

多频率控制开关变换器的自相似和混频现象分析*

吴松荣^{1)†} 周国华¹⁾ 王金平²⁾ 许建平¹⁾ 何圣仲¹⁾

1) (磁浮技术与磁浮列车教育部重点实验室, 西南交通大学电气工程学院, 成都 610031)

2) (合肥工业大学电气与自动化工程学院, 合肥 230009)

(2013年9月30日收到; 2013年10月16日收到修改稿)

在多频率控制开关变换器的工作原理及状态方程的基础上, 建立了多频率控制断续导电模式开关变换器的离散迭代映射模型, 并推导了相应的特征值方程和 Lyapunov 指数. 根据离散迭代映射模型, 对多频率控制开关变换器进行了分岔分析. 结果表明: 在电路参数变化时, 变换器存在边界碰撞分岔行为和多周期行为; 当误差界限电压较大时, 变换器表现出自相似现象, 而当误差界限电压较小时, 变换器则表现出混频现象. 采用 Lyapunov 指数研究了变换器的稳定性, 验证了分岔分析的正确性. 经过电路仿真, 进一步分析了负载变化时变换器的时域波形和相轨图, 并验证了离散迭代映射模型的有效性和理论分析的正确性. 最后通过实验结果验证了文中的仿真结果.

关键词: 多频率控制, 开关变换器, 自相似, 混频

PACS: 84.30.Jc, 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.63.028401

1 引言

开关变换器是一种典型的强非线性动力学系统, 存在丰富的动力学行为和非线性现象. 开关变换器的控制方式, 比如电压型控制、电流型控制等, 是影响开关变换器性能、运行机制和内在特性的关键因素. 近年来, 已有不少文献对电压型控制和电流型控制开关变换器的动力学行为进行了深入的分析, 揭示了开关变换器存在的边界碰撞分岔、倍周期分岔等典型的分岔行为^[1-5]. 边界碰撞分岔是开关变换器最独特的一种动力学行为之一, 除此之外, 文献^[6, 7]在电压型控制和电流型控制的基础上加入耦合干扰信号, 观察到了开关变换器的间歇现象和呼吸现象; 文献^[8-10]将峰值电流型控制和谷值电流型控制进行对比研究, 揭示并证明了电流型控制开关变换器以及斜坡补偿下电流型控制开关变换器存在的对称动力学行为, 为这类变换器的设计提供了有益的理论和实践指导; 文献

^[11, 12]分别采用恒定导通时间控制、固定关断时间控制, 发现了开关变换器存在多开关周期振荡、脉冲簇发等现象, 并指出这些现象是由输出电容的等效串联电阻太小造成的; 文献^[13, 14]采用单周期控制揭示了开关变换器存在的降频现象和低频波动现象, 并指出每个开关周期内复位器积分的输出无法到达参考电压是引起降频现象的根本原因.

脉冲序列控制和双频率控制是两种特殊的开关变换器非线性控制方法. 脉冲序列控制通过调整两组预先设置的具有相同开关频率、不同占空比的控制脉冲的组合方式来实现开关变换器输出电压的调节^[15,16]; 而双频率控制则通过调整两组预先设置的具有相同导通时间、不同开关频率的控制脉冲的组合方式来实现变换器输出电压的调节^[15,17]. 采用脉冲序列控制, 文献^[18]发现了开关变换器存在的低频波动现象, 文献^[19]分析了开关变换器存在的边界碰撞分岔行为; 采用双频率控制, 文献^[20]揭示了开关变换器存在的多周期行为以及周期3并

* 国家自然科学基金 (批准号: 51177140, 61371033)、四川省青年科技基金 (批准号: 2013JQ0033) 和中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: 2682013ZT20, SWJTU11CX032) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: srwu88@163.com

并不意味着系统必然会发生混沌行为.

