

# 时变离散切换系统的迭代学习控制\*

曹伟† 孙明

(齐齐哈尔大学计算机与控制工程学院, 齐齐哈尔 161006)

(2013年6月6日收到; 2013年10月13日收到修改稿)

针对一类具有任意切换序列的时变离散切换系统的轨迹跟踪问题, 提出了一种离散迭代学习控制算法. 该算法在切换序列沿迭代轴不变而只沿时间轴变化的前提下, 将整个有限时间区间划分为有限个子区间, 并利用 $\lambda$ -范数对各个子区间上的收敛性进行了严格证明, 给出了算法收敛的范数形式的充分条件. 该方法不仅实现了时变离散切换系统在有限时间内对目标轨迹的完全跟踪, 而且结构简单更便于工程实现. 仿真结果验证了该方法的有效性.

**关键词:** 离散切换系统, 迭代学习控制, 轨迹跟踪, 任意切换率

**PACS:** 02.30.Yy, 42.82.Fv, 45.90.+t

**DOI:** 10.7498/aps.63.020201

## 1 引言

近年来切换系统逐渐成为控制领域的研究热点问题之一<sup>[1,2]</sup>. 切换系统是由一组微分方程或差分方程以及作用在其中的切换逻辑构成的一类重要的混杂系统, 它可以根据实际环境因素的变化通过切换逻辑使整个系统在各子系统之间进行切换, 以适应不同工况对系统的不同要求, 从而可以更好地提高系统性能<sup>[1]</sup>. 因此, 切换系统广泛应用在许多实际工程系统中, 例如交通控制系统<sup>[3]</sup>、电力系统<sup>[4]</sup>、电路系统<sup>[5-7]</sup>、网络控制系统<sup>[8]</sup>等. 目前, 有关切换系统的大量研究成果都集中在切换系统的稳定性问题方面<sup>[9-13]</sup>, 其中基于公共Lyapunov函数法(common Lyapunov function, CLF)和多重Lyapunov函数法(multiple Lyapunov function, MLF)是最主要的两种研究切换系统稳定性的方法. 然而在工程实际中很多问题本质上都可归结为输出跟踪问题, 如姿态控制、航天器的轨迹等<sup>[14,15]</sup>, 但对于切换系统的输出跟踪控制问题的研究成果却十分有限<sup>[16,17]</sup>, 其原因就在于实现切换系统的跟踪控制要比镇定和稳定问题困难得多.

迭代学习控制技术是针对在有限时间区间上具有重复运行特性的被控系统, 利用前一次或当前迭代时的实际输出与期望轨迹产生的跟踪误差, 通过不断迭代学习来修正控制输入, 直到在整个时间区间上实现对期望轨迹的完全跟踪. 由于迭代学习控制算法不依赖于被控对象精确的模型信息, 是一种基于品质学习的高级控制方法, 并且控制器结构简单便于工程实现. 因此, 迭代学习控制技术自从被Arimoto等<sup>[18]</sup>提出以来, 经过近30年的发展取得了丰富的研究成果<sup>[19-22]</sup>, 研究对象涉及连续系统、离散系统、分布参数系统、分数阶系统等. 此外, 在实际工程中还会经常遇到具有重复运行特性的切换系统, 如交通控制系统<sup>[23]</sup>和化工间歇过程<sup>[24]</sup>都可以描述为具有重复特性的切换系统, 这就为切换系统能够使用迭代学习控制方法提供了必要依据. 然而, 目前多数学者只是针对非切换系统的控制问题进行了大量研究<sup>[25,26]</sup>, 而针对切换系统的迭代学习控制问题研究成果较少<sup>[17]</sup>. 文献<sup>[17]</sup>针对线性连续切换系统, 研究了D型(derivative-type)迭代学习控制算法, 实现了在整个运行有限时间区间上完全跟踪期望轨迹. 由于连续系统与其离散系统在很大程度上有着本质的

\* 国家自然科学基金青年科学基金(批准号: 61100103)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: [yiyuqq168@163.com](mailto:yiyuqq168@163.com)

差异, 所以连续系统的很多特性与研究方法都不能直接移植或应用到离散系统上, 同时离散形式的迭代学习控制器, 更为直接且便于计算机实现. 此外, 根据文献 [27, 28] 的思想, 也可以在数据驱动框架下结合一定的先验模型知识, 基于迭代学习策略来设计迭代学习观测器, 解决系统的故障诊断问题. 因此, 研究离散时间切换系统的迭代学习控制算法将更具有实用价值.

基于以上分析, 本文针对在有限时间区间上对期望目标轨迹执行重复跟踪任务的离散时间切换系统, 在沿迭代轴不变而只沿时间轴变化的任意切换序列下, 将整个有限时间区间划分为有限个子区间, 提出了一种离散迭代学习控制算法, 并利用压缩映射方法严格证明了算法在各个子区间上在  $\lambda$ -范数度量意义下的收敛性, 给出了范数形式的收敛条件.

