

在非惯性系中处于热库中的两个腔的纠缠动力学*

梁艳 吴奇成 计新†

(延边大学理学院物理系, 延吉 133002)

(2013年7月16日收到; 2013年10月8日收到修改稿)

研究了非惯性系中处于热库中的两个腔的纠缠动力学. 不仅考虑了加速参数对纠缠的影响, 还考虑了 Unruh 单粒子态左右成分之间的不同比率对纠缠的影响. 结果表明: 加速参数一定时, 随着腔间纠缠的减少, 热库间的纠缠将会增加; 此外, 当初始状态为最大纠缠, 并且, $|q_R| = 1$ 时, 粒子和反粒子模之间会产生纠缠的再分配; 发现当 $|q_R| = |q_L| = 1/\sqrt{2}$, 在无限加速参数下发生纠缠猝死现象; 当 $q_R < 1/\sqrt{2}$ 时, 纠缠在有限加速参数下就会发生纠缠猝死现象.

关键词: 纠缠猝死, 非惯性系, Unruh 效应

PACS: 03.65.Ud, 03.67.Mn, 04.70.Dy

DOI: 10.7498/aps.63.020301

1 引言

纠缠在量子信息理论中扮演着重要角色, 作为一种重要资源, 它被广泛应用于量子通信^[1,2]、量子隐形传送^[3,4]、量子密码术^[5] 和量子计算^[6] 等各种量子计算任务中. 然而, 在量子信息处理过程中, 系统将不可避免地与环境发生相互作用, 从而产生量子消相干现象, 这极大地阻碍了量子信息处理实用化的进程. 因此, 很多学者都致力于研究量子系统的消相干问题. 迄今为止, 惯性系中的纠缠演化特性已经得到了广泛的研究^[7-13]. Yu 和 Eberly^[7,8] 发现, 由于自发辐射的存在, 两量子位纠缠会在有限时间内突然消失, 即发生纠缠猝死现象, 并且, 这一现象已经在实验室中被观察到^[9,10]. Dodd 等^[11] 研究了开放系统中两粒子之间的解纠缠和消相干现象. Jamróz 等^[12] 研究了与真空腔发生相互作用的两个原子的纠缠特性. Lopez 等^[13] 研究了与热库相互作用的两个腔的纠缠特性. 我们知道, 对于任何完整的理论模型来说, 相对论都是一个不可或缺的组成部分, 因此, 对非惯性系下纠缠特性的研究已经得到了越来越

多的关注^[14-23]. Alsing 和 Milburn^[14] 研究了非惯性系下的量子隐形传送, 发现量子纠缠度降低了. Fuentes-Schulle 和 Mann^[15] 证明了两个观察者通过探测两个自由玻色模中的一个就决定了两模之间的纠缠, 并且观察了测量的相关性. 他们发现, 在非惯性系下, 当观察者做相对加速运动时, 初始处于最大纠缠的量子态的纠缠度降低了, 这说明在非惯性框架下纠缠是依赖于观察者的. Alsing 等^[16] 分析了自由狄拉克场两模间的纠缠, 发现纠缠度降低了, 并且, 在无限加速情况下纠缠渐近地达到一个非零最小值. Wang 和 Jing^[17] 研究了振幅阻尼通道下非惯性系的量子消相干, 发现在有限加速下就已经出现了纠缠死亡现象, 加速越大, 纠缠死亡出现得越早. Zhang 等^[18] 研究了振幅阻尼通道下不同初始态的纠缠演化特性, 发现不同初始态的纠缠沿着不同的曲线演化. 最近, Bruschi 等^[19] 分析了在非惯性系中研究纠缠常用的单模近似的有效性, 揭示了正则分析中所用的纠缠态可以看成是一个 Minkowski 模和一个 Unruh 模的纠缠态, 并且, 任何一个 Unruh 单粒子态都包含不同的左右成分. 基于这一结果, Wang 和 Ji^[22] 研究了非惯性系的量子消相干, 结果发现不论是在振幅阻尼通

* 国家自然科学基金 (批准号: 11064016) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: jixin@ybu.edu.cn

道, 还是相位阻尼通道, 随着加速参数的增长较早地出现了纠缠死亡现象, 并且发现随着 q_R 的增大初始纠缠减小. 本文分析非惯性系下处于热库中的两个腔的纠缠动力学, 不仅考虑加速参数对纠缠的影响, 还要考虑 Unruh 单粒子态左右成分之间的不同比率对纠缠的影响.

