

# 基于混沌序列和RIPless理论的循环压缩 测量矩阵的构造\*

郭静波<sup>†</sup> 汪韧

(清华大学电机工程与应用电子技术系, 电力系统国家重点实验室, 北京 100084)

(2014年3月31日收到; 2014年6月3日收到修改稿)

压缩测量矩阵的构造是压缩感知的核心工作之一. 循环矩阵由于其对应离散卷积且具有快速算法被广泛应用于压缩测量矩阵. 本文力图将混沌的优点和循环矩阵的优点相结合, 提出基于混沌序列的循环压缩测量矩阵. 混沌循环测量矩阵元素的产生仅需要利用混沌的内在确定性, 即利用混沌映射公式、初始值以及一定的采样间隔就可以产生独立同分布的随机序列; 同时混沌序列的外在随机性可以满足压缩测量矩阵对随机性的要求. 本文给出了使用Cat混沌映射时混沌循环测量矩阵的构造方法, 以及该矩阵RIPless特性的检验. 研究了采用构造的混沌循环测量矩阵对一维和二维信号进行压缩测量的效果, 并与采用传统的循环测量矩阵的效果进行了比较. 结果表明, 混沌循环测量矩阵对于一维和二维信号都具有很好的恢复效果, 且对二维信号的恢复性能要优于已有的循环矩阵. 从相图角度分析了混沌循环测量矩阵优于已有的循环矩阵的机理, 指出混沌的内在确定性和外在随机性的有机结合是所构造的混沌循环测量矩阵性能优于传统的循环矩阵的本质性原因.

**关键词:** 压缩感知, 循环矩阵, 混沌序列, RIPless理论**PACS:** 84.40.Ua, 05.45.Vx, 05.40.-a**DOI:** 10.7498/aps.63.198402

## 1 引言

2006年由Donoho和Candès等人在相关研究的基础上提出了压缩感知(compressive sensing, CS)<sup>[1,2]</sup>的概念. 它可实现以远低于奈奎斯特的采样率去采样稀疏信号, 并以高概率实现原稀疏信号的准确恢复. CS理论主要包括信号的稀疏表示、信号的压缩测量以及从压缩测量中恢复信号三个方面. 信号的稀疏表示就是将信号投影到指定空间的一组基上, 信号的空间表示向量是稀疏的或是接近稀疏的. 常用的基有快速傅里叶变换基、离散余弦变换基和正交字典等<sup>[3]</sup>. 信号的压缩测量是在考虑噪声条件下将高维的原始信号投影到低维的测量向量上, 即 $y = \Phi f + n$ 投影的过程是非自适应性的<sup>[4]</sup>, 即压缩测量矩阵(简称测量矩阵) $\Phi$ 的选取不随信号

而变化, 如何保证压缩测量结果向量 $y$ 中包含原信号的全部信息是设计测量矩阵 $\Phi$ 的重点. Candès和Tao等提出了测量矩阵必须满足的性质-约束等距性(restricted isometry property, RIP)<sup>[5]</sup>, 即只要测量矩阵满足RIP特性, 那么就能以高概率从低维的压缩测量结果向量中准确地恢复出原信号. 然而, 在实际应用中验证一个矩阵是否满足RIP特性并非易事<sup>[6]</sup>. 基于此, 2011年Candès等提出了RIPless理论<sup>[7]</sup>. RIPless理论也能很好地保证原信号经测量矩阵投影后得到准确地恢复, 而验证一个矩阵是否满足此性质要比验证是否满足RIP特性要容易得多. 从压缩测量中恢复信号本是极小化 $l_0$ 范数的优化问题, 由于 $l_0$ 范数问题求解起来比较困难, 可转化为用极小化 $l_1$ 范数法和贪婪算法<sup>[8,9]</sup>等实现. CS提出后引起了学术界的广泛关注, 它在

\* 国家自然科学基金(批准号: 51277100)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: guojb@mail.tinghua.edu.cn

数字信号处理、信息论、通信、光学成像、雷达等领域受到高度关注<sup>[10,11]</sup>.

循环矩阵因结构的特殊性而具有适合于CS应用的诸多优点. 以处理一维信号的循环矩阵为例: 1) 由于循环矩阵的每一行是由上一行右移一位得到, 故需要存储的独立变量少; 2) 由于任意一个循环矩阵  $C$  都可以表示为

$$C = FDF^* = F\text{diag}(d)F^* = F\text{diag}(\sqrt{n}Fv)F^*,$$

其中  $n$  为矩阵的列数,  $F$  为 DFT 矩阵,  $D$  为对角阵,  $v$  为循环矩阵的第一行. 故循环矩阵进行  $Cx$  和  $C^*y$  计算时可以利用 FFT 和简单的分量式运算 (component-wise operations)<sup>[12]</sup> 从而实现快速计算, 这比矩阵和向量直接相乘的计算速度快很多; 3) 用循环矩阵测量信号实际上是对信号做离散卷积, 可以解决诸多与卷积运算相关的理论与实际问题; 4) 对于图像信号, 目前已研究出与循环矩阵结构相匹配的CS恢复算法, 该算法有着满意的恢复效果和计算速度<sup>[13]</sup>. 因此循环矩阵在CS研究中备受青睐.

Yin 等概括了循环矩阵的构造方法<sup>[13]</sup>: 1) 按第一行  $v$  构造, 即循环矩阵的第一行由独立同分布的高斯序列或贝努利序列产生; 2) 按对角阵  $D$  构造, 其对角线元素  $d$  可以由随机的  $\pm 1$  符号元素产生, Romberg 还提出了单位幅值且相位随机具有共轭对称结构的  $d$  (本文中记为 Romberg- 循环矩阵)<sup>[14]</sup>. 这些矩阵的最大特点是其元素的随机性, 它一方面满足了测量矩阵对随机性的要求; 同时它也存在需要存储的变量多、硬件上不易实现的缺点.

本文将循环矩阵的优点和混沌序列的优点相结合, 提出基于混沌序列的混沌循环测量矩阵 (chaotic circulant measurement matrix, CCMM) 的构造. 它不仅继承上述循环矩阵的优点, 还将混沌的天然优点融入其中. 构造 CCMM 时, 元素的产生仅需要利用混沌的内在确定性, 即利用混沌映射公式、初始值以及一定的采样间隔就可以通过迭代产生独立同分布的随机序列; 同时混沌序列的外在随机性可以满足测量矩阵对随机性的要求. 另外, 混沌映射可用数字电路实现<sup>[15]</sup>, CCMM 具有用数字电路实现的潜在优势.