多频率控制是在双频率控制的基础上发展起来的新颖控制方法, 具有比双频率控制更快的瞬态响应速度和输出电压调节精度^[21]. 然而, 多频率控制开关变换器的动力学研究未见文献报道. 本文以Buck变换器为例, 对多频率控制开关变换器进行了深入研究, 建立其离散迭代映射模型和特征值方程, 并在此基础上开展了相应的分岔分析、Lyapunov指数分析、电路仿真和实验研究, 揭示了多频率控制开关变换器存在的自相似现象和混频现象.

2 离散迭代映射模型

图1为多频率控制Buck变换器的控制框图和工作原理示意图, 其中功率开关管 S 、整流二极管 D 、电感 L 和电容 C 假设都是理想的; v_{in} , v_o , R 分别表示输入电压、输出电压、负载电阻. 由图1可知: 在每一个开关周期开始时刻, 采样/保持电路采样输出电压, 当输出电压采样值处于电压区间 A_4 (0 , $V_{ref} - V_e$), A_3 ($V_{ref} - V_e$, V_{ref}), A_2 (V_{ref} , $V_{ref} + V_e$), A_1 ($V_{ref} + V_e$, $+\infty$) 时 (其中 V_e 为输出电压的误差界限电压, $V_e > 0$), 控制器分别采用开关周期为 T_4 , T_3 , T_2 , T_1 的脉冲工作 ($T_4 < T_3 < T_2 < T_1$, 每个开关周期的导通时间均为 t_{ON}), 以对输出电压进

行相应调节. 控制器选用开关周期为 T_4 , T_3 , T_2 , T_1 的脉冲工作时, 变换器传递的输入功率依次递减. 与仅采用 T_4 和 T_1 脉冲的双频率控制相比, 多频率控制引入了 T_3 和 T_2 脉冲, 可以减缓输出电压逼近参考电压的速度, 提升输出电压的逼近精度.

当Buck变换器工作于断续导电模式 (discontinuous conduction mode, DCM) 时, 电路存在三个工作状态, 采用电感电流 i_L 和电容电压 v_c 作为状态变量, 可得相应的三个状态方程. 当开关管 S 导通、二极管 D 关断时, 变换器的状态方程为

$$\begin{cases} \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}v_{in} - \frac{1}{L}v_c \\ \frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C}i_L - \frac{1}{RC}v_c \end{cases}. \quad (1)$$

对于图1所示的多频率控制Buck变换器, 若记 i_n , v_n 分别为电感电流 i_L , 电容电压 v_c 在第 nT_X 时刻的采样值, 其中 T_X ($X = 1, 2, 3, 4$) 为控制器根据采样的输出电压所处的电压区间选择的开关周期, 则其离散迭代映射模型可以表示为 $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$, 其中 $\mathbf{x}_n = [i_n \ v_n]^T$, $\mathbf{x}_{n+1} = [i_{n+1} \ v_{n+1}]^T$, T 表示矩阵转置.

以 i_L , v_c 在第 nT_X 时刻的采样值为初始值, 根据(1)式, 可得变换器在开关管 S 导通结束即 $t = nT_X + t_{ON}$ 时刻的电感电流和电容电压, 分别为

$$\begin{cases} i_L(nT_X + t_{ON}) = e^{-\alpha t_{ON}} [c_{11} \cos(\omega t_{ON}) + c_{12} \sin(\omega t_{ON})] + v_{in}/R \\ v_c(nT_X + t_{ON}) = e^{-\alpha t_{ON}} [c_{21} \cos(\omega t_{ON}) + c_{22} \sin(\omega t_{ON})] + v_{in} \end{cases}, \quad (2)$$