## 2 问题描述

考虑如下的一类在有限时间区间上具有重复运行特性的时变离散切换系统:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k(t+1) &= \mathbf{A}_{\alpha(t)}(t)\mathbf{x}_k(t) \\ &\quad + \mathbf{B}_{\alpha(t)}(t)\mathbf{u}_k(t), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_k(t) = \mathbf{C}_{\alpha(t)}(t)\mathbf{x}_k(t), \quad (2)$$

式中: 离散时间  $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ , 记为  $0 \leq t \leq T$ ,  $\mathbf{x}(k) \in R^n$ ,  $\mathbf{u}(k) \in R^p$ ,  $\mathbf{y}(k) \in R^q$  分别为系统的状态向量、输入向量和输出向量,  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{B}(t)$ ,  $\mathbf{C}(t)$  为适当维数的矩阵,  $\alpha(t)$  为任意切换序列, 其定义为  $\alpha(t) : (1, 2, \dots) \rightarrow M = \{1, 2, \dots, m\}$ , 即  $\alpha(t)$  在有限集  $M = \{1, 2, \dots, m\}$  中取值,  $m > 1$  为子系统个数, 当  $\alpha(t) = i$  时第  $i$  个子系统被激活, 下标  $k$  为迭代次数.

**假设 1** 对于给定的目标轨迹  $\mathbf{y}_d(t)$ , 存在理想状态  $\mathbf{x}_d(t)$  和控制  $\mathbf{u}_d(t)$  满足

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_d(t+1) &= \mathbf{A}_{\alpha(t)}(t)\mathbf{x}_d(t) \\ &\quad + \mathbf{B}_{\alpha(t)}(t)\mathbf{u}_d(t), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\mathbf{y}_d(t) = \mathbf{C}_{\alpha(t)}(t)\mathbf{x}_d(t). \quad (4)$$

**假设 2**  $\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_d(0)$ , 即切换系统在每次迭代运行时, 其初始状态与理想初始状态是相同的.

**假设 3** 系统的理想目标轨迹  $\mathbf{y}_d(t)$  是迭代无关的.

**假设 4** 采样时间  $t_s \leq 0.01T$ , 以保证对系统信息采集的足够多.

对满足假设条件 1—3 的离散切换系统 (1) 和 (2) 设计如下迭代学习控制算法:

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t) + \mathbf{\Gamma}(t)\mathbf{e}_k(t+1), \quad (5)$$

式中  $\mathbf{\Gamma}(t)$  是学习增益矩阵,  $\mathbf{e}_k(t) = \mathbf{y}_d(t) - \mathbf{y}_k(t)$  为跟踪误差. 现在的控制目标为, 利用设计的迭代学习控制算法 (5) 来激励满足假设条件 1—3 的时变离散切换系统 (1) 和 (2), 学习增益矩阵满足何种条件时, 系统的实际输出在有限时间区间内完全跟踪理想目标轨迹.

## 3 收敛性分析

为了便于迭代学习控制算法收敛性的证明, 首先给出以下定义和引理.

**定义 1** 离散时间向量函数  $\mathbf{h} : [0, T] \rightarrow R^n$  的  $\lambda$  范数定义为

$$\|\mathbf{h}\|_\lambda = \sup_{t \in [0, T]} \{\lambda^t \|\mathbf{h}(t)\|\} (0 < \lambda < 1).$$

**引理 1** 对于任意  $\forall i \in Z^+$  如果都能使不等式  $|z_{i+1}| \leq \theta_i |z_i| + |\delta_i|$  成立, 则当  $\lim_{i \rightarrow \infty} |\delta_i| = 0$  时, 有  $\lim_{i \rightarrow \infty} |z_i| = 0$  成立. 式中:  $z_i \subset R$ ,  $\delta_i \subset R$  为两个实数序列,  $i \in Z^+$ ,  $0 < \theta_i \leq \theta < 1$ ,  $\theta$  为常数. 其证明见文献 [17].

同时为了研究的方便, 针对离散切换系统 (1) 和 (2), 不妨假设每个子系统在整个时间区间  $0 \leq t \leq T$  内只执行一次, 且切换序列如下所示:

$$\alpha(t) = i = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq t_1 \\ 2, & t_1 \leq t \leq t_2 \\ \vdots \\ m, & t_{m-1} \leq t \leq T \end{cases}, \quad (6)$$

此时离散切换系统 (1) 和 (2) 可改写成

$$\mathbf{x}_k(t+1) = \mathbf{A}_i(t)\mathbf{x}_k(t) + \mathbf{B}_i(t)\mathbf{u}_k(t), \quad (7)$$

$$\mathbf{y}_k(t) = \mathbf{C}_i(t)\mathbf{x}_k(t), \quad (8)$$

式中  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ . 可以用以下  $m$  个阶段给出系统 (7) 和 (8) 的状态响应:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_k(t) = \Phi_1(t, t_0)\mathbf{x}_k(t_0) + \sum_{s=t_0}^{t-1} \Phi_1(t, s+1)\mathbf{B}_1(s)\mathbf{u}_k(s) \\ t_0 + 1 \leq t \leq t_1 + 1 \\ \mathbf{x}_k(t) = \Phi_2(t, t_1)\mathbf{x}_k(t_1) + \sum_{s=t_1}^{t-1} \Phi_2(t, s+1)\mathbf{B}_2(s)\mathbf{u}_k(s) \\ t_1 + 1 \leq t \leq t_2 + 1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k(t) = \Phi_m(t, t_{m-1})\mathbf{x}_k(t_{m-1}) + \sum_{s=t_{m-1}}^{t-1} \Phi_m(t, s+1) \times \mathbf{B}_m(s)\mathbf{u}_k(s) \\ t_{m-1} + 1 \leq t \leq T + 1 \end{array} \right. \quad (9)$$