本文首先给出了CS的建模, 详细地讨论了处理一维信号与二维信号时循环测量矩阵的不同形式, RIPless 理论中的两个 IP 特性以及本文所

使用的恢复算法. 在讨论使用 Cat 混沌映射构造 CCMM 时, 给出了 Cat 混沌序列的采样间隔的选取原则与结果, 并进一步对 CCMM 的 RIPless 特性进行了检验. 采用构造的 CCMM 对一维和二维信号进行压缩测量, 并与采用传统的循环测量矩阵的效果进行比较. 对于一维信号, 本文比较了信号恢复的成功率随信号稀疏度和压缩测量次数的变化; 对于二维信号, 本文比较了信号恢复的相对误差、峰值信噪比和信噪比随采样率和压缩信号的信噪比的变化情况. 结果表明本文所构造的 CCMM 与经典的测量矩阵相比具有诸多优越性. 最后从相图角度分析了 CCMM 优于经典的测量矩阵的本质性机理.

## 2 CS 的建模

设信号为  $f$ , 该信号在基  $\psi$  上的稀疏表示为

$$f = \psi x, \quad (1)$$

$x$  为基  $\psi$  下的系数, 其中不为零系数的个数远小于其维数, 这里考虑在正交基下信号的稀疏表示. 用测量矩阵  $\Phi = PC \in \mathbb{C}^{m \times n} (m \ll n)$  ( $P$  表示从循环矩阵  $C$  中任意选取  $m$  行) 对信号进行测量. 对于一维信号与二维信号, 循环测量矩阵  $C$  有着不同的形式<sup>[12]</sup>:

1) 对于一维信号,

$$C = FDF^* = F\text{diag}(d)F^* = F\text{diag}(\sqrt{n}Fv)F^*,$$

$v$  是循环矩阵的第一行, 用循环矩阵对一维信号  $f$  进行测量时, 测量结果  $Cf$  是信号  $f$  和  $v$  循环卷积的结果. 当  $d$  具有共轭对称结构时, 即对任意的  $i$  和  $i' = \text{mod}(n - i + 1, n) + 1$ , 有  $d_i = \text{conj}(d_{i'})$ , 则循环矩阵  $C$  是个实矩阵, 这会使得  $d$  的自由度减小接近一半.

2) 对于二维信号  $f \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$ , 上式中的  $v$  将不再简单地是循环矩阵的第一行, 而是循环测量的核矩阵. 定义  $\mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$  上二维循环算子为  $C_2$ , 用循环矩阵对二维图像信号  $f$  进行测量时,  $C_2(f)$  表示图像  $f$  和  $v$  沿着上下和左右两个方向循环卷积, 则  $C_2$  可以表示为  $C_2 = \mathcal{F}_2 \mathcal{D} \mathcal{F}_2^*$ , 其中,  $\mathcal{F}_2$  表示  $\mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$  上正交的二维 DFT 算子;  $\mathcal{F}_2^*$  表示  $\mathcal{F}_2$  的共轭转置算子, 也是其逆算子;  $\mathcal{D}$  是一种定义为  $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D} \odot f$  的算子,  $\mathcal{D} = \sqrt{n_1 n_2} \mathcal{F}_2(v)$ ;  $\odot$  表示矩阵中对应的元素分别相乘. 当  $\mathcal{D}$  具有共轭对称结

构时, 即对任意的  $i, j$  和  $i' = \text{mod}(n_1 - i + 1, n_1) + 1$ ,  $j' = \text{mod}(n_2 - j + 1, n_2) + 1$ , 有  $\mathcal{D}_{ij} = \mathcal{D}_{i'j'}$ , 则与循环算子  $C_2$  相对应的块循环矩阵  $C_2$  是个实矩阵.

考虑噪声影响的压缩测量模型为

$$y = \Phi f + n. \quad (2)$$

RIPless 理论<sup>[7]</sup> 确保当测量矩阵  $\Phi$  中的行向量  $\varphi_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) 是从概率分布  $F$  中随机独立地抽取的向量, 且概率分布  $F$  满足如下两个 IP 特性时, 那么就能以高概率从测量向量  $y$  中准确地恢复出原信号.

1) 迷向性 (isotropy property)

概率分布  $F$  具有迷向性, 若满足

$$E(\varphi\varphi^*) = I, \quad \varphi \propto F. \quad (3)$$

当  $F$  有着零均值时, 则  $E(\varphi\varphi^*)$  为  $F$  的协方差矩阵. 换句话说, 迷向性的条件表明测量矩阵中  $\varphi \propto F$  的元素有着零均值、单位方差且相互之间是不相关的.

2) 不相干性 (incoherence property)

令  $\varphi = (\varphi[1], \varphi[2], \dots, \varphi[n]) \propto F$ , 则相干性参数  $\mu(F)$  为满足下式的最小值

$$\max_{1 \leq t \leq n} |\varphi[t]|^2 \leq \mu(F). \quad (4)$$

$\mu(F)$  越小, 测量向量越不相干, 则为了准确恢复需要越少的测量次数.

无论是稀疏信号还是含有噪声的几乎稀疏信号, 在满足 RIPless 理论的测量矩阵的测量下都能实现信号的准确恢复. 本文第三部分将给出 CCMM 的 RIPless 特性检验.

最后从线性测量向量中通过凸优化方法实现信号的恢复. 对于一维信号, 本文采用 YALL1 算法<sup>[16]</sup> 中的 BP 算法求解如下的凸优化问题:

$$\text{BP} : \min_{f \in \mathbb{C}^n} \|\psi^T f\|_1 \text{ s.t. } PCf = y. \quad (5)$$

对于二维信号, 本文采用和循环矩阵相匹配的快速算法求解如下的凸优化问题<sup>[13]</sup>:

$$\begin{aligned} \text{BPDN} : \min \alpha & \sum_{i=1}^{n^2} \|D_i f\|_2 \\ & + \beta \sum_{i=1}^{n^2} |\psi_i^T f| + \frac{\mu}{2} \|PCf - y\|^2, \end{aligned} \quad (6)$$

其中,

$$\sum_{i=1}^{n^2} \|D_i f\|_2 = \|f\|_{TV}$$

为信号  $f$  的全变差 (total variation, TV) 范数, 即图像的离散梯度之和;  $\psi_i^T$  为基  $\psi$  的第  $i$  行;  $\alpha, \beta$  和  $\mu$  为加权系数, 本文中设定  $\alpha = 1, \beta = 0, \mu = 10^4$ .