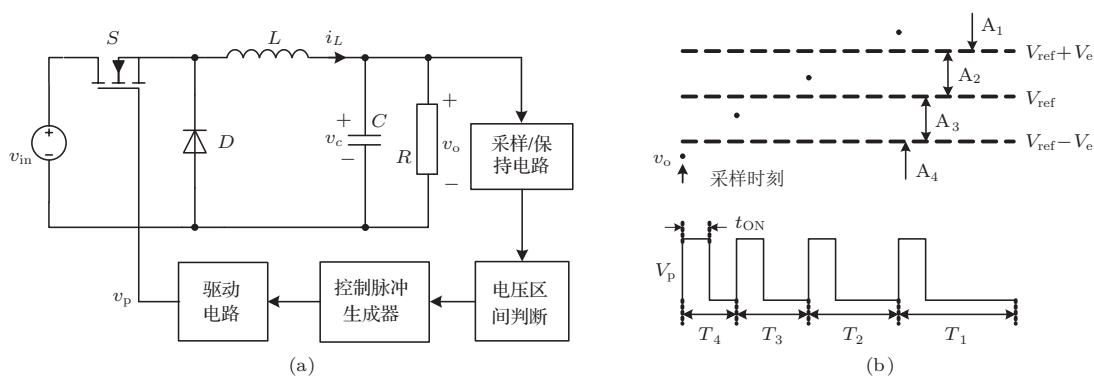


图1 多频率控制Buck变换器 (a) 控制框图; (b) 工作原理示意图

其中: $R > \sqrt{L/4C}$, $\alpha = 1/(2RC)$, $\omega = \sqrt{1/(LC) - \alpha^2}$,

$$c_{11} = i_n - \frac{v_{in}}{R}, \quad c_{21} = v_n - v_{in},$$

$$\begin{aligned} c_{12} &= \frac{\alpha}{\omega} c_{11} - \frac{c_{21}}{\omega L}, \\ c_{22} &= \frac{c_{11}}{\omega C} - \frac{\alpha}{\omega} c_{21}. \end{aligned}$$

经过时间间隔 t_{ON} 后, 开关管 S 关断、二极管

D 导通, 此时变换器的状态方程为

$$\begin{cases} \frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{L}v_c \\ \frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C}i_L - \frac{1}{RC}v_c \end{cases} \quad (3)$$

设第 n 个开关周期内二极管 D 的导通时间为 t_{Fn} , 以 (2) 式为 (3) 式的初值, 可得变换器在二极管 D 导通结束即 $t = nT_X + t_{ON} + t_{Fn}$ 时刻的电感电流和电容电压, 分别为

$$\begin{cases} i_L(nT_X + t_{ON} + t_{Fn}) \\ = e^{-\alpha t_{Fn}} [c_{31} \cos(\omega t_{Fn}) + c_{32} \sin(\omega t_{Fn})] \\ v_c(nT_X + t_{ON} + t_{Fn}) \\ = e^{-\alpha t_{Fn}} [c_{41} \cos(\omega t_{Fn}) + c_{42} \sin(\omega t_{Fn})] \end{cases}, \quad (4)$$

其中:

$$\begin{aligned} c_{31} &= i_L(nT_X + t_{ON}), \quad c_{41} = v_c(nT_X + t_{ON}), \\ c_{32} &= \frac{\alpha}{\omega} c_{31} - \frac{c_{41}}{\omega L}, \quad c_{42} = \frac{c_{31}}{\omega C} - \frac{\alpha}{\omega} c_{41}. \end{aligned}$$

令 $i_L(nT_X + t_{ON} + t_{Fn})$ 式为零, 可以求出 t_{Fn} , 但此时的方程为三角函数方程, 很难得到 t_{Fn} 的解析解. 如果变量 x 足够小, 文献 [9] 指出采用近似关系 $\cos(x) = 1$ 和 $\sin(x) = x$ 是合理的, 且减少了计算时间. 于是, t_{Fn} 有如下近似解

$$t_{Fn} = \frac{-c_{31}}{\omega c_{32}}. \quad (5)$$

经过时间间隔 $t_{ON} + t_{Fn}$ 后, 开关管 S 关断、二极管 D 关断; i_L 保持为零, 电容给负载供能. 此时变换器的状态方程为

$$\begin{cases} \frac{di_L}{dt} = 0 \\ \frac{dv_c}{dt} = -\frac{1}{RC}v_c \end{cases} \quad (6)$$

