

# 基于拉普拉斯方程的任意形状热斗篷研究与设计\*

秦春雷<sup>1)</sup> 杨晶晶<sup>1)</sup> 黄铭<sup>1)†</sup> 胡艺耀<sup>2)</sup>

1)(云南大学无线创新实验室, 信息学院, 昆明 650091)

2)(电子科技大学电子工程学院, 成都 611731)

(2014年5月6日收到; 2014年5月26日收到修改稿)

如何灵活地控制和操纵热流是目前研究的热点. 本文基于拉普拉斯方程提出了一种设计任意形状热斗篷的方法. 对于形状规则的热斗篷, 在特定边界条件下求解拉普拉斯方程得到了斗篷区域材料的热导率分布解析表达式; 对于不规则形状的热斗篷, 通过数值求解拉普拉斯方程得到了斗篷区域材料的热导率参数分布. 全波仿真结果表明, 所设计的二维和三维任意形状热斗篷内部隐身区域的热通量为零, 从而具有热保护功能; 同时, 热流绕过斗篷后温度场恢复原来的分布, 实现了完美隐身功能. 这项研究为解决热斗篷内外边界非共形问题提供了一种可行的方法, 对热保护器件的设计和制备有指导意义.

**关键词:** 热斗篷, 拉普拉斯方程, 任意形状, 超材料

**PACS:** 44.10.+I, 05.70.-a, 81.05.Xj, 07.05.Tp

**DOI:** 10.7498/aps.63.194402

## 1 引言

近年来, 超材料吸引了众多领域科研工作者的关注, 为人们探索新的物理现象、设计新颖器件提供了很多可能<sup>[1-5]</sup>. 2006年, Pendry等<sup>[6]</sup>采用坐标变换方法来设计电磁材料的本构参数, 理论证明了利用异向介质能够灵活地控制电磁波的传播方向. 此后, 许多具有特殊电磁性能的器件被相继提出, 例如电磁斗篷<sup>[7,8]</sup>、超棱镜<sup>[9]</sup>、隐形门<sup>[10]</sup>、透明体<sup>[11]</sup>、外斗篷<sup>[12,13]</sup>等. 与此同时, 作为超材料应用的一个拓展领域, 如何利用超材料实现对热流的操纵是热力学研究的一个热点. 2008年, Fan等<sup>[14]</sup>证明了在一定条件下热传导方程具有形式不变性, 并利用坐标变换原理设计了球形和椭球形热斗篷. 随后 Schittny等<sup>[15]</sup>采用铜和聚二甲硅氧烷制作了二维圆形热斗篷, 并记录斗篷温度分布随着时间的变化, 证实了其热隐身效果. 2012年, Guenneau等<sup>[16]</sup>利用变换光学的思想推导了圆柱形变换媒质热导率的表达式, 在此基础上设计了圆柱形热斗篷

和集中器. 2013年, Yang等<sup>[17]</sup>进一步推导出具有共形任意横截面形状的热斗篷变换媒质热导率表达式, 并仿真分析了其热传导特性. Han等<sup>[18]</sup>利用天然材料交替填充, 通过调整材料的填充率得到各项异性媒质, 在此基础上分别讨论了用两组天然材料制作的圆形热隐身斗篷性能. 最近, Mao等<sup>[19]</sup>对任意横截面柱形热斗篷进行了研究和分析, 导出了二维非共形任意形状热斗篷的热导率表达式, 但这种设计方法的前提是必须准确知道任意形状热斗篷边界的数学解析式, 因此很难用于处理复杂边界形状问题.

