英¹⁾

1) (河北工程大学理学院, 邯郸 056038)

2) (河北工程大学临床医学院, 邯郸 056002)

(2014年4月30日收到;2014年6月6日收到修改稿)

为了提高数字全息相位重建精度,研究了基于Hilbert 变换重建相位的理论和方法,并通过像面数字全息实验对该方法的有效性进行了验证,同时与数字全息常规重建方法得到的结果进行了比较.结果表明:Hilbert 变换本身具有消除直流项的作用,对利用频域滤波滤除零级谱后的全息图进行Hilbert 变换,能够彻底消除零级衍射项的干扰,从而提高相位重建精度.与常规重建结果相比,基于Hilbert 变换的相位重建结果的标准偏差降低了14.0%.本文结果对提高数字全息相位重建精度具有重要的指导意义.

关键词: 数字全息术, 像面数字全息术, Hilbert 变换, 相位重建

PACS: 42.30.Kq, 42.40.Kw, 42.30.-d **DOI:** 10.7498/aps.63.194207

1 引 言

数字全息显微术是一种新型的定量成像与可视化测量技术^[1],它实现了光学、光电转换技术、计算机技术的高度融合,是一种全场、非接触、准实时三维成像技术.利用该技术可以获得物体定量的相位信息,并可以灵活地进行存储、传输、滤波、自动聚焦、相位畸变补偿及多视角显示等,上述诸多优点使数字全息显微术获得了广泛的应用^[2-7].

数字全息术基于干涉成像技术,因而相对于其他测量技术来说,其相位测量的精度比较高.然而,由于受到散斑及零级衍射噪声的影响,使得基于傅里叶变换的常规重建算法在相位重建中的多个环节受到噪声干扰,一方面降低了相位重建的精度,同时影响了相位重建的速度[8].为了降低散斑噪声的影响,多种降噪方法和技术被提了出来,其中具有代表性的方法有基于多幅全息图叠加的降噪技术[9]和选用短相干光源降低散斑噪声的技术[10].然而,第一种方法根本不能用于实时相位成像,第

二种方法使得再现像的对比度大幅度下降, 更为重 要的是,这两种方法都没有从根本上解决噪声的影 响问题[9,10]. 对于零级衍射项的消除, 频域滤波是 最常用的方法, 但这种方法只适用于离轴数字全息 情况,同时还存在噪声滤除不彻底的问题[11].文 献[12]提出了一种基于同态信号处理的非线性重 建方法,该方法能从原理上彻底消除零级衍射项的 影响, 提高相位测量精度, 同时作者还建立了所提 方法与Hilbert 变换之间的直接联系, 这间接地表 明了基于Hilbert变换的方法具有较高的相位重建 精度. 潘卫清等提出了利用 Hilbert 变换重建基于 单幅同轴数字全息图的相位重建方法, 该方法同样 从原理上消除了零级衍射项及不需要的一级衍射 像[13] 但以上两种方法都存在需要额外记录参考 光强度及仅适用于参考光强度远大于物光强度的 问题. 文献[14]提出了基于自适应二元模板的两次 Hilbert 变换重建全息图的方法, 重建过程比较复 杂. 文献 [15] 基于 Hilbert 变换本身具有滤除直流 项的作用,提出了直接利用两次Hilbert 变换实现 单幅同轴数字全息图的二步相移重建, 不过, 从文

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 61077001和61144005),河北省自然科学基金(批准号: F2010001038, A2013402036和 F2014402090),河北省科技支撑计划(批准号: 09277101D)和河北省教育厅科技计划重点项目(批准号: ZH2011241)资助的课题.

[†]通讯作者. E-mail: pbxsyingzi@126.com

中结果可以看出噪声的影响仍然比较大. 本课题组近期研究发现,对离轴数字全息图进行频域滤波后,利用Hilbert变换重建相位信息,可以大幅度提高相位测量的精度. 截至目前,对利用Hilbert变换重建像面数字全息图以及利用该方法能够提高相位重建精度的研究还未见报道.

本文首先对基于Hilbert 变换的全息图相位重 建理论和方法进行分析,并通过实验数据与基于傅 里叶变换的常规重建方法获得的结果进行比较,以 验证理论分析的正确性.