记  $t_0 = 0, t_m = T$ , 则 (9) 式可改写为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k(t) = & \Phi_i(t, t_{i-1})\mathbf{x}_k(t_{i-1}) \\ & + \sum_{s=t_{i-1}}^{t-1} \Phi_i(t, s+1)\mathbf{B}_i(s)\mathbf{u}_k(s) \\ & t_{i-1} + 1 \leq t \leq t_i + 1, \end{aligned} \quad (10)$$

式中:  $1 \leq i \leq m, \Phi_i(t, s)$  是由 (7) 式中的  $\mathbf{A}_i(t)$  确定的状态转移矩阵, 它满足

$$\begin{aligned} \Phi_i(t, s) &= \mathbf{A}_i(t-1)\mathbf{A}_i(t-2)\cdots\mathbf{A}_i(s), (t > s), \\ \Phi_i(s, s) &= \mathbf{I}_i. \end{aligned}$$

**注 1** 由 (9) 式可知离散切换系统与非切换系统的迭代学习控制存在着根本性的区别, 具体体现在以下两点: 1) 切换系统的状态响应不仅取决于系统的矩阵参数, 而且还与子系统切换的时刻和顺序密切相关; 2) 假设 1 中给出的可重复性初始条件只适用于第 1 个子系统, 而对其他子系统都不适用.

**注 2** 虽然在假设  $\alpha(t)$  为 (6) 式所示的切换序列时, 得到离散切换系统的状态响应 (9) 式. 但是由 (9) 式容易看出该状态响应也适用于  $\alpha(t)$  为其他任意切换序列时的情况, 只是系统矩阵参数在相应时间段内的数值不同.

根据以上分析, 可以得到如下跟踪定理.

**定理 1** 考虑时变离散切换系统 (7) 和 (8), 若满足假设条件 1—3, 设计如 (5) 式所示的迭代学习控制算法来激励该系统时, 若学习增益矩阵满足

$$\begin{aligned} \|\mathbf{I} - \Gamma(t)\mathbf{C}_i(t+1)\mathbf{B}_i(t)\| &\leq \rho_i < 1 \\ (0 \leq t \leq T, \quad i = 1, 2, \dots, m), \end{aligned}$$

则输出轨迹一致收敛于期望轨迹, 即当  $k \rightarrow \infty$  时, 有  $\mathbf{y}_k(t) \rightarrow \mathbf{y}_d(t), (0 \leq t \leq T + 1)$ .

**注 3** 定理 1 给出了在区间  $0 \leq t \leq T + 1$  上输出误差的收敛性. 这里考虑区间  $0 \leq t \leq T$  上而不是区间  $0 \leq t \leq T - 1$  上的控制是为了与  $\lambda$  范数的定义相符合.

**证明** 当系统初态为  $\mathbf{x}_k(0)$ , 输入为  $\mathbf{u}_k(t), 0 \leq t \leq T$  时, (7) 式的解可写成

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k(t) = & \Phi_i(t, 0)\mathbf{x}_k(0) + \sum_{s=0}^{t-1} \Phi_i(t, s+1) \\ & \times \mathbf{B}_i(s)\mathbf{u}_k(s) \quad (1 \leq t \leq T + 1). \end{aligned} \quad (11)$$

考察第  $k + 1$  次迭代时的控制误差

$$\Delta \mathbf{u}_{k+1}(t) = \Delta \mathbf{u}_k(t) - \Gamma(t)\mathbf{e}_k(t+1), \quad (12)$$

式中,  $0 \leq t \leq T, \Delta \mathbf{u}_k(t) = \mathbf{u}_d(t) - \mathbf{u}_k(t)$ . 又由系统 (8) 和假设 1 可知

$$\begin{aligned} & \mathbf{e}_k(t+1) \\ = & \mathbf{C}_i(t+1)[\mathbf{x}_d(t+1) - \mathbf{x}_k(t+1)] \\ = & \mathbf{C}_i(t+1)\Delta \mathbf{x}_k(t+1) \\ = & \mathbf{C}_i(t+1)\mathbf{A}_i(t)\Delta \mathbf{x}_k(t) \\ & + \mathbf{C}_i(t+1)\mathbf{B}_i(t)\Delta \mathbf{u}_k(t), \end{aligned} \quad (13)$$

式中,  $\Delta \mathbf{x}_k(t) = \mathbf{x}_d(t) - \mathbf{x}_k(t)$ . 将 (13) 式代入 (12) 式可得

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_{k+1}(t) = & \Delta \mathbf{u}_k(t) - \Gamma(t)\mathbf{C}_i(t+1)\mathbf{A}_i(t)\Delta \mathbf{x}_k(t) \\ & - \Gamma(t)\mathbf{C}_i(t+1)\mathbf{B}_i(t)\Delta \mathbf{u}_k(t) \\ = & [\mathbf{I} - \Gamma(t)\mathbf{C}_i(t+1)\mathbf{B}_i(t)]\Delta \mathbf{u}_k(t) \\ & - \Gamma(t)\mathbf{C}_i(t+1)\mathbf{A}_i(t)\Delta \mathbf{x}_k(t), \end{aligned} \quad (14)$$

式中,  $0 \leq t \leq T$ . 对 (14) 式两边取范数有

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{u}_{k+1}(t)\| \leq & \|\mathbf{I} - \Gamma(t)\mathbf{C}_i(t+1)\mathbf{B}_i(t)\| \|\Delta \mathbf{u}_k(t)\| \\ & + \|\Gamma(t)\mathbf{C}_i(t+1)\mathbf{A}_i(t)\| \|\Delta \mathbf{x}_k(t)\| \leq \rho_i \|\Delta \mathbf{u}_k(t)\| \\ & + b_i \|\Delta \mathbf{x}_k(t)\|, \end{aligned} \quad (15)$$

式中,  $0 \leq t \leq T, b_i = \sup_{0 \leq t \leq T} \|\Gamma(t)\mathbf{C}_i(t+1)\mathbf{A}_i(t)\|$   
 $i = 1, 2, \dots, m$ .