因为其独特的热保护功能, 热斗篷在计算机芯片、航天器返回舱、卫星等设备中具有巨大的应用价值. 由于受热传导方程和传播方式的限制, 目前相关文献报道的成果基本上考虑的是圆或椭圆这样高度对称的形状, 或者实现了二维任意形状的斗篷但又要求内外边界共形, 因而都不能用于像内外边界非共形这样具有完全任意形状热斗篷的设计. 在文献<sup>[7]</sup>中, Hu等提出了利用拉普拉斯方程计算电磁斗篷电磁参数分布的方法. 本文将这种思想

\* 国家自然科学基金(批准号: 61161007, 61261002)、云南省自然科学基金重点项目(批准号: 2013FA006)、教育部博士点基金(批准号: 20135301110003, 20125301120009)和中国博士后基金(批准号: 2013M531989)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: [huangming@ynu.edu.cn](mailto:huangming@ynu.edu.cn)

拓展到热力学中,通过分析热传导方程,将媒质的热导率分布与拉普拉斯方程联系起来,在特定边界条件下求解拉普拉斯方程获得了任意形状热斗篷变换媒质热导率分布,并通过全波仿真分析了圆形和横截面非共形的任意形状热斗篷的热传导特性,验证了方法的有效性.由于该方法对设计三维任意形状热斗篷同样适用,因此这项研究有望在热保护器件设计和制备中产生积极的作用.

## 2 理论与方法

在自然界中,热量总是自发地从高温区域扩散至低温区域.这个过程由热传导方程决定,其与热源、温度梯度、媒质热导率和边界条件有关,可表示为

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + Q, \quad (1)$$

式中  $\nabla$  表示梯度算符,  $\rho$ ,  $c$  和  $\kappa$  分别代表媒质的密度、热容量和热导率,  $T$  是温度,  $Q$  为热源. 对无源区域的稳态过程,即  $Q = 0$ ,  $\partial T / \partial t = 0$ , 则(1)式可化简为  $\nabla \cdot (\kappa \nabla T) = 0$ . 由于该方程具有形式不变性,在变换空间中可表示为

$$\nabla' \cdot (\kappa' \nabla' T') = 0, \quad (2)$$

式中  $\kappa'$ ,  $T'$  分别代表变换空间中的温度和媒质热导率,  $\nabla'$  表示变换空间中的梯度算符. 根据变换热力学理论,变换空间与原坐标空间媒质热导率的关系为

$$\kappa' = \frac{A \kappa A^T}{\det(A)}, \quad (3)$$

式中  $A$  是雅可比变换矩阵,体现了原空间到变换空间的几何变化,其分量为  $A_{ij} = \partial x'_i / \partial x_j$ . 这里的  $x_j$  表示原坐标系统的三个坐标分量  $x, y, z$ ;  $x'_i$  表示新坐标系统中的三个坐标分量  $x', y', z'$ . 从方程(3)可以看出,雅可比矩阵是设计变换媒质热导率参数分布的关键.

在连续介质力学中,  $A$  称为变形梯度张量. 它可以分解为一个纯拉伸变化(用正定对称张量  $V$  表示)和一个刚体转动(用正交张量  $R$  表示). 因此,它满足方程  $A = VR$ . 由于左柯西-格林张量  $B = V^2 = AA^T$ , 方程(3)可以表示为

$$\kappa' = \frac{\kappa B}{\det(A)}. \quad (4)$$

假设  $V$  的特征根为  $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$ , 而  $B$  可以表示为  $B = \text{diag}[\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2]$ . 由此,可以推导出

$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ . 所以,方程(4)可以进一步化简为

$$\kappa' = \kappa \text{diag} \left[ \frac{\lambda_1}{\lambda_2 \lambda_3}, \frac{\lambda_2}{\lambda_3 \lambda_1}, \frac{\lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2} \right]. \quad (5)$$