2 纠缠演化

假设 Alice 和 Rob 各自拥有一个单模腔和热库系统, 并且, 单模腔与多模热库之间的相互作用由如下的哈密顿描述 [13]:

$$\hat{H} = \hbar\omega a^\dagger \hat{a} + \hbar \sum_{k=1}^N w_k \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hbar \sum_{k=1}^N g_k (\hat{a} \hat{b}^\dagger + \hat{b} \hat{a}^\dagger). \quad (1)$$

考虑腔模包含一个单光子, 相应的热库处于真空状态, 即 $|\phi_0\rangle = |1\rangle_c \otimes |0\rangle_r$, 其中, $|0\rangle_r = \prod_{k=1}^N |0_k\rangle_r$. 当 N 趋近于无穷时, 在 (1) 式所示的哈密顿作用下, 态 $|\phi_0\rangle$ 演化为

$$|\phi_t\rangle_{cr} = \xi(t)|1\rangle_c|0\rangle_r + \chi(t)|0\rangle_c|1\rangle_r, \quad (2)$$

其中 $|1\rangle_r = \frac{1}{\chi(t)} \sum_{k=1}^N \lambda_k(t) |1_k\rangle_r$ ($|1_k\rangle$ 表示热库中第 k 个模有一个光子), 振幅 $\chi(t)$ 收敛于 $\chi(t) = [1 - \exp(-\kappa t)]^{1/2}$, 振幅 $\xi(t)$ 收敛于 $\xi(t) = \exp\left(-\frac{\kappa t}{2}\right)$, κ 是振幅衰减系数. 在这里, 腔和热库可以看成是一个有效的两比特系统.

下面, 我们用纠缠度量方法 Negativity (N) 来研究腔系统和热库系统的纠缠演化特性. Negativity 定义为部分转置密度矩阵的负本征值的和. 如果 λ_i 是任意部分转置二量子位密度矩阵 ρ_{AB} 的本征值, 则 Negativity 为

$$N_{AB} = \frac{1}{2} \sum_i (|\lambda_i| - \lambda_i) = - \sum_{\lambda_i < 0} \lambda_i, \quad (3)$$

Negativity 的最大值 (对应最大纠缠) 依赖于纠缠态的维数, 对于二维系统, Negativity 的最大值 $N_{AB}^{\max} = 1/2$. 假设腔和热库初始处于

$$|\Phi_0\rangle = (\alpha|0\rangle_{c_1}|0\rangle_{c_2} + \beta|1\rangle_{c_1}|1\rangle_{c_2})|0\rangle_{r_1}|0\rangle_{r_2} \quad (4)$$

态. 由 (2) 式可知, 整个系统经历时间 t 后将演化为

$$|\Phi_t\rangle = \alpha|0\rangle_{c_1}|0\rangle_{r_1}|0\rangle_{c_2}|0\rangle_{r_2} + \beta|\phi_t\rangle_{c_1 r_1}|\phi_t\rangle_{c_2 r_2}. \quad (5)$$

假设 Alice 在 Minkowski 时空中做匀速直线运动, Rob 在 Rindler 时空中做匀加速双曲线运动 (相应的 Rob 所拥有的腔模和热库模都用 Unruh 模表示 [19]), 如图 1 所示.

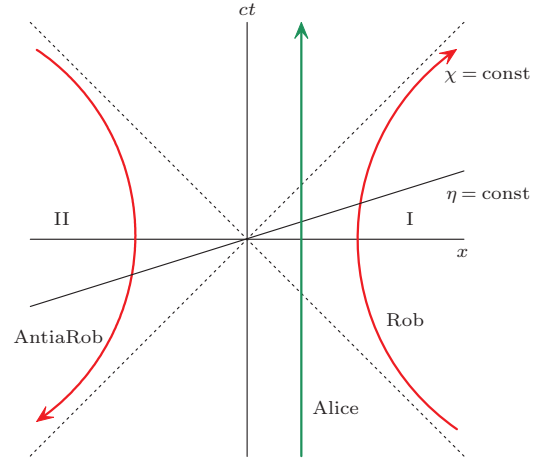


图 1 Rindler 时空图 [17] $\chi = \text{const}$ 对应于双曲线, $\eta = \text{const}$ 对应于通过原点的直线; 匀加速观察者 Rob (AntiRob) 沿着区域 I (区域 II) 的一只双曲线运动