2 相位重构原理

2.1 数字全息图的记录

图1所示为等曲率物、参光数字全息显微记录 系统示意图. 由波长 $\lambda = 623.8 \text{ nm}$ 、功率P = 60mW的He-Ne激光器发出的细光束经半波片后由 偏振分束器 PBS 分成两束, 并分别经过扩束准直系 统BE₁和BE₂后转变成两束平行光,其中从PBS 中透射出的光束作为物光, 反射的光束作为参考 光. 两个完全相同的显微物镜 MO₁ 和 MO₂ 分别置 于物光路和参考光路中,一个用于放大物体,另一 个则用于形成球面参考光波. 两束光通过棱镜BS 进行合束并产生干涉,形成连续的干涉光波场,被 位于像平面的光电耦合器件 CCD 进行抽样及离散, 形成数字全息图, 然后送入计算机进行数值再现. 实验中需精心调整 MO₂ 的位置, 使 MO₁ 和 MO₂ 到 分束器BS中心距离相等,以彻底消除MO1对物体 引入的二次相位畸变. 通过调整BS的方位即可实 现全息图的离轴记录. 实验中采用的MO参数规格 为: 放大倍数为40, 数值孔径为0.65, 焦距为4.65 mm, 此MO的理论极限分辨率为0.59 µm; CCD的 参数规格为: 像素尺寸为4.65 μm×4.65 μm、像素 数为1392×1032, 16 bit 级灰度输出. 根据像面数 字全息术的特点, 再现像的分辨率与全息图大小无 关[8], 因此, 为了提高重建速度, 常将记录的全息图 裁剪为1024×1024或者512×512进行重建.

用 x-y 表示 CCD 平面的坐标, 其原点位于 C-CD 光敏面中心. 设物光和参考光在此平面形成的光场复振幅分别为

$$O(x, y) = O_0(x, y) \exp[j\varphi_o(x, y)]$$

和

$$R(x,y) = R_0(x,y) \exp[j\varphi_r(x,y)],$$

则CCD平面形成的连续干涉场分布为

$$\begin{split} &I(x,y) \\ = &|O(x,y) + R(x,y)|^2 \\ = &|O(x,y)|^2 + |R(x,y)|^2 \\ &+ O(x,y)R^*(x,y) + O^*(x,y)R(x,y) \\ = &a(x,y) + b(x,y)\cos[\varphi_{\mathbf{o}}(x,y) - \varphi_{\mathbf{r}}(x,y)], \quad (1) \end{split}$$

式中 $O^*(x,y)$, $R^*(x,y)$ 分别表示物光波和参考光波的复共轭光波, $a(x,y) = O_0^2(x,y) + R_0^2(x,y)$ 为零级项,即直流项; $b(x,y) = 2O_0(x,y)R_0(x,y)$ 为+1和-1级项之和所形成的条纹的振幅分布.可见,物光场的波前信息以干涉条纹的形状、疏密及强度分布被编码中全息图中.

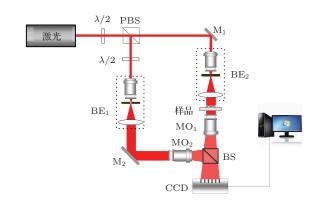


图 1 等曲率物参光像面数字全息记录系统示意图

实验中物光与参考光之间的夹角大小需要根据光路中各元件的记录参数进行调整, 使全息图频谱中0级与+1、-1级恰好分离即可. 为了保证光路中 MO_1 和 MO_2 所产生的球面光波相对于CCD具有相等的曲率半径, 可以在不放样品的条件下, 精调 MO_2 的位置使得记录的全息图条纹为直线即可.