任意横截面形状热斗篷的坐标变换见图1所示,其中  $\Omega$  与  $\Omega'$  分别表示原坐标空间和变换空间. 为了实现热隐身,将外边界固定 ( $b = b'$ ), 而内边界从一个圆点  $a$  沿径向扩展为一条任意的封闭曲线  $a'$ , 得到一个  $x' < a'$  的封闭区域, 该区域即为热隐身区域, 而闭合曲线  $a'$  和  $b'$  构成了热斗篷的内外边界. 假设  $U'$  代表变换空间新的坐标系统, 那么空间的几何变换可以用映射关系  $U'|_{x=a} = a'$ ,  $U'|_{x=b} = b'$  表示. 现在的关键是如何求出雅可比矩阵元素  $\partial x' / \partial x$ . 在变换光学中,经常利用线性变化关系  $r' = (b' - a')r/b' + a'$  来求解雅可比矩阵. 但是对于具有任意横截面形状热斗篷,我们无法准确地得出任意边界  $a'$  和  $b'$  的数学解析式,所以这种方法只能用来设计形状规则的斗篷[6,14,16,19].

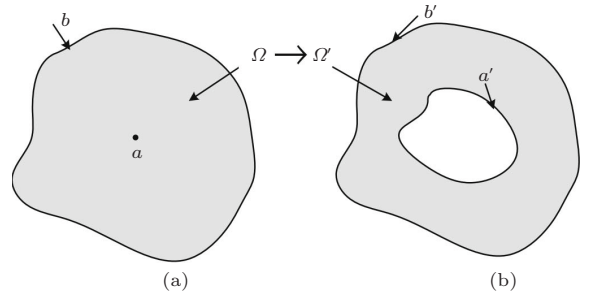


图1 任意形状热隐身斗篷坐标变换示意图 (a) 原坐标空间; (b) 变换空间

另一方面,为了保证斗篷对热流量没有反射,斗篷内部的变形必须是连续的. 而一个具有 Dirichlet 边界条件的拉普拉斯方程会产生调和解[20],它必然能使变形连续. 所以,我们可以建立变换空间坐标  $x'$  和原空间坐标  $x$  的拉普拉斯方程来求解雅可比矩阵元素  $\partial x' / \partial x$ .

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) x'_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6)$$

$$U'|_{x=a} = a', \quad U'|_{x=b} = b', \quad a < x < b,$$

求解方程(6),可以得到坐标变换关系  $x'(x_1, x_2, x_3)$ . 再根据等式  $A_{ij} = \partial x'_i / \partial x_j$ , 就可以进一步计算出雅可比变换矩阵. 但是这样直接求解方程,会产生奇异解. 为了消除奇异解,我们求

解方程 (6) 的逆形式<sup>[21]</sup>

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2'^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3'^2} \right) x_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7)$$

$$U|_{x'=a'} = a, \quad U|_{x'=b'} = b, \quad a' < x' < b'.$$

同样地, 求解方程 (7) 就可以得到逆雅可比矩阵元素  $A'_{ij} = \partial x_i / \partial x'_j$ . 再通过关系式  $A = (A')^{-1}$  便可以计算出雅可比矩阵, 从而得到变换媒质的热导率分布.

### 3 结果与讨论

为了验证方法的有效性, 采用 COMSOL 软件进行全波仿真. 仿真条件如下: 左右边界分别对应高温区 (600 K) 和低温区 (293.15 K), 上下边界为绝缘边界, 背景媒质为铜. 常温下铜的密度为  $\rho = 8700 \text{ kg/m}^3$ , 热导率为  $\kappa = 400 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ , 热容量为  $c = 385 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ .

#### 3.1 形状规则的斗篷

热斗篷的横截面轮廓取决于边界函数. 对于规则形状的斗篷, 内外边界的数学解析式很容易得出, 所以我们可以直接求解拉普拉斯方程得到热导率分布的数学解析式. 下面以一个二维圆柱形斗篷为例说明规则形状热斗篷变换媒质热导率分布的推导过程.