以 (4) 式为 (6) 式的初值, 可得变换器在第 n 个开关周期结束即 $t = (n+1)T_X$ 时刻的电感电流和电容电压, 分别为

$$\begin{cases} i_L((n+1)T_X) = i_{n+1} = 0 \\ v_c((n+1)T_X) = v_{n+1} \\ = v_c(nT_X + t_{ON} + t_{Fn}) e^{-2\alpha(T_X - t_{ON} - t_{Fn})} \end{cases} \quad (7)$$

当 Buck 变换器工作于 DCM 模式时, $i_{n+1} = 0$, 二维离散迭代映射模型降阶成一维; 于是, 离散迭代映射模型可以表示为 $v_{n+1} = f(v_n)$, 即

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= f(v_n) \\ &= v_c(nT_X + t_{ON} + t_{Fn}) \end{aligned}$$

$$\times e^{-2\alpha(T_X - t_{ON} - t_{Fn})}, \quad (8)$$

其中 T_X 由下式决定

$$T_X = \begin{cases} T_4, & v_n \leq V_{\text{ref}} - V_e \\ T_3, & V_{\text{ref}} - V_e < v_n \leq V_{\text{ref}} \\ T_2, & V_{\text{ref}} < v_n \leq V_{\text{ref}} + V_e \\ T_1, & v_n > V_{\text{ref}} + V_e \end{cases} \quad (9)$$

(8), (9) 式与 (2), (4), (5) 式紧密关联, 它们构成了多频率控制 DCM Buck 变换器的离散迭代映射模型, 通过该模型, 可以分析多频率控制 DCM Buck 变换器的动力学行为.

3 分岔分析

根据第 2 节建立的离散迭代映射模型, 采用数值仿真对多频率控制 DCM Buck 变换器的分岔行为进行分析. 固定电路参数: 恒定导通时间 $t_{ON} = 6 \mu\text{s}$, $v_{in} = 14 \text{ V}$, $V_{\text{ref}} = 6 \text{ V}$, $V_e = 80 \text{ mV}$, $C = 470 \mu\text{F}$, $L = 5.6 \mu\text{H}$, $T_4 = 18 \mu\text{s}$, $T_3 = 36 \mu\text{s}$, $T_2 = 54 \mu\text{s}$, $T_1 = 72 \mu\text{s}$. 选择负载 R 为分岔参数, 变化范围为 $1.5 \sim 7.6 \Omega$, 得到如图 2 所示的输出电压分岔图. 图 2(a) 给出了全局分岔图, 图 2(b)—(d) 给出了清晰的局部分岔图.

从图 2 可以看出: 随着负载 R 的逐渐增大, 变换器经历了周期 1($1T_4$) 态、多周期态、周期 1($1T_3$) 态、多周期态、周期 1($1T_2$) 态、多周期态、周期 1($1T_1$) 态的分岔路由.

第一段局部分岔图如图 2(b) 所示, 输出电压 $v_n \in (0, V_{\text{ref}})$, 变换器的循环周期由 T_4 和 T_3 脉冲的组合表示. 当 $R = 1.745 \Omega$ 时, 变换器与边界 $v_n = V_{\text{ref}} - V_e$ 发生了第一次边界碰撞分岔, 从周期 1 态 ($1T_4$) 进入了多周期态. 随着负载进一步增大, 变换器的多周期轨道不断与边界 $v_n = V_{\text{ref}} - V_e$ 发生碰撞. 当 $R \in [2.3 \Omega, 2.33 \Omega]$ 时, 变换器工作于周期 3 态 ($2T_4-1T_3$); 当 $R \in [2.605 \Omega, 2.655 \Omega]$ 时, 变换器工作于周期 2 态 ($1T_4-1T_3$); 当 $R \in [2.93 \Omega, 2.96 \Omega]$ 时, 变换器工作于周期 3 态 ($1T_4-2T_3$). 当 $R = 3.515 \Omega$ 时, 变换器与边界 $v_n = V_{\text{ref}} - V_e$ 发生最后一次边界碰撞分岔, 从多周期态进入了周期 1 态 ($1T_3$). 对比本文的图 2(b) 和文献 [21] 的图 2(a) 可知, 两者的分岔行为是一致的, 不同之处仅在于输出电压边界和两个脉冲的周期不同.