在狄拉克场中, 从 Rob 的角度来看, Unruh 真空态处于两模压缩态 [16,19]:

$$|0\rangle_U = \cos r |0\rangle_I |0\rangle_{II} + \sin r |1\rangle_I |1\rangle_{II}, \quad (6)$$

这里, $\cos r = [\exp(-2\pi\omega c/a) + 1]^{-1/2}$, a 是 Rob 的加速度, ω 是狄拉克粒子的频率, c 是真空中光速, $|n\rangle_I$ 和 $|n\rangle_{II}$ 分别表示区域 I 和 II (如图 1 所示) 的 Rindler 模.

由于 Unruh 单粒子态包含不同的左右成分 [19], 因此, 狄拉克场中惟一的激发态可以表示成:

$$|1\rangle_U = q_L |0\rangle_I |1\rangle_{II} + q_R |1\rangle_I |0\rangle_{II}, \quad (7)$$

这里, q_R 和 q_L 是复数, 满足 $|q_R|^2 + |q_L|^2 = 1$. 为了方便, 我们只考虑 q_R 和 q_L 是实数的情形. 按照 Alice 的 Minkowski 模和 Rob 的 Rindler 模, 由方程 (6) 和 (7) 可知, 系统的态将演化为六量子位系统. 通过约化对应的 II 区域的模, 可以获得 Alice 和 Rob 的密度矩阵, $\rho_{AR}^I = \text{Tr}_{II}(|\Phi_t\rangle\langle\Phi_t|)$. 再约化与热库对应的比特, 则两个腔的约化密度矩阵可写为

$$\begin{aligned} \rho_{c_1 c_2}^I &= (\beta^2 \chi^2 \xi^2 q_L^2 + \beta^2 \chi^4 \cos^2 r \\ &+ \alpha^2 \cos^2 r) |00\rangle\langle 00| + \alpha\beta \xi^2 q_R \cos r |00\rangle\langle 11| \\ &+ (\beta^2 \chi^2 \xi^2 q_R^2 + \beta^2 \chi^4 \sin^2 r \\ &+ \alpha^2 \sin^2 r) |01\rangle\langle 01| + \alpha\beta \xi^2 q_L \sin r |01\rangle\langle 10| \\ &+ \alpha\beta \xi^2 q_L \sin r |10\rangle\langle 01| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \beta^2 \xi^2 (\chi^2 \cos^2 r + \xi^2) |10\rangle \langle 10| \\
 & + \alpha \beta \xi^2 q_R \cos r |11\rangle \langle 00| \\
 & + \beta^2 \xi^2 (\chi^2 \sin^2 r + \xi^2) |11\rangle \langle 11|. \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \beta^2 \chi^2 \xi^2 q_R^2 + \beta^2 \chi^4 \sin^2 r + \sin^2 r \alpha^2 & \alpha \beta \xi^2 q_R \cos r \\ \alpha \beta \xi^2 q_R \cos r & \beta^2 \xi^2 (\chi^2 \cos^2 r + \xi^2) \end{pmatrix} \quad (9)$$

对 Negativity 有贡献, 在此, 使用的基矢是 $|01\rangle = |0\rangle_{c_1} |1\rangle_{c_2}^I$, $|10\rangle = |1\rangle_{c_1} |0\rangle_{c_2}^I$.

另一方面, 通过约化与腔对应的比特, 则热库的约化密度矩阵可以写为

$$\begin{aligned}
 \rho_{r_1 r_2}^I & = (\beta^2 \chi^2 \xi^2 q_L^2 + \beta^2 \xi^4 \cos^2 r + \alpha^2 \cos^2 r) |00\rangle \\
 & \times \langle 00| + \alpha \beta \chi^2 q_R \cos r |00\rangle \langle 11| \\
 & + (\beta^2 \chi^2 \xi^2 q_R^2 + \beta^2 \xi^4 \sin^2 r \\
 & + \alpha^2 \sin^2 r) |01\rangle \langle 01| + \alpha \beta \xi^2 q_L \sin r |01\rangle \langle 10| \\
 & + \alpha \beta \chi^2 q_L \sin r |10\rangle \langle 01| \\
 & + \beta^2 \chi^2 (\xi^2 \cos^2 r + \chi^2) |10\rangle \langle 10| \\
 & + \alpha \beta \chi^2 q_R \cos r |11\rangle \langle 00| \\
 & + \beta^2 \chi^2 (\xi^2 \sin^2 r + \chi^2) |11\rangle \langle 11|. \quad (10)
 \end{aligned}$$