下面对区间  $0 \leq t \leq t_1, t_1 \leq t \leq t_2, \dots, t_{m-1} \leq t \leq T$  上的收敛性逐个进行讨论.

1) 当  $0 \leq t \leq t_1$  时, 切换系统的第 1 个子系统执行, 则由 (10) 式和假设 1 可知有

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k(t) = & \Phi_1(t, 0)\mathbf{x}_k(0) + \sum_{s=0}^{t-1} \Phi_1(t, s+1) \\ & \times \mathbf{B}_1(s)\mathbf{u}_k(s) \quad (1 \leq t \leq t_1 + 1), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_d(t) = & \Phi_1(t, 0)\mathbf{x}_d(0) + \sum_{s=0}^{t-1} \Phi_1(t, s+1) \\ & \times \mathbf{B}_1(s)\mathbf{u}_d(s) \quad (1 \leq t \leq t_1 + 1). \end{aligned} \quad (17)$$

根据假设 2 知  $\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_d(0)$ , 因此由 (17) 式减去 (16) 式并代入 (15) 式可得

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{u}_{k+1}(t)\| & \leq \rho_1 \|\Delta \mathbf{u}_k(t)\| + b_1 \|\Delta \mathbf{x}_k(t)\| \\ & \leq \rho_1 \|\Delta \mathbf{u}_k(t)\| \\ & + b_1 \sum_{s=0}^{t-1} \|\Phi_1(t, s+1)\mathbf{B}_1(s)\| \|\Delta \mathbf{u}_k(s)\| \\ & \leq \rho_1 \|\Delta \mathbf{u}_k(t)\| + a_1 b_1 \sum_{s=0}^{t-1} \|\Delta \mathbf{u}_k(s)\|, \end{aligned} \quad (18)$$

式中,  $1 \leq t \leq t_1$ ,  $a_1 = \sup_{1 \leq t \leq t_1, 0 \leq s \leq t_1-1} \|\Phi_1(t, s+1)\mathbf{B}_1(s)\|$ . 上式两端同乘  $\lambda^t$ ,  $0 < \lambda < 1$ , 可得

$$\begin{aligned} \lambda^t \|\Delta \mathbf{u}_{k+1}(t)\| & \leq \rho_1 \lambda^t \|\Delta \mathbf{u}_k(t)\| \\ & + a_1 b_1 \sum_{s=0}^{t-1} \lambda^{t-s} \lambda^s \|\Delta \mathbf{u}_k(s)\| \leq \rho_1 \lambda^t \|\Delta \mathbf{u}_k(t)\| \\ & + a_1 b_1 \sum_{s=0}^{t-1} \lambda^{t-s} \sup_{0 \leq \tau \leq t_1} \{\lambda^\tau \|\Delta \mathbf{u}_k(\tau)\|\} \\ & \leq \rho_1 \lambda^t \|\Delta \mathbf{u}_k(t)\| \\ & + a_1 b_1 \sum_{s=0}^{t-1} \lambda^{t-s} \|\Delta \mathbf{u}_k\|_\lambda \\ & \leq \left( \rho_1 + a_1 b_1 \frac{\lambda(1-\lambda^{t_1})}{1-\lambda} \right) \\ & \times \|\Delta \mathbf{u}_k\|_\lambda, \end{aligned} \quad (19)$$

式中,  $1 \leq t \leq t_1$ . 由 (15) 式及假设 2 知 (19) 式对  $t=0$  也成立. 因此根据  $\lambda$  范数定义有

$$\|\Delta \mathbf{u}_{k+1}\|_\lambda \leq \bar{\rho}_1 \|\Delta \mathbf{u}_k\|_\lambda, \quad (20)$$

式中,  $\bar{\rho}_1 = \rho_1 + a_1 b_1 \frac{\lambda(1-\lambda^{t_1})}{1-\lambda}$ . 显然由  $\rho_1 < 1$  可找到足够小的  $\lambda$  使  $\bar{\rho}_1 < 1$ , 因此有  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Delta \mathbf{u}_k\|_\lambda = 0$ . 也就是说, 算法中的学习增益矩阵的选择如果满足  $\|\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}(t)\mathbf{C}_1(t+1)\mathbf{B}_1(t)\| \leq \rho_1 < 1$  时, 则在时间区间  $0 \leq t \leq t_1$  上对于子系统 1 满足  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{u}_k(t) = \mathbf{u}_d(t)$ . 又根据 (2), (4), (16) 和 (17) 式可知, 对于  $0 < \lambda < 1$  在区间  $0 \leq t \leq t_1$  上同样可以得到  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}_k(t) = \mathbf{y}_d(t)$ .