### 3 基于 Cat 混沌序列的 CCMM 的构造及其 RIPless 特性的检验

#### 3.1 基于 Cat 混沌序列的 CCMM 的构造

混沌序列映射有多种, 本文采用 Cat 映射产生混沌序列. Cat 映射是由前苏联科学家 Arnold 最早发现的一个二维离散混沌系统<sup>[17]</sup>, 其映射的定义式为

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & ab+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \pmod{1}, \quad (7)$$

其中,  $\text{mod } 1$  表示舍去实数的整数部分, 即  $x \text{ mod } 1 = x - [x]$ . 由于其线性变换矩阵的行列式为 1, 所以 Cat 映射又被称为是区域保留的, 其李雅普诺夫指数分别为

$$\delta_1 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) > 1, \quad \delta_2 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) < 1.$$

设定 Cat 映射的参数  $a = 1, b = 1$ , 初值  $x_0 = 0.09, y_0 = 1$ . 本文选用  $x_n$  序列来构造需要的混沌序列. 为使用稳定区域的混沌序列构造 CCMM, 选取  $x_{201}$  为采样的起点, 每隔一定的采样间隔  $l$  ( $l > 0$ ) 等间隔采样, 即

$$z_k = x_{201+kl}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

采样间隔  $l$  的选取原则是保证混沌序列  $z_k$  中的元素的相互独立性. 下面讨论采样间隔  $l$  的选取方法.

根据文献<sup>[18]</sup> 中介绍的方法, 首先应得到两个长度都为  $n = 100000$  的随机序列  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  和  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ . 为得到这两个序列, 先选取  $(0, 1)$  上独立均匀分布的  $n$  个点, 记为  $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ , 则由  $s_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 经过 (7) 式分别迭代  $k_1$  和  $k_1 + l$  次后得到  $x_i$  和  $y_i$  (为保证序列迭代进入稳定区域, 取  $k_1 = 200$ ). 由于  $s_1, s_2, \dots, s_n$  是相互独立的, 故由其迭代产生的  $x_1, x_2, \dots, x_n$  和  $y_1, y_2, \dots, y_n$  各自内部是相互独立的, 现考虑采样间隔  $l$  为何值时  $X$  和  $Y$  相互之间是独立的.

数据独立性检验的假设如下:

$H_0$ :  $X$  和  $Y$  之间是相互独立的;

$H_1$ :  $X$  和  $Y$  之间不独立.

$X$  和  $Y$  之间独立性检验的步骤如下:

1) 将  $x_i$  和  $y_i$  按照升序进行排列, 并得到其实验累积分布函数 (cdf):  $F_{eX}(x)$  和  $F_{eY}(y)$ .

2) 利用  $F_{eX}(x)$  和  $F_{eY}(y)$  分别对  $x_i$  和  $y_i$  进行变换, 得到新的数据  $x'_i = F_{eX}(x_i)$  和  $y'_i = F_{eY}(y_i)$ , 则  $x'_i$  和  $y'_i$  服从  $(0, 1)$  上的均匀分布.

3) 利用标准正态分布函数的反函数  $g$  对  $x'_i$  和  $y'_i$  作第二次变换:  $u_i = g(x'_i)$  和  $v_i = g(y'_i)$ . 则  $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  和  $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  都服从标准正态分布.

4) 计算  $U$  和  $V$  之间的相关系数  $r$  和  $t$  检验值:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sqrt{\left[ \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2 \right] \left[ \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2 \right]}};$$

$$t = r \sqrt{(n-2)/(1-r^2)};$$

$$b_1 = \sum_{i=1}^n (u_i v_i - \bar{u} \bar{v}) / \sum_{i=1}^n (u_i^2 - \bar{u}^2).$$

$b_1$  表示  $U$  和  $V$  之间的线性回归斜率, 若  $b_1 \neq 0$ , 表示  $U$  和  $V$  之间不独立, 则不需要接下来的检验.

若假设  $H_0$  成立 (即  $X$  和  $Y$  相互之间是独立的), 则检验值  $t \sim t(n-2)$ .

5) 基于显著性水平  $\alpha$  (一般取 0.05), 当  $|t| > t_{\alpha/2}$  时,  $X$  和  $Y$  之间肯定不独立, 则检验终止; 当  $|t| \leq t_{\alpha/2}$  时,  $X$  和  $Y$  之间有可能是相互独立的, 为了确定  $X$  和  $Y$  之间独立, 进行步骤 6).

6) 如果  $|t| \leq t_{\alpha/2}$  且  $U$  和  $V$  服从联合正态分布, 则  $X$  和  $Y$  相互之间也是独立的. 如果  $U$  和  $V$  不服从联合正态分布, 则  $X$  和  $Y$  相互之间也不独立. 基于二维正态分布法则, 需观察随机变量  $(u, v)$  的坐标散点图. 为接收假设  $H_0$ , 则随机变量  $(u, v)$  的坐标散点图应和文献 [18] 中的参考散点图相一致.

经计算发现当采样间隔  $l = 20$  时, 相关系数  $r = 3.331 \times 10^{-3}$  和检验值  $t = -0.2002$ ,  $t_{\alpha/2} = 1.96$ , 则相关系数  $r$  接近于 0,  $|t| \leq t_{\alpha/2}$ , 且  $(u, v)$  坐标的散点图与参考散点图一致, 故此时  $X$  和  $Y$  相互之间独立.

由此可得 (7) 式的 Cat 混沌序列, 其初值  $x_0 = 0.09$ ,  $y_0 = 1$ , 当采样间隔  $l = 20$  时, 可以保证从 Cat 混沌序列中获得的混沌序列  $z_k$  中的元素相互独立. 再通过使  $z_k$  中的元素零均值和方差归一化

组成循环矩阵中的  $v$ , 从而构造出基于 Cat 混沌序列的 CCMM.

$z_k (k = 1, 2, \dots, 10000)$  序列的空间分布情况及分布直方图如图 1 所示.

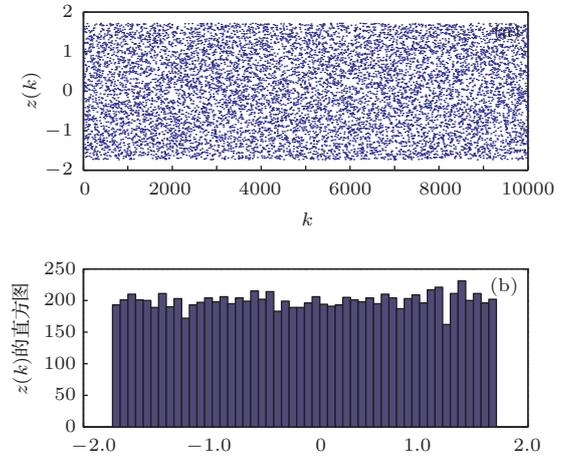


图 1 (a)  $z_k$  序列空间分布图; (b)  $z_k$  序列分布直方图

由于混沌序列  $x_n$  在  $[0, 1]$  内均匀分布, 则  $E_x = 0.5$ ,  $D_x = 1/12$ , 从  $x_n$  序列中等间隔采样得到的序列  $z_k$  再经过元素零均值和方差归一化, 则  $z_k$  序列在  $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$  内均匀分布, 且  $E_z = 0$ ,  $D_z = 1$ . 从图 1 的分布情况可以看出  $z_k$  序列随机均匀地分布在  $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$  的区间内, 这正体现了混沌序列可以利用其内在的确定性, 即利用混沌映射公式、初始值以及一定的采样间隔就可以产生独立同分布的随机序列.