2.2 全息图的常规重建

全息图的常规重建是基于傅里叶变换实现的.对于像面数字全息术,采用准直光波C(x,y)=1照射全息图,即可得到物体清晰的再现像.为了消除再现像中零级像和负一级像的干扰,必须对全息图的频谱进行滤波处理.根据角谱衍射公式,像面数字全息图再现时,由于无需衍射传播计算,因此得

到如下的原始像光场复振幅分布:

 $U_{+1}(x,y) = \mathrm{FT}^{-1}\{\mathrm{FT}[I(x,y)]W_{+1}(f_x,f_y)\},$ (2) 其中, FT和FT⁻¹分别表示二维傅里叶变换及其逆变换, $W_{+1}(f_x,f_y)$ 为频域滤波透明窗函数. 可见, 像面数字全息的再现过程实质上是从所记录的数字全息图频谱中滤出 +1 级谱, 然后再对其进行逆傅里叶变换即可. 由 (2) 式, 可以得到再现像光场的包裹相位分布

$$\varphi_{o}(x,y) = \arctan\left\{\frac{\operatorname{Im}[U_{+1}(x,y)]}{\operatorname{Re}[U_{+1}(x,y)]}\right\} + \varphi_{r}(x,y).$$
(3)

理论上, $\varphi_{\mathbf{r}}(x,y)$ 可以通过实验得到, 但由于通过实验获得的参考光相位数据误差太大, 根本无法满足数字全息高精度测量要求. 实际上, 由于物光和由反射镜 \mathbf{M}_2 反射的平面参考光在显微物镜作用下发生了相同的波面弯曲, 显微物镜对它们所附加的二次相位因子完全被抵消, 只存在由于离轴记录而引入的线性相位畸变. 也就是说, 可以等效地认为(3) 式中的参考光相位是x,y 的线性分布, 该线性相位畸变可以通过提取样品中一个平坦区域的相位数据进行线性拟合后自动获得补偿 [16]. 前期大量的理论和实验研究已经表明, 基于横向剪切的最小二乘相位解包裹算法是数字全息显微中较为理想的相位解包裹方法 [17], 以下对实验数据处理中即采用此方法.

2.3 基于Hilbert 变换的相位重构

为了简洁起见,以下分析只写出各量的一维形式. 对空域信号u(x),其Hilbert变换可表示为

$$w(x) = \frac{1}{\pi x} * u(x), \tag{4}$$

式中符号*表示卷积运算. 在频域内, Hilbert 变换 关系可表示为

$$W(f) = \begin{cases} -jU(f), & f > 0, \\ jU(f), & f < 0, \end{cases}$$
 (5)

其中, W(f) 和 U(f) 分别是 w(x) 和 u(x) 的傅里叶变换, j是虚数单位. 由 (5) 式可知, 求一个实函数 u(x) 的 Hilbert 变换, 就是将 u(x) 的所有正频率成份相位旋转 $-\pi/2$ 、对所有负频率成份相位旋转 $+\pi/2$. 因此, $\cos(2\pi fx)$ 的 Hilbert 即为 $\sin(2\pi fx)$. 此外, Hilbert 变换还具有如下性质:

若函数 $b(x)\cos(2\pi fx)$ 中b(x)频率相对较低,则其Hilbert变换为 $b(x)\sin(2\pi fx)$ [14,15]. 根据此性质,我们可以按照下面的步骤进行相位重建.

对 (1) 式进行傅里叶变换, 然后进行频谱滤波 将 0 级项滤除, 最后对滤波后的频谱进行逆傅里叶变换, 则可得到滤除直流项后的全息图如下:

$$I_1(x,y) = b(x,y)\cos[\varphi_0(x,y) - \varphi_r(x,y)].$$
 (6)

由于 (6) 式中 b(x,y) 相对于 $\varphi_o(x,y) - \varphi_r(x,y)$ 部分频率要低得多, 因此, 根据 Hilbert 变换的性质, 对 (6) 式两边作 Hilbert 变换, 得到

$$I_2(x,y) = H\{I_1(x,y)\}$$

= $b(x,y)\sin[\varphi_o(x,y) - \varphi_r(x,y)], \qquad (7)$

式中H表示二维Hilbert变换. 由(6)式和(7)式构造如下解析信号:

$$Z(x,y) = I_1(x,y) + jI_2(x,y)$$

$$= b(x,y) \{ \cos[\varphi_0(x,y) - \varphi_r(x,y)] + j \sin[\varphi_0(x,y) - \varphi_r(x,y)] \}.$$
(8)

由(8)式可以求出像光场的包裹相位分布

$$\varphi_{o}(x,y) = \arctan \left\{ \frac{\operatorname{Im}[Z(x,y)]}{\operatorname{Re}[Z(x,y)]} \right\} + \varphi_{r}(x,y).$$
(9)

对(9)式进行相位解包裹及线性相位畸变补偿,即可得到物体的相位分布.