2) 当  $t_1 \leq t \leq t_2$  时, 切换系统的第 2 个子系统执行, 则由 (10) 式和假设 1 可知有

$$\mathbf{x}_k(t) = \Phi_2(t, t_1)\mathbf{x}_k(t_1) + \sum_{s=t_1}^{t-1} \Phi_2(t, s+1)\mathbf{B}_2(s)$$

$$\times \mathbf{u}_k(s) \quad (t_1 + 1 \leq t \leq t_2 + 1), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_d(t) = & \Phi_2(t, t_1)\mathbf{x}_d(t_1) + \sum_{s=t_1}^{t-1} \Phi_2(t, s+1)\mathbf{B}_2(s) \\ & \times \mathbf{u}_d(s) \quad (t_1 + 1 \leq t \leq t_2 + 1). \end{aligned} \quad (22)$$

在此需要指出, 由于状态  $\mathbf{x}_k(t_1)$  的值随迭代次数而变化, 因此 (21) 和 (22) 式的初始状态不再相等. 由 (22) 式减 (21) 式并代入 (15) 式可得

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{u}_{k+1}(t)\| & \leq \rho_2 \|\Delta \mathbf{u}_k(t)\| + b_2 \|\Delta \mathbf{x}_k(t)\| \\ & \leq \rho_2 \|\Delta \mathbf{u}_k(t)\| + b_2 \|\Phi_2(t, t_1)\| \|\Delta \mathbf{x}_k(t_1)\| \\ & + b_2 \sum_{s=t_1}^{t-1} \|\Phi_2(t, s+1)\mathbf{B}_2(s)\| \|\Delta \mathbf{u}_k(s)\| \\ & \leq \rho_2 \|\Delta \mathbf{u}_k(t)\| + b_2 c_1 \|\Delta \mathbf{x}_k(t_1)\| \\ & + a_2 b_2 \sum_{s=t_1}^{t-1} \|\Delta \mathbf{u}_k(s)\|, \end{aligned} \quad (23)$$

式中,

$$\begin{aligned} a_2 = & \sup_{t_1+1 \leq t \leq t_2, 0 \leq s \leq t_2-1} \|\Phi_2(t, s+1)\mathbf{B}_2(s)\|, \\ c_1 = & \sup_{t_1+1 \leq t \leq t_2} \|\Phi_2(t, t_1)\|. \end{aligned}$$

对 (23) 式两端同乘  $\lambda^t$ ,  $0 < \lambda < 1$ , 可得

$$\begin{aligned} \lambda^t \|\Delta \mathbf{u}_{k+1}(t)\| & \leq \rho_2 \lambda^t \|\Delta \mathbf{u}_k(t)\| \\ & + a_2 b_2 \sum_{s=t_1}^{t-1} \lambda^{t-s} \lambda^s \|\Delta \mathbf{u}_k(s)\| + b_2 c_1 \lambda^t \|\Delta \mathbf{x}_k(t_1)\| \\ & \leq \rho_2 \lambda^t \|\Delta \mathbf{u}_k(t)\| \\ & + a_2 b_2 \sum_{s=t_1}^{t-1} \lambda^{t-s} \sup_{t_1 \leq \tau \leq t_2} \{\lambda^\tau \|\Delta \mathbf{u}_k(\tau)\|\} \\ & + b_2 c_1 \lambda^t \|\Delta \mathbf{x}_k(t_1)\| \leq \rho_2 \lambda^t \|\Delta \mathbf{u}_k(t)\| \\ & + a_2 b_2 \sum_{s=t_1}^{t-1} \lambda^{t-s} \|\Delta \mathbf{u}_k\|_\lambda + b_2 c_1 \lambda^t \|\Delta \mathbf{x}_k(t_1)\| \\ & \leq \rho_2 \lambda^t \|\Delta \mathbf{u}_k(t)\| + a_2 b_2 \frac{\lambda(1-\lambda^{t_2-t_1})}{1-\lambda} \|\Delta \mathbf{u}_k\|_\lambda \\ & + b_2 c_1 \lambda^t \|\Delta \mathbf{x}_k(t_1)\|, \end{aligned} \quad (24)$$

式中,  $t_1 + 1 \leq t \leq t_2$ . 由  $\lambda$  范数的定义可知

$$\|\Delta \mathbf{u}_{k+1}\|_\lambda \leq \bar{\rho}_2 \|\Delta \mathbf{u}_k\|_\lambda + b_2 c_1 \|\Delta \mathbf{x}_k(t_1)\|, \quad (25)$$

式中,  $\bar{\rho}_2 = \rho_2 + a_2 b_2 \frac{\lambda(1-\lambda^{t_2-t_1})}{1-\lambda}$ .

根据对区间  $0 \leq t \leq t_1$  上的收敛性证明可知, 在整个区间  $0 \leq t \leq t_1$  上都有  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{u}_k(t) = \mathbf{u}_d(t)$  成立和  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}_k(t) = \mathbf{y}_d(t)$  成立, 即有  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k(t) = \mathbf{x}_d(t)$  成立, 所以有  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Delta \mathbf{x}_k(t_1)\| = 0$  成立. 又因

为由  $\rho_2 < 1$  可找到足够小的  $\lambda$  使得  $\bar{\rho}_2 < 1$ , 因此根据引理 1, 由  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\Delta \mathbf{x}_k(t_1)| = 0$  和 (25) 式可得  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Delta \mathbf{u}_k\|_\lambda = 0$ . 也就是说, 算法中的学习增益矩阵的选择如果满足  $\|\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}(t)\mathbf{C}_2(t+1)\mathbf{B}_2(t)\| \leq \rho_2 < 1$  时, 则在区间  $t_1 \leq t \leq t_2$  上对于子系统 2 满足  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{u}_k(t) = \mathbf{u}_d(t)$ . 再根据 (2), (4), (21) 和 (22) 式可知, 对于  $0 < \lambda < 1$  在区间  $t_1 \leq t \leq t_2$  上同样可以得到  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}_k(t) = \mathbf{y}_d(t)$ .