### 3.2 CCMM 的 RIPlless 特性的检验

1) 迷向性 迷向性的讨论分为两种情形.

其一, 当信号  $f$  在时域上是稀疏时, 只需考虑由  $v$  生成的循环矩阵  $\Phi$  的行向量  $\varphi = (\varphi[1], \varphi[2], \dots, \varphi[n])$  的迷向性. 即检验

$$E(\varphi[i] \cdot \varphi[j]) = \begin{cases} E\varphi[i] \cdot E\varphi[j] = 0, & (i \neq j), \\ E\varphi[i]^2 = 1, & (i = j). \end{cases}$$

测量矩阵  $\Phi$  中  $m$  个行向量  $\varphi_k \in F$ , 有

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \varphi_k \varphi_k^* = I,$$

即  $E(\varphi \varphi^*) = I$ . 所以测量矩阵中  $\varphi \in F$  元素的分布满足迷向特性. 其二, 当信号  $f$  在正交基  $\psi$  下才有稀疏表示时, 需考虑矩阵  $\Phi \psi$  的行向量的迷向性. 由于循环矩阵  $\Phi$  的行向量已经满足迷向性, 则根

据基  $\psi$  的正交性, 矩阵  $\Phi\psi$  的行向量也自动满足迷向性.

2) 不相干性 记相干性参数为  $\mu(\mathcal{F})$ , 不相干性也分两种情形.

其一, 当信号  $f$  在时域上是稀疏时, 此时的不相干性描述的是测量矩阵  $\Phi$  的行向量的元素满足

$$\max_{1 \leq t \leq n} |\varphi[t]|^2 \leq \mu(F);$$

由于  $z_k$  序列中的元素的取值范围为  $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ , 故设定  $\mu(F) = 3$ .

其二, 当信号  $f$  在正交基  $\psi$  下才有稀疏表示时, 此时的  $\mu(F)$  描述的是循环矩阵  $\Phi$  的行向量与正交基  $\psi$  列向量之间的不相干性, 这里给出此种情形下不相干性  $\mu(F)$  界的理论推导.

由于  $\Phi = PC$ , 故考虑

$$\max_{1 \leq t, s \leq n} |\langle c_t, \psi_s \rangle|^2 \leq \mu(F),$$

其中  $c_t$  为矩阵  $C$  的行向量,  $\psi_s$  为正交基  $\psi$  的列向量. 根据

$$C = F \text{diag}(d) F^* = F \text{diag}(\sqrt{n} F v) F^*,$$

内积  $\langle c_t, \psi_s \rangle$  可以表示为

$$\langle c_t, \psi_s \rangle = \sum_{w=1}^n F_{t,w} d_w \hat{\psi}_s(w),$$

其中,

$$F_{t,w} = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-j2\pi(t-1)(w-1)/n},$$

$\hat{\psi}_s$  表示正交基  $\psi$  列向量的共轭转置变换  $F^* \psi_s$ . 由前面的介绍可知, 为保证循环矩阵  $C$  是个实矩阵,  $d$  需具有共轭对称结构, 即对任意的  $i$  和  $i' = \text{mod}(n - i + 1, n) + 1$ , 有  $d_i = \text{conj}(d_{i'})$ . 所以上式可改写为

$$\begin{aligned} \langle c_t, \psi_s \rangle &= \frac{1}{\sqrt{n}} d_1 \hat{\psi}_s(1) + 2 \sum_{w=2}^{n/2} \text{Re}[F_{t,w} d_w \hat{\psi}_s(w)] \\ &\quad + (-1)^{t-1} \frac{1}{\sqrt{n}} d_{n/2+1} \hat{\psi}_s(n/2+1) \\ &= \sum_{w=1}^{n/2} Y_w, \end{aligned}$$

其中,

$$Y_w =$$

$$Y_w = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} d_1 \hat{\psi}_s(1), & w = 1, \\ 2 \text{Re}[F_{t,w} d_w \hat{\psi}_s(w)], & 2 \leq w \leq n/2, \\ (-1)^{t-1} \frac{1}{\sqrt{n}} d_{n/2+1} \hat{\psi}_s(n/2+1), & w = n/2+1. \end{cases}$$

由于  $d$  中的元素是相互独立的, 所以  $Y_w$  中的元素也相互独立且有界的

$$|Y_w| \leq a_w, a_w = \begin{cases} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} d_1 \hat{\psi}_s(1) \right|, & w = 1, \\ 2 \left| \frac{1}{\sqrt{n}} d_w \hat{\psi}_s(w) \right|, & 2 \leq w \leq n/2, \\ \left| \frac{1}{\sqrt{n}} d_{n/2+1} \hat{\psi}_s(n/2+1) \right|, & w = n/2+1. \end{cases}$$

根据 Hoeffding 不等式<sup>[19]</sup> 可得

$$P_{\text{rob}}(\langle c_t, \psi_s \rangle > \lambda) \leq 2 \exp \left( - \frac{\lambda^2}{2 \sum_{w=1}^{n/2+1} a_w^2} \right),$$

其中,

$$\begin{aligned} &\sum_{w=1}^{n/2+1} a_w^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{n}} d_1 \hat{\psi}_s(1) \right|^2 + \sum_{w=2}^{n/2} \left( 2 \left| \frac{1}{\sqrt{n}} d_w \hat{\psi}_s(w) \right| \right)^2 \\ &\quad + \left| \frac{1}{\sqrt{n}} d_{n/2+1} \hat{\psi}_s(n/2+1) \right|^2 \\ &< \frac{1}{n} \left( d_1^2 + \sum_{w=2}^{n/2} 2 \cdot d_w^2 + d_{n/2+1}^2 \right) \\ &\quad \times \left( \left| \hat{\psi}_s(1) \right|^2 + \sum_{w=2}^{n/2} 2 \left| \hat{\psi}_s(w) \right|^2 + \left| \hat{\psi}_s(n/2+1) \right|^2 \right), \end{aligned}$$

则由 Parseval 定理可知

$$\begin{aligned} d_1^2 + \sum_{w=2}^{n/2} 2 \cdot d_w^2 + d_{n/2+1}^2 &= \|v\|_2^2 \cdot n = C \cdot n, \\ \left| \hat{\psi}_s(1) \right|^2 + \sum_{w=2}^{n/2} 2 \left| \hat{\psi}_s(w) \right|^2 + \left| \hat{\psi}_s(n/2+1) \right|^2 &= \|\hat{\psi}_s\|_2^2 = 1. \end{aligned}$$

故

$$\sum_{w=1}^{n/2+1} a_w^2 \leq C,$$

$$P_{\text{rob}}(\langle c_t, \psi_s \rangle > \lambda) \leq 2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2C}\right),$$

$C$  为常数.