根据上面的分析可见, 两种重建方法都需要对 全息图频谱进行滤波处理, 都需要滤除零级衍射 项, 这是它们的共同之处. 由于实际的物体都不是 带限的, 因而频域滤波并不能将全息图的零级谱彻 底滤除, 这必将对数字全息一级像的重建造成直接 影响. 此外, 无论采取哪种重建方法, 数字全息相 位重建中首先得到的是再现光场的包裹相位, 而且 往往是发生了畸变的相位, 因此, 得到包裹相位后 通常还需要对其进行解包裹以及相位畸变补偿. 上 述残余的零级衍射噪声不仅会对相位解包裹及畸 变补偿的精度造成影响,还会使这两种运算过程变 慢. 然而, 由于Hilbert 变换本身具有消除直流项 (即零级衍射项)的作用,经过频域滤波后的全息图 虽然包含有少量残余的直流项, 但经过 Hilbert 变 换后, 这些残余的直流成分就被彻底消除了. 因而, 与基于傅里叶变换的常规重建方法相比, 文中所提 基于Hilbert变换的数字全息重建方法具有更高的 相位重建精度.

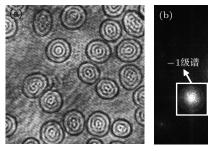
3 实验结果及分析

3.1 基于常规重建的结果

利用图1所示光路对人体血红细胞进行像面数字全息记录.图2(a)是从所记录的全息图中心部分裁剪得到的512×512大小全息图,图2(b)是(a)的频谱图.

利用透明窗函数将图2(b)中矩形框内的+1级谱滤出,然后进行相位重建.图3(a)是畸变矫正前的包裹相位,由放大图可见,相位发生了线性畸变.经畸变补偿后得到了无畸变的包裹位相,如

图 3 (b) 所示. 图 3 (c) 是利用基于横向剪切的最小二乘算法 [14] 得到的展开相位,图 3 (d) 是图 3 (c) 的三维显示.



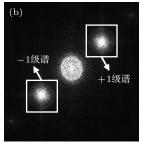
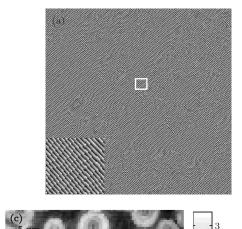
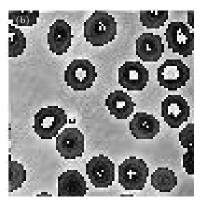
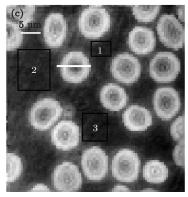


图 2 人体血红细胞的实验结果 (a) 全息图; (b) 全息图 频谱







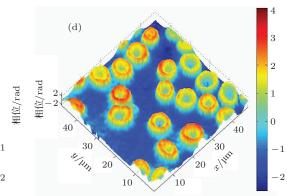


图 3 (网刊彩色) 基于常规重建算法获得的相位 (a) 畸变校正前的包裹相位; (b) 畸变校正后的包裹相位; (c)(a) 的展开相位; (d)(c) 的三维显示

3.2 基于 Hilbert 变换重建的结果

利用基于Hilbert 变换的相位重建方法对图2(a) 所示的全息图进行重建, 重建中首先将图2(b) 矩形框中的+1和-1级谱滤出, 获得滤除0级后的全息图, 如图4(a) 所示. 然后对图4(a) 作Hilbert 变换获得解析函数的虚部, 如图4(b) 所示. 比较图4(a)和(b), 未发现有明显的差别, 但通过比较图中左下角区域的放大图, 可以看出二者之间的细微差异. 图4(c) 是获得的再现像光场含有畸

变的包裹相位分布,同样,利用线性相位畸变补偿方法和基于横向剪切的最小二乘法进行畸变补偿和相位解包裹,得到无畸变的包裹相位和展开位相分布如图4(d),(e)所示.图4(f)给出了图4(e)的三维显示结果.比较图3(d)与图4(f),可见图3(d)中的载玻片稍有倾斜,这是由于噪声导致的相位畸变误差造成的.