依次类推, 对于算法在区间  $t_2 \leq t \leq t_3, \dots, t_{m-1} \leq t \leq T$  上的收敛性同样可以证明. 因此, 如果定理 1 中的条件  $\|\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}(t)\mathbf{C}_i(t+1)\mathbf{B}_i(t)\| \leq \rho_i < 1, i = 1, 2, \dots, m$  满足, 则在整个区间  $0 \leq t \leq T$  上都有  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{u}_k(t) = \mathbf{u}_d(t)$  和  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}_k(t) = \mathbf{y}_d(t)$  成立. 证毕

**注 4** 由注 2 和定理 1 的证明过程可知, 定理 1 对于具有其他任意切换序列以及在有限时间区间  $0 \leq t \leq T$  上每个子系统执行多次时的时变离散切换系统同样成立. 同时, 为了在实际应用过程中使学习增益的选择容易满足收敛条件, 也可以修改学习算法为  $\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t) + \mathbf{\Gamma}_i(t)\mathbf{e}_k(t+1)$ , 则收敛条件相应修改为  $\|\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_i(t)\mathbf{C}_i(t+1)\mathbf{B}_i(t)\| \leq \rho_i < 1, i = 1, 2, \dots, m$ .

### 4 仿真实验及分析

为了验证算法的有效性, 考虑如下一类含有两个子系统的时变离散切换系统

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k(t+1) = \mathbf{A}_{\alpha(t)}(t)\mathbf{x}_k(t) + \mathbf{B}_{\alpha(t)}(t)\mathbf{u}_k(t) \\ \mathbf{y}_k(t) = \mathbf{C}_{\alpha(t)}(t)\mathbf{x}_k(t) \end{cases}, \quad (26)$$

式中, 切换率  $\alpha(t)$  为取值 1 和 2 的随机切换序列, 系统中的参数矩阵分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ -0.25 & 0.0015t \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 1 \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ -0.45 & 0.0025t \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 1 \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

利用设计的算法 (5) 来激励系统 (26), 假设系统运行的时间为  $0 \leq t \leq 1$ , 期望轨迹为  $\mathbf{y}_d(t) = \sin(10t)$ , 采样时间为 0.01 s, 初始状态为  $\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_d(0) = 0$ , 初始控制输入为  $\mathbf{u}_0(t) = 0$ . 学习增益  $\mathbf{\Gamma} = 1.4$ , 满足  $\rho_1 = 0.372 < 1, \rho_2 = 0.58 < 1$  的收敛条件.

仿真结果如图 1—图 4 所示. 从仿真结果可以看出, 对于具有任意切换序列的时变离散切换系统, 本文所设计的迭代学习控制器, 随着迭代次数的增加可以实现在有限时间区间内对期望目标轨迹的完全跟踪. 原因就在于离散切换系统的任意切换序列沿迭代轴不变而只沿时间轴变化, 因此在迭代域内切换系统仍然是一个确定性的系统.

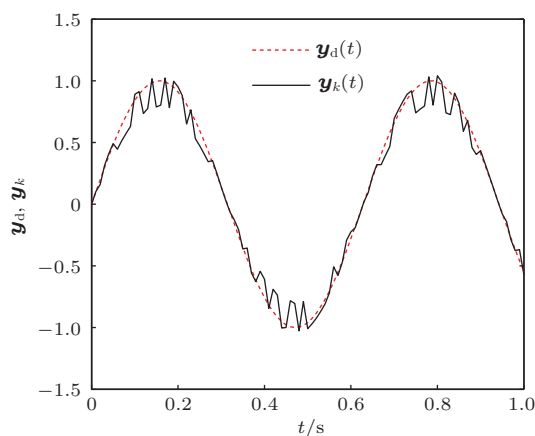


图 1 迭代 3 次时的输出曲线

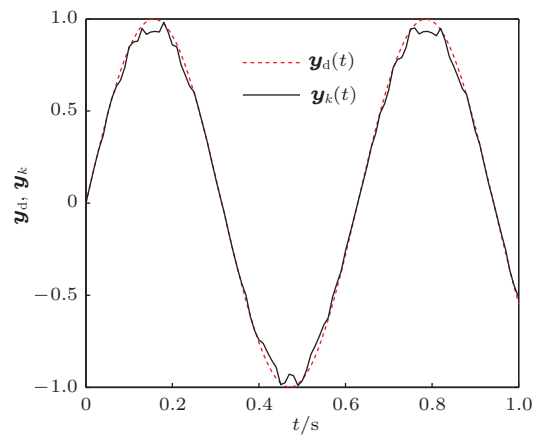


图 2 迭代 5 次时的输出曲线

为了进一步说明本文提出算法的优越性, 在此针对离散切换系统 (26) 采用状态反馈鲁棒控制  $\mathbf{u}_i(t) = \mathbf{V}_i \mathbf{X}_i^{-1} \mathbf{x}(t)$  进行仿真比较, 当切换率  $\alpha(t)$  取值 1 和 2 时, 根据系统 (26) 的状态参数可分别计算出线性矩阵不等式的可行解如下:

$$\mathbf{V}_1 = 1.0e - 008[-0.2632 \quad -0.4232],$$

$$\mathbf{X}_1 = 1.0e - 008 \begin{bmatrix} 0.3195 & 0.4136 \\ 0.6070 & 0.7948 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V}_2 = 1.0e - 012[-0.1064 - 0.2986],$$

$$\mathbf{X}_2 = 1.0e - 012 \begin{bmatrix} 0.1291 & 0.1874 \\ 0.2151 & 0.4205 \end{bmatrix}.$$