考虑最简单的情况 ($q_R = 1$), 此时, 腔系统和热库系统的 Negativity 分别为

$$\begin{aligned}
 N_{c_1 c_2} & = \frac{1}{4} \{ -\beta^2 \chi^2 (3\xi^2 + \chi^2 \\
 & + (\xi^2 - \chi^2) \cos 2r) - 2\alpha^2 \sin^2 r \\
 & + [-8\beta^2 \xi^2 \cos^2 r (2\alpha^2 (\chi^2 \sin^2 r - \xi^2) \\
 & + 2\beta^2 \chi^4 (\xi^2 + \chi^2 \sin^2 r)) \\
 & + \beta^2 \chi^2 (3\xi^2 + \chi^2 + (\xi^2 - \chi^2) \cos 2r \\
 & + 2\alpha^2 \sin^2 r)^2]^{1/2} \}, \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{r_1 r_2} & = \frac{1}{4} \{ -\beta^2 \xi^2 (3\chi^2 + \xi^2 + (\chi^2 - \xi^2) \cos 2r) \\
 & - 2\alpha^2 \sin^2 r + [-8\beta^2 \chi^2 \cos^2 r \\
 & \times (2\beta^2 \xi^4 (\xi^2 \sin^2 r + 2\alpha^2 (\chi^2 + \xi^2 \sin^2 r)) \\
 & + \beta^2 \xi^2 (3\chi^2 + \xi^2 + (\chi^2 - \xi^2) \cos 2r \\
 & + 2\alpha^2 \sin^2 r)^2]^{1/2} \}. \quad (12)
 \end{aligned}$$

当各参数分别满足 $\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\chi^4 (\xi^2 + \chi^2 \cos^2 r)}{\xi^2 + \chi^2 \sin^2 r}$, 和 $\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\xi^4 (\chi^2 + \xi^2 \cos^2 r)}{\chi^2 + \xi^2 \sin^2 r}$ 时, 腔之间和热库之间纠缠为零, 即 $N_{c_1 c_2} = 0$, $N_{r_1 r_2} = 0$. 图 2 显示了当 $r = 0.2$ 时腔之间和热库之间的 Negativity 演化情况, 发现随着 κt 的增长, 对于所有的 α , 腔之

通过计算可以得到这两个腔的部分转置密度矩阵及其负特征值. 这个部分转置矩阵是块对角的, 并且只有如下的对角阵

间的纠缠都会消失, 而随着 κt 的增加, 热库间纠缠逐渐建立, 这说明腔之间的纠缠渐渐的转移到了热库系统中.

为进一步了解纠缠是如何在系统中分享的, 我们研究了系统中任意两体间的纠缠. 首先考虑约化掉 Rindler II 区后任意两体系统, 即 $c_1 \otimes c_2$, $r_1 \otimes r_2$, $c_1 \otimes r_1$, $c_1 \otimes r_2$ 和 $c_2 \otimes r_2$ 的纠缠特性. 如图 3 所示, 随着 κt 的增加, 腔之间的纠缠逐渐衰减, 而热库间的纠缠逐渐增大. 当 $\kappa t = 0$ 时, 总纠缠为 $N_I = 0.480256$. 此外, 通过约化 I 区, 可以获得 Alice-AntiRob 密度矩阵 ρ_{AR}^I , 通过上述相似的方法我们同样可以研究此时任意两体 ($c_1 \otimes \bar{c}_2$, $r_1 \otimes \bar{r}_2$, $c_1 \otimes \bar{r}_1$, $c_1 \otimes \bar{r}_2$, $c_2 \otimes \bar{r}_2$) 之间的纠缠特性, 如图 4 所示.