在圆柱坐标系下, 拉普拉斯方程具有下面的形式:

$$\left\{ \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \frac{\partial}{\partial r'} \right) + \frac{1}{r'^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right\} U_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (8)$$

其中,  $U_i (i = 1, 2, 3)$  分别代表了原空间坐标系的三个坐标分量  $r, \theta, z$ . 对于二维圆柱形的斗篷, 有  $\theta = \theta', z = z'$ , 因此, 方程 (8) 可以化简为

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \frac{\partial r}{\partial r'} \right) = 0. \quad (9)$$

在边界条件  $r(r' = r_1) = 0$  和  $r(r' = r_2) = r_2(r_1, r_2)$  分别是边界  $a', b'$  的半径) 下求解方程 (9), 得到  $r'$  与  $r$  的关系为

$$r' = r_1(r_1/r_2)^{-\frac{r}{r_2}}. \quad (10)$$

从上式可以看出, 通过求解拉普拉斯方程得到的  $r'$  与  $r$  的关系和变换光学常用的线性变换关系

$r' = (b' - a')r/b' + a'$  并不一样. 根据 (10) 式, 推导出矩阵的特征根为

$$\lambda_r = dr'/dr = -r' \ln(r_1/r_2)/r_2, \quad (11a)$$

$$\lambda_\theta = r'/r = -r'/[r_2 \log_{r_1/r_2}(r'/r_1)], \quad (11b)$$

$$\lambda_z = 1. \quad (11c)$$

将上式代入 (5) 式, 可求出斗篷区域变换媒质的热导率参数为

$$\begin{aligned} \kappa_r &= \kappa \lambda_r / \lambda_\theta \lambda_z \\ &= \kappa \ln(r_1/r_2) [\log_{r_1/r_2}(r'/r_1)], \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\kappa_\theta = \kappa \lambda_\theta / \lambda_r \lambda_z = 1/\kappa_r. \quad (12b)$$

根据上式所求的热导率参数分布解析式进行仿真, 内外边界圆半径  $r_1, r_2$  分别取 0.25 和 0.5. 图 2 给出了二维圆柱形热斗篷的仿真结果, 其中图 2(a) 和 (b) 表示温度分布, 图 2(c) 和 (d) 为对应的热扩散图, 图中浅蓝色线表示等温线, 红色箭头表示热通量. 图 2(b) 和 (d) 中斗篷区域的媒质材料由方程 (12) 得出. 作为比较, 图 2(a) 和 (c) 中所有材料都是铜. 由图 2(a) 和 (c) 不难看出, 在全铜条件下热量均匀地从高温区域流向低温区域; 而由图 2(b) 和 (d) 可以看出, 使用各向异性非均匀材料时, 斗篷使等温线发生了弯曲, 左侧的热量沿着斗篷绕过隐身区域流向右侧, 隐身区域没有热量流入. 当热量流过斗篷后, 温度场恢复了原来的分布, 说明同时达到热保护和热隐身功能, 这与文献 [16] 的结论一致.