第二段局部分岔如图2(c)所示, 输出电压 $v_n \in (V_{\text{ref}} - V_e, V_{\text{ref}} + V_e)$, 变换器的循环周期由 T_3 和 T_2 脉冲的组合表示. 当 $R = 3.65 \Omega$ 时, 变换器与边界 $v_n = V_{\text{ref}}$ 发生了第一次边界碰撞分岔,

从周期1态 ($1T_3$) 进入了多周期态; 当 $R = 5.485 \Omega$ 时, 变换器与边界 $v_n = V_{\text{ref}}$ 发生最后一次边界碰撞分岔, 从多周期态进入了周期1态 ($1T_2$). 图2(c)与(b)的分岔图具有相似性.

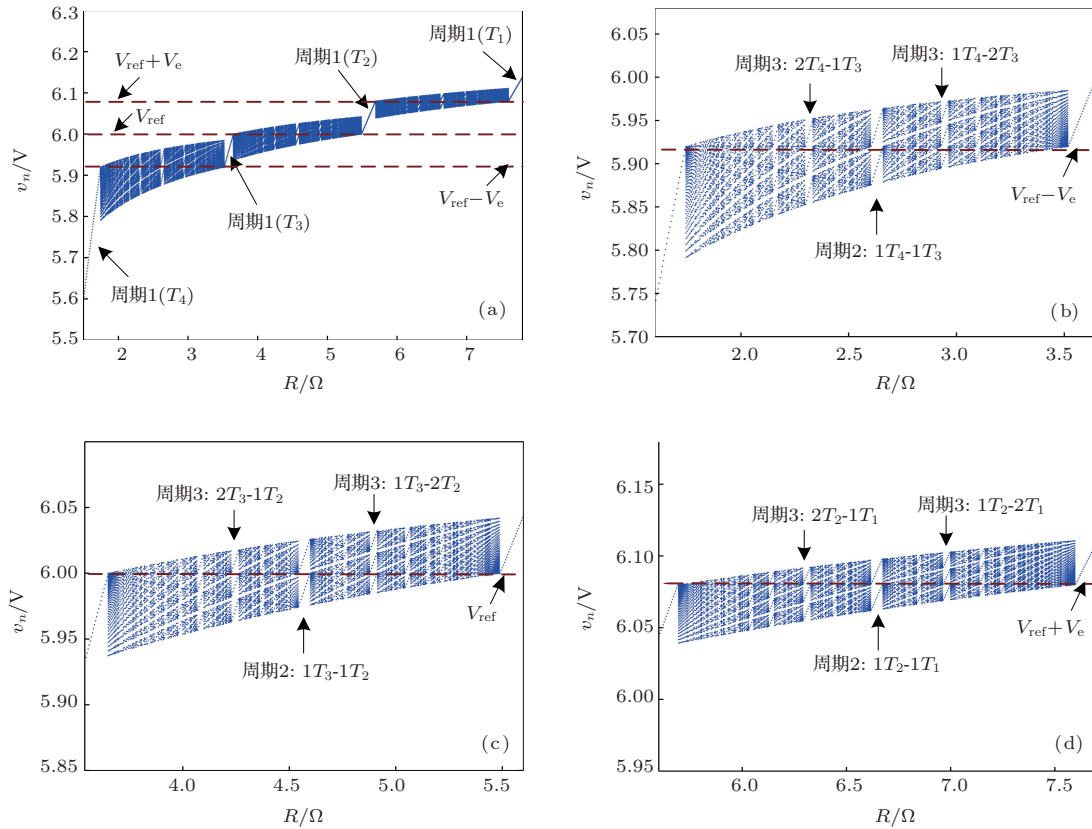


图2 以 R 为参数的分岔图 (a) 全局分岔图 $R = 1.5 \sim 7.8 \Omega$; (b) 局部分岔图 $R = 1.6 \sim 3.64 \Omega$; (c) 局部分岔图 $R = 3.54 \sim 5.6 \Omega$; (d) 局部分岔图 $R = 5.6 \sim 7.7 \Omega$