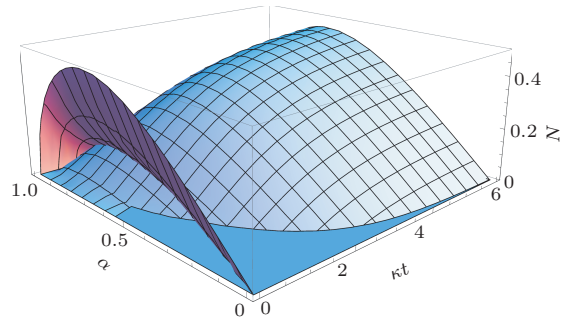


图 2 当 $q_R = 1$, $r = 0.2$ 时, 腔系统 $c_1 \otimes c_2$ 的 Negativity (红色) 和热库系统 $r_1 \otimes r_2$ 的 Negativity (蓝色) 随 κt 和 α 的演化图

从图 4 中可以发现, 任意两体之间的纠缠都很低, 当 $\kappa t = 0$ 时, 总纠缠值为 $N_{II} = 0.019735$, 并且对于所有 κt , $N_I + N_{II} = N_{AB}^{\max} = 1/2$.

下面研究 Unruh 单粒子态左右部分间的不同比率对纠缠的影响. 首先, 考虑 Unruh 单粒子态左右部分间的不同比率对两腔间纠缠的影响, 主要是考虑 $c_1 \otimes c_2$ 和 $c_1 \otimes \bar{c}_2$ 的纠缠随加速参数 r 的演化情况. 图 5 描述了 $\kappa t = 0$, $\alpha = 1/\sqrt{2}$ 时 Unruh 单粒子态左右部分间的不同比率对两腔纠缠的影响. 从图中可以发现, 当 $|q_R| = 1$ 时, $c_1 \otimes c_2$ 间的纠缠会随着加速参数的增加而减小, 而 $c_1 \otimes \bar{c}_2$ 间的纠缠

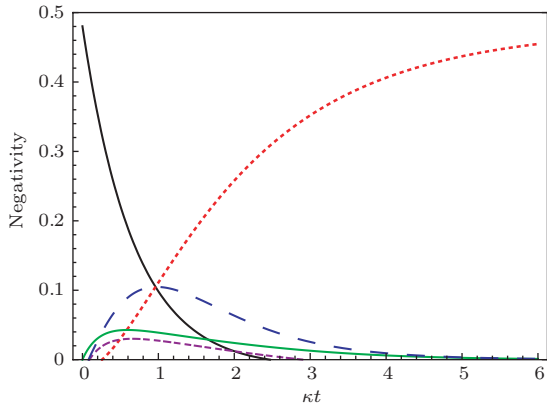


图3 当 $q_R = 1, r = 0.2, \alpha = 1/\sqrt{2}$ 时, 约化掉 II 区后任意两体间的 Negativity 随 κt 的演化 c_1c_2 (黑线), r_1r_2 (虚红线), c_1r_1 (绿线), c_1r_2 (虚蓝线), c_2r_2 (虚紫线)

会随着加速参数的增加而增加, 说明纠缠转移到了反粒子模中. 而随着 q_R 的减小, 纠缠度降低, 当 $|q_R| = 1/\sqrt{2}$ 时, 在无限加速下, 出现纠缠猝死现象, 随着 $|q_R|$ 的继续减小, 在有限加速情况下就出现纠缠猝死现象, 并且, $c_1 \otimes \bar{c}_2$ 间的纠缠会随

着 $|q_R|$ 的减小而逐渐消失. 同时, 我们还研究了当 $\kappa t = 10, \alpha = 1/\sqrt{2}$ 时 Unruh 单粒子态左右部分间的不同比率对两个热库间纠缠的影响, 得到了与两腔纠缠类似的结果.