为了更为直观地比较以上两种算法对相位重建的差异,分别作出了图3(c)和4(e)中同一个细胞的中心线上的相位分布图,结果如图5所示.可

见,由Hilbert变换算法得到的位相图中最大与最小相位差值较大.

为了定量比较两种算法对相位重建的精度,我们在重构的二维相位图 3(c)和 4(e)中分别选取三个不含有细胞信息的矩形区域,计算其标准偏差.下式是标准偏差的计算公式:

$$S = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (\varphi_{0i} - \bar{\varphi}_{0})^{2}}, \qquad (10)$$

式中, $\bar{\varphi}_{o}$ 为所选择的区域相位数据的平局值.根据 (10)式,分别对这些矩形区域进行了计算,结果

表1所示.

由表1可以明显看出,无论对于哪个区域,由基于Hilbert变换的重构方法得到的标准偏差均比由常规傅里叶变换方法得到的标准偏差要小. 这表

表1 标准偏差对比数据

标准偏差	希尔伯特变换法	常规傅里叶变换法
区域1	0.2481	0.2827
区域2	0.1689	0.1816
区域3	0.2252	0.2914

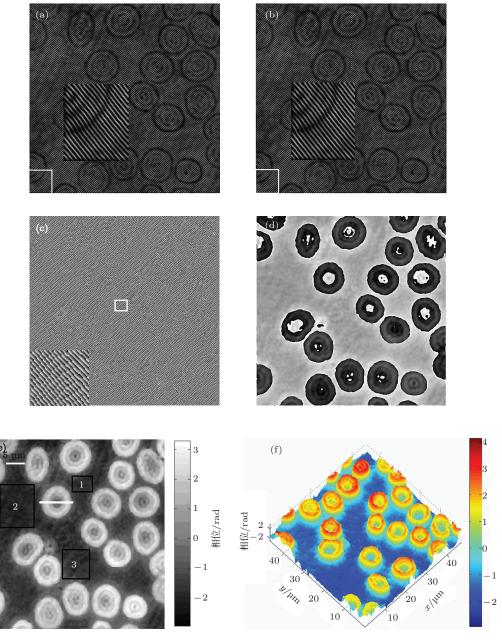


图 4 (网刊彩色) 基于 Hilbert 变换重建的相位 (a) 滤除 0 级项后的全息图; (b) 解析函数的虚部; (c) 畸变校正前的包裹相位; (d) 畸变校正后的包裹相位; (e),(d) 的展开相位; (f),(e) 的三维显示

明基于 Hilbert 变换的方法比常规傅里叶变换方法 获得的相位精度高. 将表中数据进行平均, 可得到 如下结果: 与常规重建结果相比, 基于 Hilbert 变换 的相位重建结果的标准偏差降低了 14.0%.

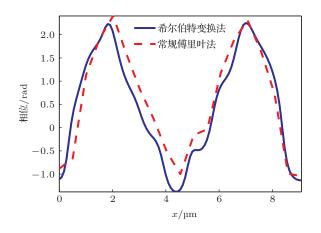


图 5 细胞相位的一维分布

为了进一步比较两种重建方法的优劣,利用相同的光路对中药饮片海金沙细胞作了实验研究.图 6(a),(b)是所记录的全息图及其频谱分布,其中全息图大小为1024×1024.图7和图8是分别利用常规方法和基于Hilbert变换方法得到的结果.由图7和图8中(a),(b)可见,由于全息图记录之前需

要对海金沙细胞做透化处理,造成细胞周围存在液体的包围,影响了细胞本身形态的显示效果.通过边缘识别技术消除了细胞周围液体的影响,提高了显示效果.