迭代学习控制15次和状态反馈控制的比较结果如图5所示. 从仿真结果图5可以看出, 状态反馈鲁棒控制的实际输出对期望轨迹的跟踪效果明显不如迭代学习控制的跟踪效果好. 原因在于迭代学习控制算法不需要被控对象的模型信息, 只需要利用实际系统输出和期望输出产生的偏差信号, 经过简单的迭代运算来修正不理想的控制信号, 便可以实现对期望轨迹的完全跟踪. 而基于线性矩阵不等式的状态反馈鲁棒控制, 控制精度依赖于被控对象的模型精确程度.

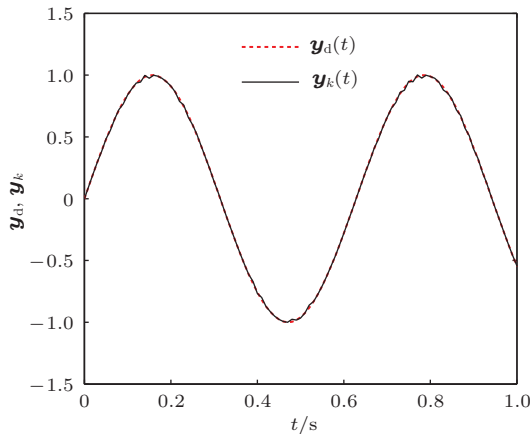


图3 迭代15次时的输出曲线

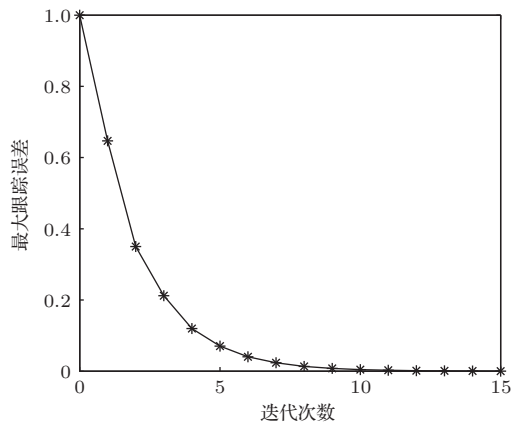


图4 跟踪误差随迭代次数的变化曲线

另外, 从如图6所示的迭代学习控制系统结构图来看, 迭代学习控制方法是利用存储器保存的前

一次控制信息和存储器保存的前一次跟踪误差, 来构造当前的控制输入信息, 由于这种离线形式的迭代学习控制律没有在线计算量, 因此具有在线计算量小的优点. 从迭代学习律(5)的本质上来看, 迭代学习控制器相当于在迭代域上的一个积分器, 因而控制器结构简单, 便于工程实现. 而基于线性矩阵不等式的状态反馈鲁棒控制算法, 需要根据实时反馈的状态信息, 来寻找矩阵不等式的可行解, 因此理论计算复杂, 在线计算量大.

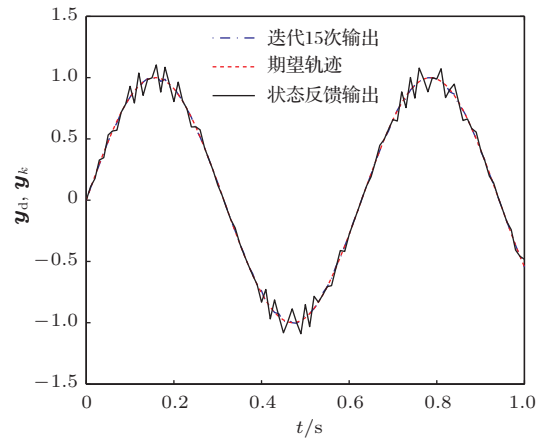


图5 反馈控制和迭代学习15次时的输出曲线

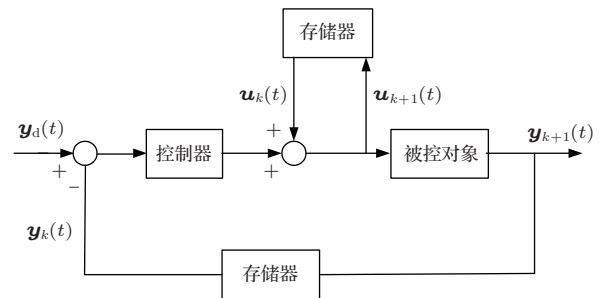


图6 迭代学习控制系统结构图

## 5 结论

针对一类具有任意切换序列的离散时间切换系统, 提出了一种离散迭代学习控制算法. 并在理论上严格证明了算法在λ-范数度量意义下的收敛性, 给出了迭代学习控制算法收敛的范数形式的充分条件. 研究表明, 该算法不仅对于在迭代域不变而只在时域任意切换的时变离散切换系统, 经过一定次数的迭代学习后, 可以实现在有限时间区间内对期望目标轨迹的完全跟踪, 而且控制器结构简单, 更便于工程实现.