令

$$\lambda = \sqrt{2C \cdot \log(2n^2/\delta)},$$

对于  $n^2$  种  $\langle c_t, \psi_s \rangle$  应用一致有界性可得

$$P_{\text{rob}}\left(\max_{1 \leq t, s \leq n} |\langle c_t, \psi_s \rangle| > \sqrt{2C \cdot \log(2n^2/\delta)}\right) \leq \delta.$$

故以  $1 - \delta$  的概率循环矩阵  $C$  的行向量与正交基  $\psi$  列向量之间的不相干性满足

$$\max_{1 \leq t, s \leq n} |\langle c_t, \psi_s \rangle|^2 \leq 2C \cdot \log(2n^2/\delta),$$

故设定

$$\mu(F) = 2C \cdot \log(2n^2/\delta).$$

以上给出了基于 Cat 混沌序列的 CCMM 的构造方法, 并针对信号  $f$  在时域上是稀疏和信号  $f$  在正交基  $\psi$  下才有稀疏表示两种情形给出了其 RIPless 特性的检验.

## 4 仿真结果及分析

### 4.1 一维信号

这里讨论采用不同循环矩阵对压缩的一维信号进行恢复并对其效果进行比较. 首先利用 CCMM 对一维信号进行测量, 取常规信号长度  $n = 512$ , 稀疏度  $s = 30$ , 压缩测量点数  $m = 80$ , 为了简单起见且不失一般性, 选取的基为单位矩阵, 恢复算法采用 (5) 式的 BP 算法. 采用均方失真 MSD (mean square distortion) 和信噪比 SNR (signal to noise ratio) 作为恢复信号的评价指标. 其中, MSD 定义为

$$\text{MSD} = \frac{1}{n} \|f - \hat{f}\|^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |f_i - \hat{f}_i|^2,$$

SNR 定义为

$$\text{SNR} = 20 \log \frac{\|f\|_2}{\|f - \hat{f}\|_2}.$$

这里  $f$  为原信号,  $\hat{f}$  为恢复的信号. 仿真效果如图 2 所示, 此时的恢复效果为  $\text{MSD} = 1.9314 \times 10^{-4}$ ,  $\text{SNR} = 15.0485 \text{ dB}$ , 可以看出从 CCMM 测量中恢复信号的 MSD 很小、SNR 高, 恢复效果好.

其次比较不同循环矩阵测量下的恢复效果. 比较的矩阵有: 1) 按行构造, 即循环矩阵的第一行  $v$

由独立同分布的混沌序列、高斯序列和贝努利序列产生, 分别记作  $v$ :Chaotic-Circulant Matrix ( $v$ :C-CM),  $v$ :Gau-Circulant Matrix ( $v$ :G-CM) 和  $v$ :Ber-Circulant Matrix ( $v$ :B-CM); 2) 按对角阵  $D$  构造, 对角线元素  $d$  由随机的  $\pm 1$  产生和 Justin Romberg 提出的单位幅值且相位随机具有共轭对称结构的  $d$ , 分别记作  $D$ : $\pm 1$ -Circulant Matrix ( $D$ : $\pm 1$ -CM) 和  $D$ :Romberg-Circulant Matrix ( $D$ :R-CM). 信号长度仍取  $n = 512$ , 其中图 3 中固定压缩测量点数  $m = 100$ , 稀疏度  $s$  从 6 变化到 39, 图 4 中固定稀疏度  $s = 20$ , 压缩测量点数  $m$  从 60 变化到 120, 相对误差 Rel\_Err (Relative Error) 定义为

$$\text{Rel\_Err} = \text{norm}(f - \hat{f})/\text{norm}(f).$$

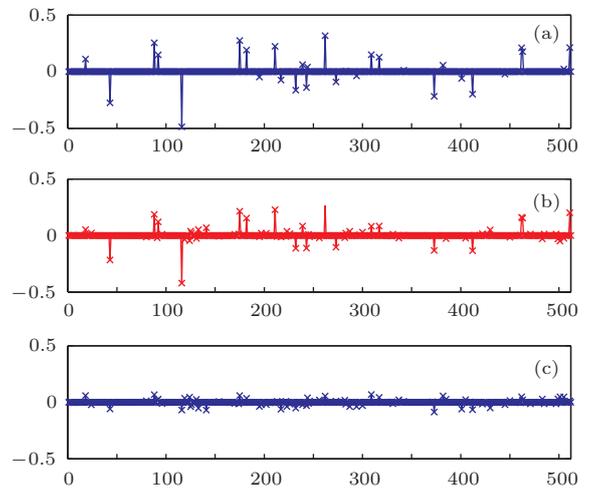


图 2 CCMM 测量下一维信号的恢复 (a) 原信号  $f$ ; (b) 恢复信号  $\hat{f}$ ; (c) 原信号与恢复信号的差  $f - \hat{f}$

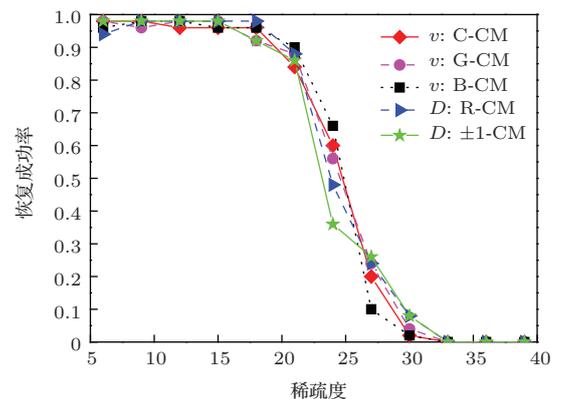


图 3 (网刊彩色) 五种不同循环矩阵恢复成功率随信号稀疏度的变化

当 Rel\_Err 小于  $10^{-4}$  这个阈值时, 表示成功恢复一次, 每组参数测试 200 次, 计算恢复成功率分别随信号的稀疏度和压缩采样点数的变化. 由

图3可以看出五种循环矩阵的性能随信号稀疏度的变化基本相当, 信号恢复的成功率随信号稀疏度的增加在下降. 当稀疏度  $s \leq 20$  时, 五种循环矩阵的成功恢复率均接近于1. 由图4可以看出五种循环矩阵的性能随压缩测量次数的变化也基本相当, 信号恢复的成功率随压缩测量次数的增加在增加. 当压缩测量次数  $m \geq 100$  时, 五种循环矩阵的成功恢复率均接近于1. 总的来说, 对于一维信号 CCMM 和传统的循环矩阵的恢复成功率随稀疏度和测量次数的变化都基本相当.