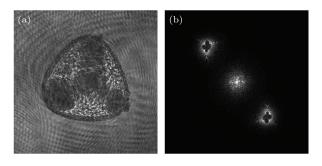


图 6 海金沙细胞的全息图及频谱 (a) 全息图; (b) 全息图频谱

图 9 是图 7 (c) 和图 8 (c) 中白色线条上细胞相位的一维分布曲线,显见,两种方法得到的相位分布曲线非常相似,但在细胞中心由 Hilbert 算法得到的相位高度略高.这与血细胞情况得到的结论是一致的.此外,在图 7 (a) 和 8 (a) 中分别选取几个平坦区域计算其标准偏差,同样得到了基于 Hilbert变换的算法比基于傅里叶变换的常规方法获得的相位精度高的结论.

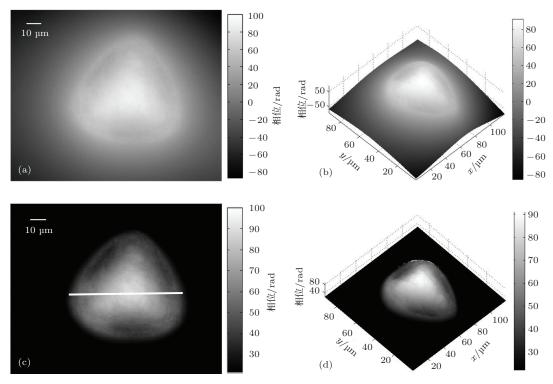


图 7 常规重建得到的海金沙细胞实验结果 (a) 展开相位的二维分布; (b)(a) 的三维显示; (c) 除去细胞周围液体影响后的二维相位; (d)(c) 的三维显示

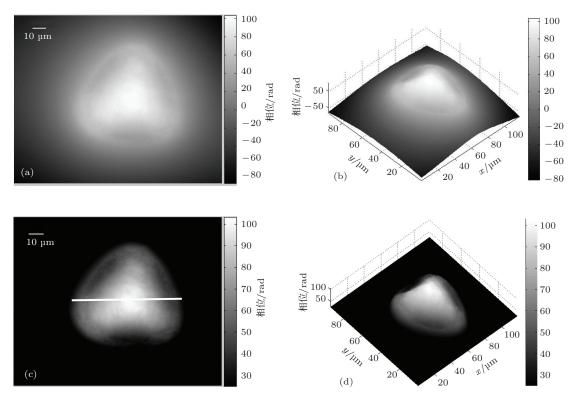


图 8 基于 Hilbert 变换得到的海金沙细胞实验结果 (a) 展开相位的二维分布; (b)(a) 的三维显示; (c) 除去细胞周围液体影响后的二维相位; (d)(c) 的三维显示

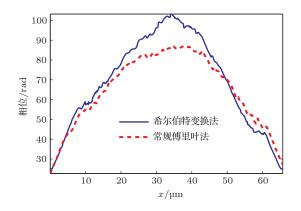


图 9 细胞相位的一维分布

4 结 论

本文主要分析了基于 Hilbert 变换重构数字全息相位的相关理论和方法,并进行了实验验证. 利用建立的像面数字全息显微系统,对人体血红细胞和中药饮片海金沙细胞进行了实验研究,通过实验数据对基于 Hilbert 变换的相位重建方法与基于傅里叶变换的常规重建方法进行了比较. 结果表明:由于 Hilbert 变换本身具有消除直流项的作用,对频域滤波后的全息图进行 Hilbert 变换能够进一步消除零级衍射项的影响,因而能够获得更高精度的相位图像. 与基于傅里叶变换的常规重建算法相

比, 文中对于血细胞的实验中, 基于 Hilbert 变换的相位重建结果的标准偏差降低了 14.0%. 本文结果对提高数字全息相位测量精度的研究具有重要的指导意义.