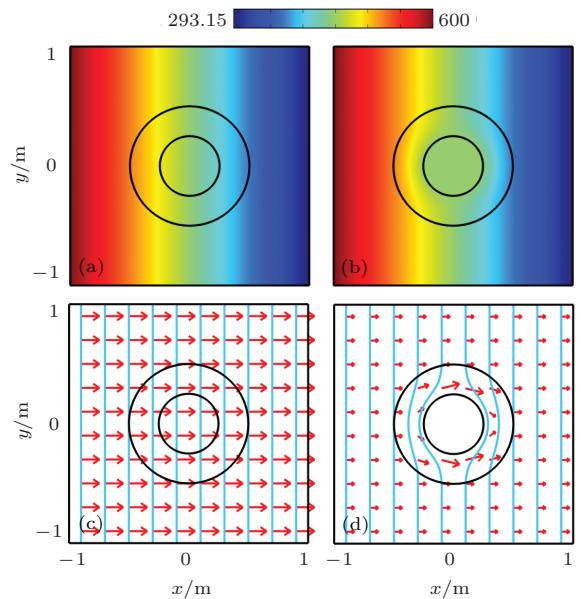


图 2 (网刊彩色) 二维圆柱形热隐身斗篷 (a), (b) 温度分布; (c), (d) 等温线和热通量分布

### 3.2 形状不规则的斗篷

对于形状不规则的斗篷, 由于斗篷内外边界的数学解析式很难得出, 所以我们可以特定边界条件下数值求解拉普拉斯方程得到变换媒质的热导率分布. 这里的仿真分析主要分为两个步骤, 第一步是利用COMSOL软件的PDE模块在边界条件  $U(a') = 0$  和  $U(b') = b$  下数值求解拉普拉斯方程, 得到逆雅可比矩阵元素  $A'_{ij}$ , 再进一步计算出雅可比矩阵  $A$ , 最后根据方程 (3) 求出斗篷区域的热导率分布. 第二步是将所得到的热导率参数分布在热力学模块下进行仿真, 分析斗篷区域的热传导特性.

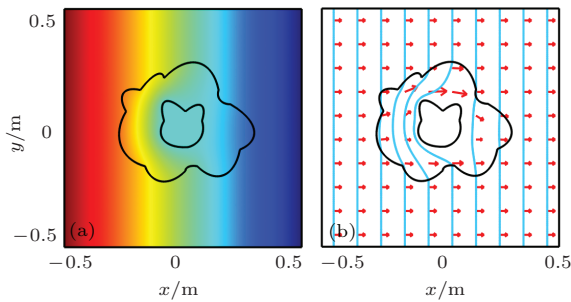


图3 (网刊彩色) 二维任意形状热隐身斗篷 (a) 温度分布; (b) 等温线和热通量分布

图3给出了基于数值求解拉普拉斯方程的二维任意形状热斗篷的仿真结果. 从图3可以看出, 热斗篷右侧的温度场分布与热斗篷左侧的温度场分布一致, 同时热量未流入隐身区域, 所以该斗篷同样具有热保护和热隐身双重功能. 图4显示了通过数值求解拉普拉斯方程所计算出的斗篷区域热导率张量的各个分量  $\kappa'_{xx}$ ,  $\kappa'_{xy}$ ,  $\kappa'_{yy}$  以及媒质变换前热导率  $\kappa$  的分布情况. 由图4可见, 在靠近热斗篷内边界的区域, 变换媒质的热导率值很大, 这是

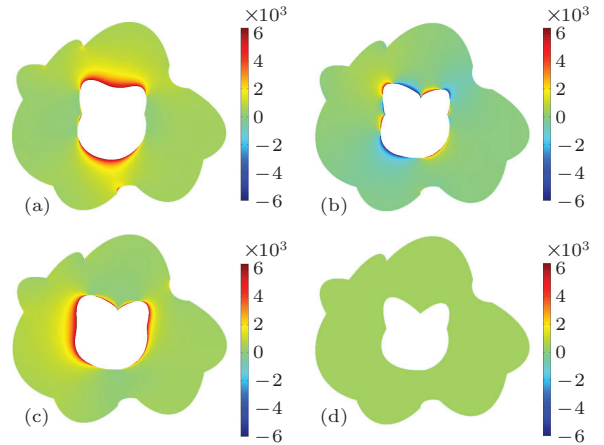


图4 (网刊彩色) 斗篷区域的热导率参数值 (a)  $\kappa'_{xx}$ ; (b)  $\kappa'_{xy}$ ; (c)  $\kappa'_{yy}$ ; (d)  $\kappa$