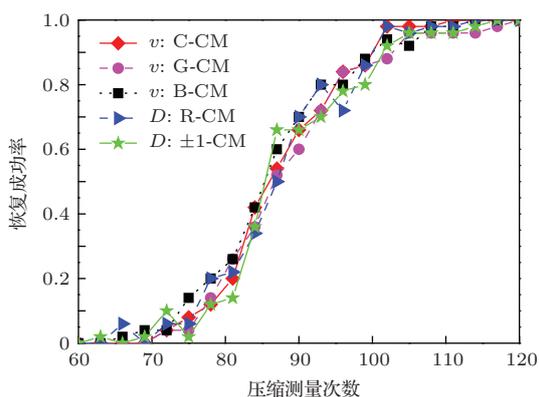


图4 五种不同循环矩阵恢复成功率随信号压缩测量次数的变化

## 4.2 二维信号

这里讨论采用不同循环矩阵对压缩的二维信号进行恢复并对其效果进行比较. 本文选用  $256 \times 256$  的Lena测试图像, 选取的基为小波基, 用和循环矩阵相匹配的快速算法求解(6)式的凸优化问题. 采用相对误差 Rel\_Err (Relative Error)、峰值信噪比 PSN (Peak Signal to Noise Ratio) 和信噪比 SNR (Signal to Noise Ratio) 作为恢复图像的评价指标. 其中, Rel\_Err 的定义为

$$\text{Rel\_Err} = \frac{\text{norm}(F(:) - U(:))}{\text{norm}(F(:))} \times 100\%.$$

PSNR 的定义为

$$\text{PSNR} = 10 \times \lg \left( \frac{\text{MAX}_F^2}{\text{MSE}} \right).$$

对于 8 bit 图像, 像素最大值为  $\text{MAX}_F = 255$ , MSE 为均方误差 (Mean Square Error),  $\text{MSE} = S^{-1} \sum \|F - U\|^2$ ,  $S$  为图像的大小,  $F$  和  $U$  分别为原图像和恢复图像的像素值.

SNR 的定义为

$$\text{SNR} = 10 \times \lg \left( \frac{\text{var}(F(:, 1))}{\text{MSE}} \right),$$

式中,  $\text{var}(F(:, 1))$  表示原图像  $F$  的方差.

图5是CCMM测量下图像信号的恢复效果. 采样率为70%时, 恢复图像的效果为  $\text{Rel\_Err} = 2.56\%$ ,  $\text{PSNR} = 39.0 \text{ dB}$ ,  $\text{SNR} = 25.3 \text{ dB}$ , 可以看出从混沌循环压缩测量中恢复的图像 Rel\_Err 很小, PSNR 和 SNR 高, 恢复效果好.

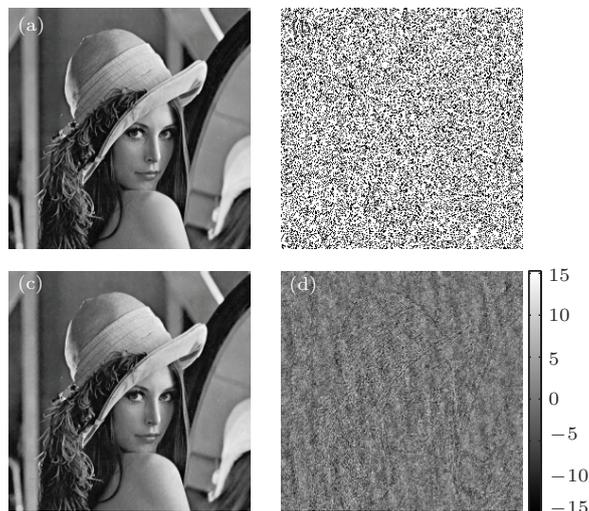


图5 CCMM 测量下图像信号的恢复 (a) 为原图像  $f$ ; (b) 中白色为采样的点; (c) 为恢复信号  $\hat{f}$ ; (d) 为原信号与恢复信号的差  $f - \hat{f}$

和一维信号的情形一样, 再比较五种不同循环矩阵测量下的恢复效果. 首先比较五种循环矩阵测量下恢复图像的 Rel\_Err、PSNR 和 SNR 随采样率的变化情况, 如图6所示. 其次比较在采样率为70%的情形下五种循环矩阵测量下恢复图像的 Rel\_Err、PSNR 和 SNR 随压缩信号的信噪比 (记为  $\text{SNR}_{\text{in}}$ ) 的变化情况, 如图7所示. 测量过程为  $y = \Phi f + n = y_f + n$ ,  $\text{SNR}_{\text{in}}$  定义为  $\text{SNR}_{\text{in}} = 10 \lg \frac{P_{y_f}}{P_n}$ . 其中,  $y_f$  是不含噪声时的压缩测量结果,  $P_{y_f}$  和  $P_n$  分别是  $y_f$  和  $n$  的功率.

由图6可以看出, CCMM 的恢复性能随采样率的变化与核矩阵  $v$  由高斯序列和贝努利序列产生的循环矩阵基本相当. 同时为了使恢复信号达到大于 30 dB 较好的峰值信噪比, CCMM 所需的采样率要明显低于按  $D$  产生的循环矩阵所需的采样率. 从图7中可以看出, CCMM 的恢复性能随压缩信号的信噪比的变化优于其他四种循环矩阵, 且恢复信号的信噪比与压缩信号的信噪比相比较, 其信噪比增益要优于传统情形.