参考文献

- [1] Hao Y, Asundi A 2011 Appl. Opt. 50 183
- [2] Das B, Yelleswarapu C S, Rao L N 2012 Appl. Opt. 51 1387
- [3] Hu H F, Wang X L, Gguo W G, Zhai H C, Wang P 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 017901 (in Chinese) [胡浩丰, 王晓雷, 郭文刚, 翟宏琛, 王攀 2011 物理学报 **60** 017901]
- [4] Li J C, Lou Y L, Gui Z B, Peng Z J, Song Q H 2013
 Acta Phys. Sin. 62 124203 (in Chinese) [李俊昌, 楼宇丽, 桂进赋, 彭祖杰, 宋庆和 2013 物理学报 62 124203]
- [5] Zhang Y Z, Guohai S, Giancarlo P, Wang D Y, Bahram J, Wolfgang O 2013 Opt. Commun. 286 56
- $[6]\$ Granero L, Zzlevsky Z, Mico V 2011 $Opt.\ Lett.\ {\bf 17}\ 1149$
- $[7]\;$ Hussain A, Mudassar A A 2012 Opt. Commun. 285 2303
- [8] Wang H Y, Ma J, Yuan C 2013 J. Opt. Commun. 307 50
- [9] Li Y, Xiao W, Pan F, Rong L 2013 Hig. Pow. Las. Par. Bea. 25 1345
- [10] Rostami Y, Abolhassani 2013 M. Optik 124 2101
- [11] Ma Z H, Deng L J, Yang Y, Zhai H C, Ge Q 2013 $\ensuremath{\mathit{Opt}}.$ $\ensuremath{\mathit{Exp.}}$ 21 28314

- [12] Chandra S S, Nicolas P, Christian D, Michael U 2011 J. Opt. Soc. Ame. 28 983
- [13] Pan W Q, Lu W, Zhu Y J, Wang J Z 2009 Chin. Opt.
 Lett. 7 1
- [14] Xiong L D, Jia S H 2010 *Acta Pho. Sin.* **39** 1678 (in Chinese) [熊六东, 贾书海, 杜艳芬 2010 光子学报 **39** 1678]
- [15] Hou R N 2013 *Las. Tech* **37** 362 (in Chinese) [侯瑞宁 2013 激光技术 **37** 362]
- [16] Wang H Y, Zhang Z H, Liao W, Song X F, Guo Z J, Liu F F 2012 *Acta. Phys. Sin.* **61** 250 (in Chinese) [王华英, 张志会, 廖薇, 宋修法, 郭中甲, 刘飞飞 2012 物理学报 **61** 250]
- [17] Wang H Y, Zhang Z H, Liao W, Guo Z J, Liu F F 2012 J. Opt. Laser 23 402 (in Chinese) [王华英, 张志会, 廖薇, 郭中甲, 刘飞飞 2012 光电子激光 23 402]

High accuracy phase reconstruction of digital hologram by Hilbert transform*

Fan Feng¹⁾ Li Jun-Xiang²⁾ Song Xiu-Fa¹⁾ Zu Qiao-Fen¹⁾ Wang Hua-Ying^{1)†}

1) (College of Science, Hebei University of Engineering, Handan 056038, China)

2) (College of Clinical Medicine, Hebei University of Engineering, Handan 056002, China)

(Received 30 April 2014; revised manuscript received 6 June 2014)

Abstract

To improve the phase accuracy of the reconstructed image of the digital hologram, we investigate the theory and method of the phase reconstruction based on the Hilbert transform, then, verify it by the image plane digital holographic experiment, and finally, compare it with the conventional digital holographic reconstruction method. Results show that Hilbert transform itself posseses the effect of eliminating DC term, therefore the effect of the zero-order frequency spectrum of the hologram which is filtered by frequency domain can be completely eliminated by Hilbert transform. Compared with the conventional Fourier reconstruction method, the accuracy of the phase image can be improved by the reconstruction method based on Hilbert transform, and the standard deviation of the phase image is reduced by 14% in the experiment of red blood cell. This result has an important guiding significance to improve the accuracy of the digital holographic phase reconstruction.

Keywords: digital holography, image-plane digital holography, Hilbert transform, phase reconstruction

PACS: 42.30.Kq, 42.40.Kw, 42.30.-d DOI: 10.7498/aps.63.194207

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61077001, 61144005), the Natural Science Foundation of Hebei Province, China (Grant Nos. F2010001038, A2013402036, F2014402090), the Key Technology Research and Development Program of Hebei Province, China (Grant No. 09277101D), and the Key Project of Education Department of Hebei Province (Grant No. ZH2011241).

[†] Corresponding author. E-mail: pbxsyingzi@126.com