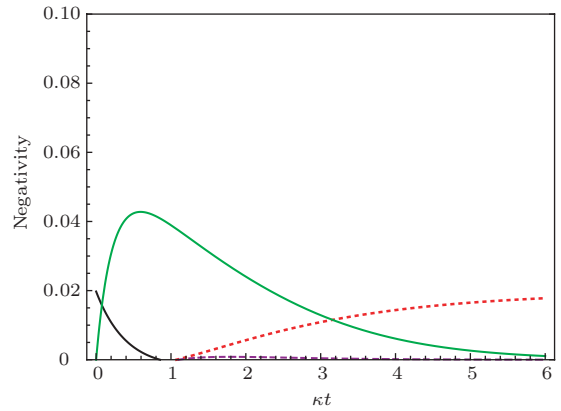


图4 当 $q_R = 1, r = 0.2, \alpha = 1/\sqrt{2}$ 时, 约化掉 I 区后任意两体间的 Negativity 随 κt 的演化 $c_1 \otimes c_2$ (黑线), $r_1 \otimes r_2$ (虚红线), $c_1 \otimes r_1$ (绿线), $c_1 \otimes r_2$ (虚蓝色线), $c_2 \otimes r_2$ (虚紫线)

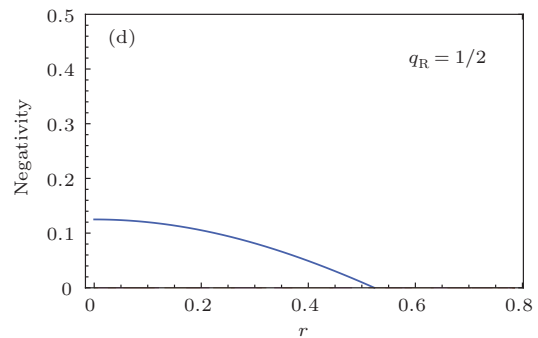
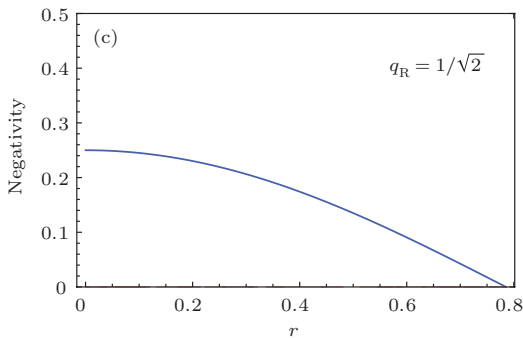
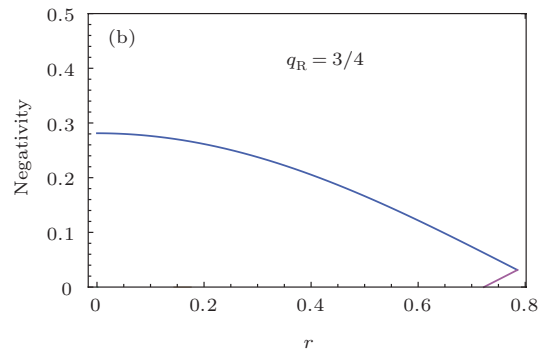
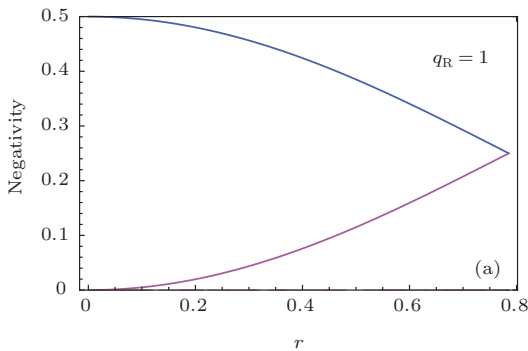


图5 当 $\alpha = 1/\sqrt{2}, \kappa t = 0$ 时, 约化掉 II 区后腔系统 $c_1 \otimes c_2$ 的 Negativity(蓝线)和约化掉 I 区后腔系统 $c_1 \otimes \bar{c}_2$ 的 Negativity(红线)在不同 Unruh 单粒子态左右成分比率下随加速参数 r 的演化 (a) $q_R = 1$; (b) $q_R = 3/4$; (c) $q_R = 1/\sqrt{2}$; (d) $q_R = 1/2$

3 结 论

本文分析了在非惯性系下与热库相互作用的两个腔的纠缠动力学. 发现随着 κt 的增长, 对于任意初始纠缠, 腔之间的纠缠都会消失; 随着 κt 的增

加, 腔之间纠缠逐渐转移到了热库系统中. 本文还研究了 Unruh 单粒子态左右成分间的不同比率对两腔间纠缠的影响, 发现当初始纠缠为最大纠缠, 并且 $|q_R| = 1$ 时, $c_1 \otimes c_2$ 间的纠缠会随着加速参数的增加而减小, 而 $c_1 \otimes \bar{c}_2$ 间的纠缠会随着加速参数