## 参考文献

- [1] Liberzon D, Morse A S 1999 *IEEE Control Syst. Magazine* **19** 59
- [2] Lin H, Antsaklis P J 2009 *IEEE Trans. Autom. Control* **54** 308
- [3] Balluchi A, Dibenedett M D, Pinello C 1999 *Automatica* **35** 519
- [4] Ooba T, Funahashi Y 2003 *IEEE Trans. Autom. Control* **42** 1697
- [5] Gao C, Bi Q S, Zhang Z D 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 020504 (in Chinese) [高超, 毕勤胜, 张正娣 2013 物理学报 **62** 020504]
- [6] Wu L F, Guan Y, Liu Y 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 110510 (in Chinese) [吴立峰, 关永, 刘勇 2013 物理学报 **62** 110510]
- [7] Ma X D, Bi Q S 2013 *Acta Phys. Sin.* **61** 240506 (in Chinese) [马新东, 毕勤胜 2013 物理学报 **61** 240506]
- [8] Jia X C, Zheng L H, Chi X B 2009 *Acta Autom. Sin.* **35** 1476 (in Chinese) [贾新春, 郑利红, 池小波 2009 自动化学报 **35** 1476]
- [9] Cheng D, Guo L, Lin Y 2005 *IEEE Trans. Autom. Control* **50** 661
- [10] Lin H, Antsaklis P 2008 *IEEE Trans. Autom. Control* **53** 1
- [11] Gao Z R, Shen Y X, Ji Z C 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 120203 (in Chinese) [高在瑞, 沈艳霞, 纪志成 2012 物理学报 **61** 120203]
- [12] Fang Z M, Xiang Z R, Chen Q W 2011 *Control and Decision* **26** 1327 (in Chinese) [方志明, 向嵘嵘, 陈庆伟 2011 控制与决策 **26** 1327]
- [13] Xiao H M, Zhao L, Wang C H 2011 *Control Theory & Applications* **28** 1621 (in Chinese) [肖会敏, 赵林, 王春花 2011 控制理论与应用 **28** 1621]
- [14] Sharma R, Tewari A 2004 *IEEE Trans. Control Syst. Technol.* **12** 677
- [15] No T S, Min B M, Stone R H 2005 *Control Engineer. Pract.* **13** 601
- [16] Li L L, Shao C 2012 *Control and Decision* **27** 304 (in Chinese) [李莉莉, 邵诚 2012 控制与决策 **27** 304]
- [17] Bu X H, Hou Z S, Yu F S 2012 *Control Theory & Applications* **29** 1051 (in Chinese) [卜旭辉, 侯忠生, 余发山 2012 控制理论与应用 **29** 1051]
- [18] Arimoto S, Kawamura S, Miyazaki F 1984 *J. Robo. Syst.* **1** 123
- [19] Cao W, Cong W, Li J 2012 *Control and Decision* **27** 473 (in Chinese) [曹伟, 丛望, 李金 2012 控制与决策 **27** 473]
- [20] Chris T F, Cai Z L, Eric R, Paul L L 2011 *IEEE Trans. Control Syst. Technol.* **19** 590
- [21] Tian S P, Wu X S 2012 *Control Theory & Applications* **29** 1082 (in Chinese) [田森平, 吴忻生 2012 控制理论与应用 **29** 1082]
- [22] Li Y, Chen Y Q, Ahn H S 2012 *Control Theory & Applications* **29** 1031 (in Chinese) [李岩, 陈阳泉, 安孝晟 2012 控制理论与应用 **29** 1031]
- [23] Hou Z S, Xu J X, Yan J W 2008 *Transport. Res. C* **16** 71
- [24] Gao F R, Yang Y, Shao C 2002 *Chem. Engineer. Sci.* **56** 7025
- [25] Wang J, Hui G T, Xie X P 2013 *Chin. Phys. B* **22** 030206
- [26] Wang J W, Zeng C B 2012 *Chin. Phys. B* **21** 110206
- [27] Yin S, Luo H, Ding S 2013 *IEEE Trans. Industrial Electron.* 10.1109/TIE.2013.2273477
- [28] Yin S, Ding S X, Haghani A 2012 *J. Process Control* **22** 1567

# Iterative learning control for discrete time-varying switched systems\*

Cao Wei<sup>†</sup> Sun Ming

(College of Computer and Control Engineering, Qiqihar University, Qiqihar 161006, China)

( Received 6 June 2013; revised manuscript received 13 October 2013 )

## Abstract

Aiming at the problem of trajectory tracking in a class of discrete time-varying switched system with arbitrary sequence, in this paper we propose a discrete iterative learning control algorithm. Under the precondition that the switched sequence does not change along the iterative axis but it does along the time axis, this algorithm divides the whole finite time region into several finite subintervals, and uses  $\lambda$ -norm to prove the convergence strictly, and provides the sufficient convergent condition of the algorithm in the norm form. This method not only realizes the complete tracking for a discrete time-varying switched system within a limited time, but also has a simple structure easy to be realized in engineering. Simulation results verify the validity of the method.

**Keywords:** discrete-time switched systems, iterative learning control, trajectory tracking, arbitrary switched rules

**PACS:** 02.30.Yy, 42.82.Fv, 45.90.+t

**DOI:** [10.7498/aps.63.020201](https://doi.org/10.7498/aps.63.020201)

---

\* Project supported by the Young Scientists Fund of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61100103).

† Corresponding author. E-mail: [yiyuqq168@163.com](mailto:yiyuqq168@163.com)