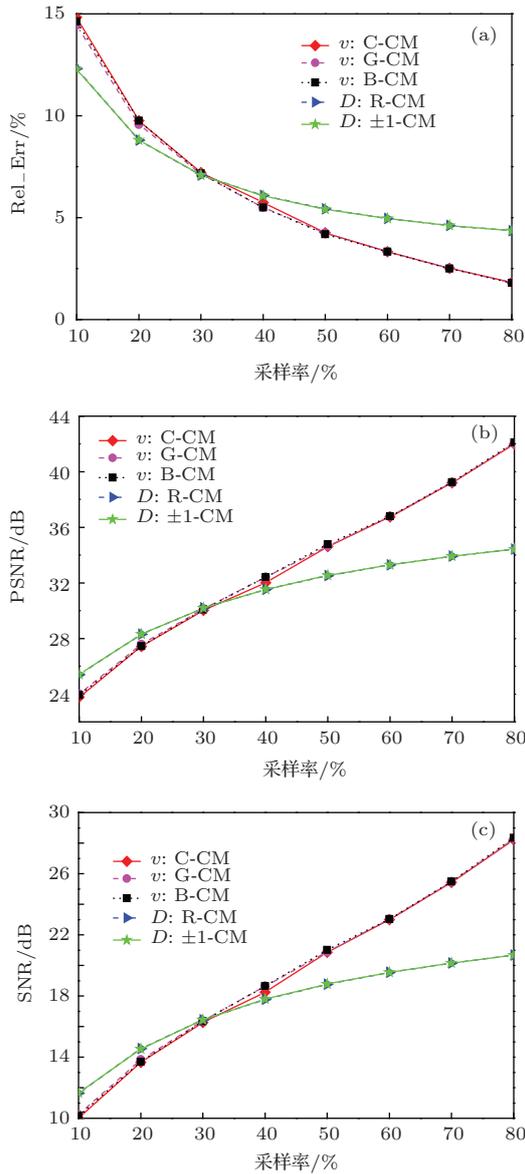


图6 (网刊彩色) (a) 不同循环矩阵测量下恢复图像的 Rel\_Err 随采样率的变化情况; (b) 不同循环矩阵测量下恢复图像的 PSNR 随采样率的变化情况; (c) 不同循环矩阵测量下恢复图像的 SNR 随采样率的变化情况

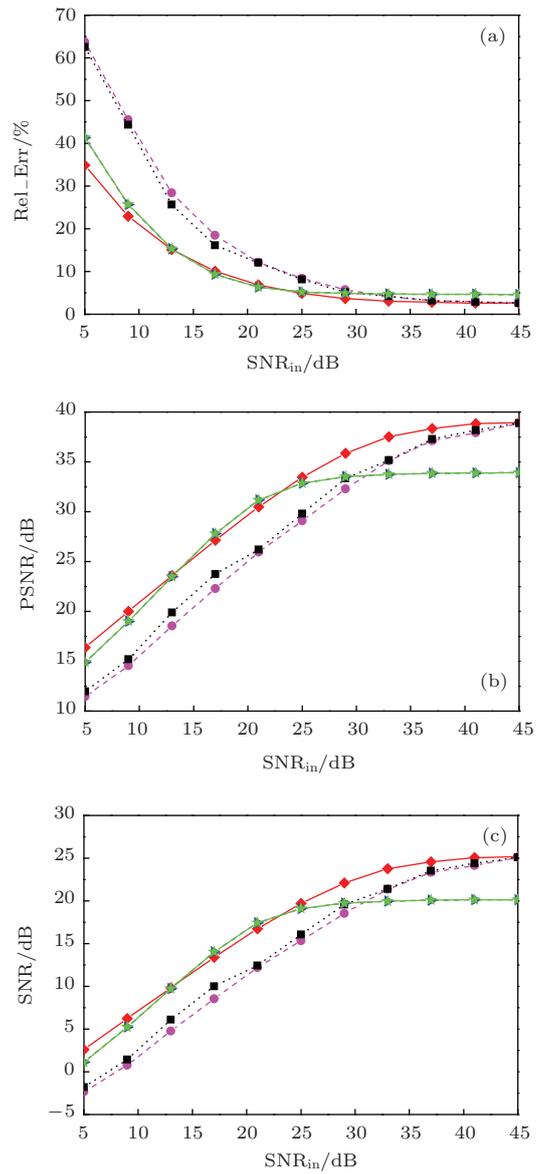


图7 (网刊彩色) (a) 不同循环矩阵测量下恢复图像的 Rel\_Err 随 SNR<sub>in</sub> 的变化情况; (b) 不同循环矩阵测量下恢复图像的 PSNR 随 SNR<sub>in</sub> 的变化情况; (c) 不同循环矩阵测量下恢复图像的 SNR 随 SNR<sub>in</sub> 的变化情况

### 4.3 混沌循环矩阵优于传统循环矩阵的本质性机理

下面分析本文构造出的 CCMM 优于传统的循环矩阵的机理。这里考察在有噪声情形下, 比较 CCMM 与传统循环矩阵(以贝努利序列构造的循环矩阵为例)对 Lena 图像压缩测量的相图。

图 8 描述的是采样率为 70% 时, CCMM 与贝努利循环矩阵在两种 SNR<sub>in</sub> 下的压缩测量结果的相图。这里关注在同一信噪比条件下两种相图的差异。当 SNR<sub>in</sub> = 10 dB(低信噪比)时, 图 8(a) 的贝努利循环矩阵压缩测量结果相图的离散性明显大

于图 8(c) 的 CCMM 压缩测量结果的情形, 说明前者相图中相邻数据之间的潜在关联性弱, 后者相邻数据之间的潜在关联性强, 从侧面体现了混沌内在确定性的潜能, 混沌以内在此不变应对外在噪声的变。当 SNR<sub>in</sub> = 25 dB(高信噪比)时, 图 8(b) 和 (d) 的相图差异不大, 一方面反映出原图像序列自身的内在关联性; 另一方面, 从侧面体现了混沌的外在随机性和传统循环矩阵的随机性相当, 混沌以外在此的变应对被测信号内在的不变。压缩数据的强关联性或弱离散性更加利于信号的恢复, 这一点也可从图 7 中(特别是图 7(a))得到验证。