的增加而增加, 说明纠缠转移到了反粒子模中. 而随着 q_R 的减小, 纠缠度降低, 当 $|q_R| = 1/\sqrt{2}$ 时, 在无限加速下, 出现纠缠猝死现象, 随着 $|q_R|$ 的继续减小, 在有限加速情况下就出现纠缠猝死现象, 并且, $c_1 \otimes \bar{c}_2$ 间的纠缠会随着 $|q_R|$ 的减小而逐渐消失. Unruh 单粒子态左右部分间的不同比率对两个热库间纠缠的影响与两腔纠缠情况类似.

参考文献

- [1] Bennett C H, Wiesner S J 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 2881
- [2] Bennett C H, Shor P W, Smolin J A, Thapliyal A V 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 3081
- [3] Bennett C H, Brassard G, Crépeau C, Jozsa R, Peres A, Wootters W K 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1895
- [4] Zhang W J, Guo G C, Song K H 2002 *Chin. Phys. B* **11** 218
- [5] Ekert A K 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 661
- [6] Steane A M 1998 *Rep. Prog. Phys.* **61** 117
- [7] Yu T, Eberly J H 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 140404
- [8] Yu T, Eberly J H 2006 *Opt. Commun.* **264** 393
- [9] Almeida M P, de Melo F, Hor-Meyll M, Salles A, Walborn S P, Souto Ribeiro P H, Davidovich L 2007 *Science* **316** 579
- [10] Laurat J, Choi K, Deng H, Chou C W, Kimble H J 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 180504
- [11] Dodd P J, Halliwell J J 2004 *Phys. Rev. A* **69** 052105
- [12] Jamróz A 2006 *J. Phys. A* **39** 7727
- [13] López C E, Romero G, Lastra F, Solano E, Retamal J C 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 080503
- [14] Alsing P M, Milburn G J 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 180404
- [15] Fuentes-Schulier I, Mann R B 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 120404
- [16] Alsing P M, Fuentes-Schulier I, Mann R B, Tessier T E 2006 *Phys. Rev. A* **74** 032326
- [17] Wang J, Jing J 2010 *Phys. Rev. A* **82** 032324
- [18] Zhang W P, Deng J F, Jing J L 2010 arXiv:1011.5700v2
- [19] Brusche D E, Louko J, Martín-Martínez E, Dragan A, Fuentes I 2010 *Phys. Rev. A* **82** 042332
- [20] Martín-Martínez E, Fuentes I 2011 *Phys. Rev. A* **83** 052306
- [21] Montero M, Martín-Martínez E 2011 *Phys. Rev. A* **83** 062323
- [22] Wang Y, Ji X 2012 *J. Mod. Opt.* **59** 571
- [23] Chang J, Kwon Y 2012 *Phys. Rev. A* **85** 032302

Entanglement dynamics of two cavities interacting with reservoir in noninertial frame*

Liang Yan Wu Qi-Cheng Ji Xin[†]

(Department of Physics, College of Science, Yianbian University, Yanji 133002, China)

(Received 16 July 2013; revised manuscript received 8 October 2013)

Abstract

We investigate the entanglement dynamics of two cavities interacting respectively with reservoir in non-inertial frames. We consider not only the influence of acceleration, but also the influence of different rates between right and left components of the Unruh single-particle state on entanglement. The result shows that the reservoir-entanglement will increase with the decrease of the cavity-entanglement when the acceleration parameter is fixed. In addition, there appears the redistribution of entanglement between particle mode and antiparticle mode, when the initial state is in a maximal by entangled state with $|q_R| = 1$. We also find that the sudden death of entanglement happens in infinite acceleration limit when $|q_R| = |q_L| = 1/\sqrt{2}$, whereas the death of entanglement happens at finite acceleration when $q_R < 1/\sqrt{2}$.

Keywords: the sudden death of entanglement, noninertial frame, Unruh effect

PACS: 03.65.Ud, 03.67.Mn, 04.70.Dy

DOI: [10.7498/aps.63.020301](https://doi.org/10.7498/aps.63.020301)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11064016).

[†] Corresponding author. E-mail: jixin@ybu.edu.cn