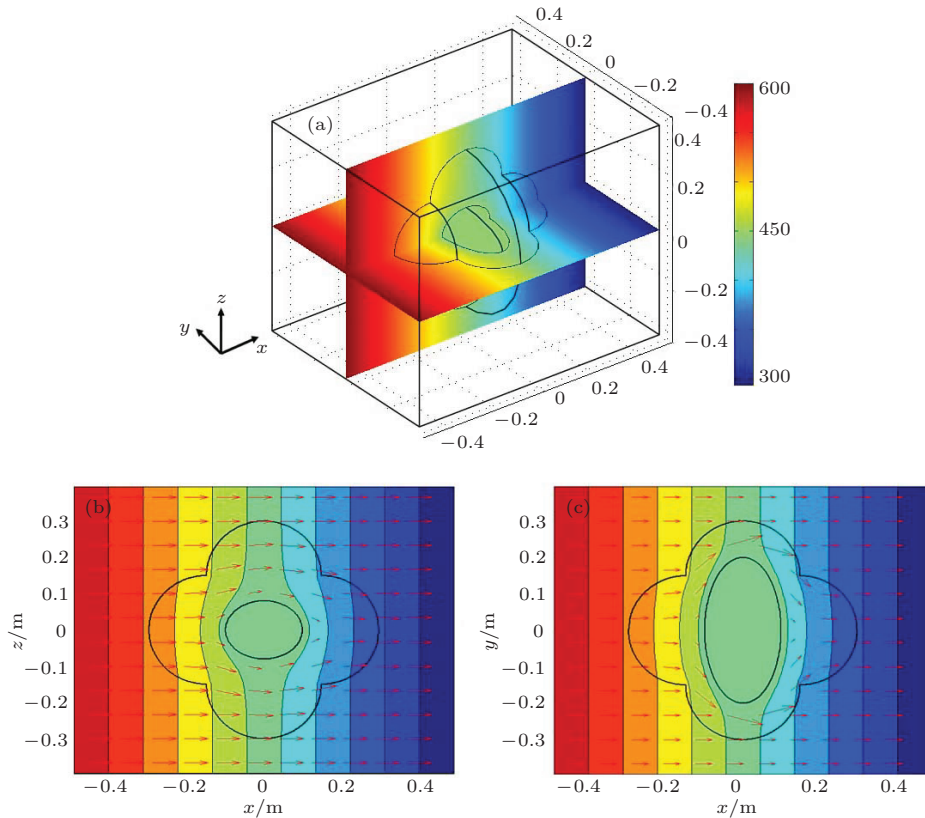


图5 (网刊彩色) 三维任意形状热隐身斗篷 (a) 三维空间温度分布图; (b)  $xoz$  平面的热通量及等温线; (c)  $xoy$  平面的热通量及等温线



因为斗篷内边界是由原坐标空间的坐标原点经过空间几何变换得到的缘故. 对于三维任意形状的热斗篷, 只需要在数值求解拉普拉斯方程时增加一个坐标分量, 就可以得出三维空间变换的逆雅可比矩阵, 再通过上述介绍的计算转换方法, 便可以获得三维任意形状热斗篷变换媒质热导率分布. 图5表示了三维任意形状的热斗篷仿真结果. 由图5(b)和(c)可以看出, 三维任意形状热斗篷也具有完美的热保护和热隐身功能.

## 4 结 论

通过求解拉普拉斯方程, 获得了任意形状热斗篷变换媒质的热导率参数分布, 在此基础上设计了圆形、二维和三维任意形状的热隐身斗篷, 并通过COMSOL软件进行了全波仿真. 结果表明, 热斗篷将使等温线弯曲, 迫使热流沿着斗篷区域绕过隐身区域, 从而实现热保护功能; 同时, 热斗篷两侧的温度场分布一致, 这样对目标而言就体现了完美的热隐身特性. 本文提出的方法很好地解决了热斗篷内外边界非共形问题, 弥补了先前工作的不足, 并且能够拓展到设计三维任意形状的热隐身斗篷, 因此具有较高的实用性. 相信这项工作将有助于促进新型热器件的理论和应用研究.