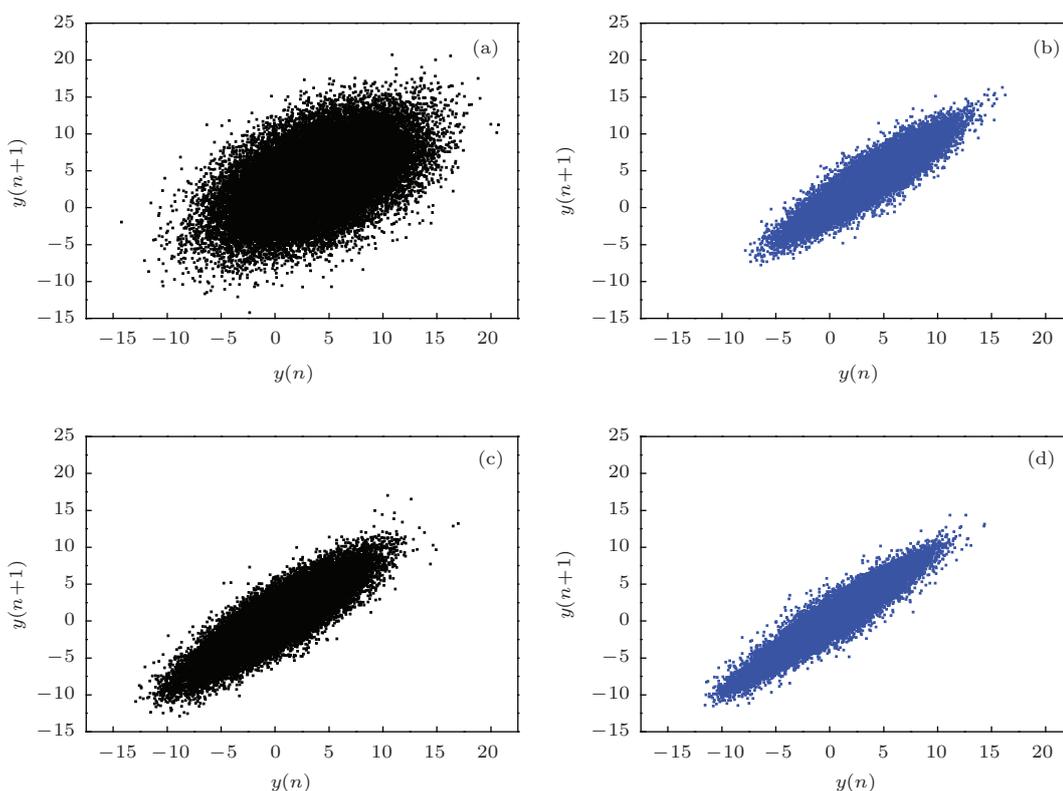


图8 采样率为70%时, CCMM和由贝努利序列构造的循环矩阵在不同 $SNR_{in}$ 下压缩测量结果的相图 (a) 贝努利循环矩阵,  $SNR_{in} = 10$  dB; (b) 贝努利序循环矩阵,  $SNR_{in} = 25$  dB; (c) CCMM,  $SNR_{in} = 10$  dB; (d) CCMM,  $SNR_{in} = 25$  dB

## 5 结 论

本文将循环矩阵的优点和混沌序列的优点相结合提出基于Cat混沌序列的CCMM的构造方法. 它不仅继承了循环矩阵的优点, 而且同时突出地利用了混沌的内在确定性来产生独立同分布的随机序列, 利用了混沌的外在随机性来满足测量矩阵对随机性的要求. 经检验发现CCMM很好地满足了RIPless特性. 使用CCMM与传统的循环测量矩阵分别对一维和二维信号进行压缩测量的结果表明本文所构造的CCMM与传统的循环测量矩阵相比具有诸多优越性, 混沌的内在确定性和外在随机性的有机结合使所构造的混沌压缩测量矩阵的综合性能优于传统的循环矩阵.

## 参考文献

[1] Donoho D L 2006 *IEEE Trans. Inform. Theory* **52** 1289  
 [2] Candès E J, Romberg J, Tao T 2006 *IEEE Trans. Inform. Theory* **52** 489  
 [3] Gribonval R, Nielsen M 2003 *IEEE Trans. Inform. Theory* **49** 3320  
 [4] Candès E J, Wakin M B 2008 *IEEE Sig. Proc. Mag.* **25** 21

[5] Candès E J 2008 *Comptes. Rendus Math.* **346** 589  
 [6] Baraniuk R, Davenport M, DeVore R, Wakin M 2008 *Constructive Approx.* **23** 253  
 [7] Candès E J, Plan Y 2011 *IEEE Trans. Inform. Theory* **57** 7235  
 [8] Chen S S, Donoho D L, Saunders M A 2001 *SIAM* **43** 129  
 [9] Needell D 2009 *Topics in compressed sensing Ph. D. Dissertation* (California: University of California)  
 [10] Zhang H M, Wang L Y, Yan B, Li L, Xi X Q, Lu L Z 2013 *Chin. Phys. B* **22** 078701  
 [11] Feng B C, Fang S, Zhang L G, Li H, Tong J J, Li W Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 112901 (in Chinese) [冯丙辰, 方晟, 张立国, 李红, 童节娟, 李文茜 2013 物理学报 **62** 112901]  
 [12] Yin W, Osher S, Xu Y <http://www.dtic.mil/cgi-bin/GetTRDoc?AD=ADA567406> [2012-8]  
 [13] Yin W, Morgan S, Yang J F, Zhang Y 2010 *Visual Communications and Image Processing* (International Society for Optics and Photonics) p77440K  
 [14] Romberg J 2009 *SIAM. J. Imaging Sci.* **2** 1098  
 [15] Guo J B, Xu X Z, Shi Q H, Hu T H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 110508 (in Chinese) [郭静波, 徐新智, 史启航, 胡铁华 2013 物理学报 **62** 110508]  
 [16] Yang J, Zhang Y 2011 *SIAM. J. Sci. Comp.* **33** 250  
 [17] Chen G, Mao Y, Chui C K 2004 *Chaos Solitons & Fractals* **21** 749  
 [18] Badea B, Vlad A 2006 *Computational Science and Its Applications* (Berlin: Springer Berlin Heidelberg) p1166  
 [19] Hoeffding W 1963 *J. American Stat. Assoc.* **58** 13

# Construction of a circulant compressive measurement matrix based on chaotic sequence and RIPless theory\*

Guo Jing-Bo<sup>†</sup> Wang Ren

(State Key Lab, Department of Electrical Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

( Received 31 March 2014; revised manuscript received 3 June 2014 )

## Abstract

Construction of a compressive measurement matrix is one of the key technologies of compressive sensing. A circulant matrix corresponds to the discrete convolutions with a high-speed algorithm, which has been widely used in compressive sensing. This paper combines the advantages of chaotic sequence with circulant matrix to propose a circulant compressive measurement matrix based on the chaotic sequence. The elements of a chaotic circulant measurement matrix are generated by taking advantage of the chaotic internal certainty, i.e. the independent identically distributed randomness sequence can be produced by the chaotic mapping formula using the initial value and a certain sampling distance. At the same time, the external randomness of chaotic sequence can satisfy the stochastic requirements of compressive measurement matrix. This paper presents the method of constructing chaotic circulant measurement matrix using a Cat chaotic map and the test method for RIPless property of the matrix. Measurement results of one-dimensional and two-dimensional signals using the chaotic circulant measurement matrix are studied and are compared with the results of conventional circulant measurement matrix. It can be shown that the chaotic circulant measurement matrix has good recovery results for both one-dimensional and two-dimensional signals. Moreover, it may get better results than the traditional matrix for the two-dimensional signal. From the point of view of phase diagram, the essential reason of chaotic circulant measurement matrix outperforms the conventional one is its integration of internal certainty with the external randomness of the chaotic sequence.

**Keywords:** compressive sensing, circulant matrix, chaotic sequence, RIPless theory

**PACS:** 84.40.Ua, 05.45.Vx, 05.40.-a

**DOI:** [10.7498/aps.63.198402](https://doi.org/10.7498/aps.63.198402)

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51277100).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [guojb@mail.tinghua.edu.cn](mailto:guojb@mail.tinghua.edu.cn)