## 参考文献

- [1] Shelby R A, Smith D R, Schultz S 2001 *Science* **292** 77
- [2] Pendry J B 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 3966
- [3] Yang J J, Huang M, Yang C F, Xiao Z, Peng J H 2009 *Optics Express* **17** 19656
- [4] Wu Q, Zhang K, Meng F Y, Li L W 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6071 (in Chinese) [吴群, 张狂, 孟繁义, 李乐伟 2010 物理学报 **59** 6071]
- [5] Zheludev N I, Kivshar Y S 2012 *Nature Materials* **11** 917
- [6] Pendry J B, Schurig D, Smith D R 2006 *Science* **312** 1780
- [7] Hu J, Zhou X M, Hu G K 2009 *Optics Express* **17** 1308
- [8] Luo X Y, Liu D Y, Liu J J, Dong J F 2014 *Chin. Phys. B* **23** 054101
- [9] Yan M, Yan W, Qiu M 2008 *Phys. Rev. B* **78** 125113
- [10] Li C, Meng X K, Liu X, Li F, Fang G Y, Chen H Y, Chan C T 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 233906
- [11] Yu G X, Cui T J, Jiang W 2009 *J. Infrared. Millim. W.* **30** 633
- [12] Chen H Y, Chan C T, Sheng P 2010 *Nature materials* **9** 387
- [13] Wang Z, Dong J F, Liu J J, Luo X Y 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 204101 (in Chinese) [王战, 董建峰, 刘锦景, 罗孝阳 2012 物理学报 **61** 204101]
- [14] Fan C Z, Gao Y, Huang J P 2008 *Appl. Phys. Lett.* **92** 251907
- [15] Schittny R, Kadic M, Guenneau S, Wegener M 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 195901
- [16] Guenneau S, Amra C, Veynante D 2012 *Optics Express* **20** 8207
- [17] Yang T Z, Huang L J, Chen F, Xu W K 2013 *J. Phys. D: Appl. Phys.* **46** 305102
- [18] Han T C, Yuan T, Li B W, Qiu C W 2013 *Scientific Reports* **3** 1593
- [19] Mao F C, Li T H, Huang M, Yang J J, Chen J C 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 014401 (in Chinese) [毛福春, 李廷华, 黄铭, 杨晶晶, 陈俊昌 2014 物理学报 **63** 014401]
- [20] Courant R, Hilbert D 1991 *Methods of Mathematical Physics* (Weinheim: Wiley-VCH) pp110–112
- [21] Hu J, Zhou X M, Hu G K 2009 *Comput. Mater. Sci.* **46** 708

# Research and design of thermal cloak with arbitrary shape based on Laplace's equation\*

Qin Chun-Lei<sup>1)</sup> Yang Jing-Jing<sup>1)</sup> Huang Ming<sup>1)†</sup> Hu Yi-Yao<sup>2)</sup>

1) (Wireless Innovation Lab, School of Information Science and Engineering of Yunnan University, Kunming 650091, China)

2) (School of Electronic Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)

( Received 6 May 2014; revised manuscript received 26 May 2014 )

## Abstract

How to control and manipulate the heat flow in a flexible way is a hotspot of current research. Based on Laplace's equation, we propose a method to design thermal cloak of arbitrary shape. For a thermal cloak of regular shape, the thermal conductivity expression is derived by analytically solving the Laplace's equation under certain boundary conditions; for a thermal cloak of irregular shape, the distribution of thermal conductivity can also be obtained based on the numerical solution of Laplace's equation. Results of full wave simulation show that no heat fluxes emerge in the internal stealth area both for two-dimensional and three-dimensional thermal cloak of arbitrary shape. Meanwhile, the heat fluxes return to their original pathways, resulting in a perfect thermal invisible effect. This research provides a feasible method to design a thermal cloak of non-conformal cross section and has a guiding significance for the design and manufacturing of thermal cloak.

**Keywords:** thermal cloak, Laplace equation, arbitrary shape, metamaterials

**PACS:** 44.10.+I, 05.70.-a, 81.05.Xj, 07.05.Tp

**DOI:** [10.7498/aps.63.194402](https://doi.org/10.7498/aps.63.194402)

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61161007, 61261002), the Key Program of Natural Science of Yunnan Province, China (Grant No. 2013FA006), the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education, China (Grant Nos. 20135301110003, 20125301120009), and the China Postdoctoral Science Foundation (Grant No. 2013M531989).

† Corresponding author. E-mail: [huangming@ynu.edu.cn](mailto:huangming@ynu.edu.cn)