第三段局部分岔图如图2(d)所示, 输出电压 $v_n \in (V_{\text{ref}}, +\infty)$, 变换器的循环周期由 T_2 和 T_1 脉冲的组合表示. 当 $R = 5.695 \Omega$ 时, 变换器与边界 $v_n = V_{\text{ref}} + V_e$ 发生了第一次边界碰撞分岔, 从周期1态 ($1T_2$) 进入了多周期态; 当 $R = 7.595 \Omega$ 时, 变换器与边界 $v_n = V_{\text{ref}} + V_e$ 发生最后一次边界碰撞分岔, 从多周期态进入了周期1态 ($1T_1$). 图2(d)与(c), (b)的分岔图都具有相似性.

从整个负载范围来看, 图2所示的多频率控制 DCM Buck 变换器的分岔图具有自相似现象; 分岔图中存在三条边界线, 变换器具有三段相似的局部分岔图. 根据图2, 可以得到电阻变化时脉冲的组合方式以及相应的变换器工作状态. 此处只列出几种典型的工作状态, 如表1所示.

由以上的分析可知, 三段分岔图的相似性是由三条输出电压边界线决定的. 当误差界限电压 V_e 较大, 即三条边界线之间的距离较大时, 四级频率控制 DCM Buck 变换器的分岔图可以分离成三个

表1 多频率控制下 R 变化时脉冲的组合方式及变换器工作状态

$R(\Omega)$	组合方式	工作状态
[1.500, 1.740]	$1T_4$	周期1
[2.300, 2.330]	$2T_4-1T_3$	周期3
[2.605, 2.655]	$1T_4-1T_3$	周期2
[2.930, 2.960]	$1T_4-2T_3$	周期3
[3.520, 3.645]	$1T_3$	周期1
[4.230, 4.260]	$2T_3-1T_2$	周期3
[4.545, 4.595]	$1T_3-1T_2$	周期2
[4.880, 4.910]	$1T_3-2T_2$	周期3
[5.490, 5.690]	$1T_2$	周期1
[6.295, 6.325]	$2T_2-1T_1$	周期3
[6.620, 6.670]	$1T_2-1T_1$	周期2
[6.965, 6.995]	$1T_2-2T_1$	周期3
[7.600, 7.800]	$1T_1$	周期1

独立的双频率控制DCM Buck变换器的分岔图. 在这种情况下, 双频率控制是多频率控制的特例. 当 V_e 较小, 即三条边界线之间的距离较小时, 电压型多频率控制的DCM开关变换器将出现混频现象.

减小 V_e , 且保持其他参数与图2一致, 图3给出了 $V_e = 50$ mV时以 R 为参数的分岔图, 其中图3(a)是整个负载范围内的分岔图, 图3(b)是局部放大的分岔图. 从图3(b)可以清晰地看出: 变换器在周期1态($1T_3$)的左右区间, 即 $R \in [2.92 \Omega, 3.565 \Omega]$ 和 $R \in [3.65 \Omega, 3.91 \Omega]$ 范围内出现了三种频率的混频现象, 变换器的循环周期由 T_4, T_3, T_2 脉冲的组合表示, 这与双频率控

制情况下的输出电压分岔图截然不同^[20]. 多频率控制的混频现象使变换器循环周期的组合方式变得复杂.

进一步减小 V_e , 且保持其他参数与图2一致, 图4给出了 $V_e = 30$ mV时以 R 为参数的分岔图. 从图4可以看出: 变换器在 $R \in [3.6 \Omega, 3.64 \Omega]$ 出现了一种新的周期2态($1T_4-1T_2$), 这与图2中的三种周期2态均不相同, 且在 $R \in [3.425 \Omega, 3.59 \Omega]$ 和 $R \in [3.65 \Omega, 4.41 \Omega]$ 范围内出现了四种频率的混频现象, 变换器的循环周期由 T_4, T_3, T_2, T_1 脉冲的组合表示, 此时循环周期的脉冲组合方式更为复杂.

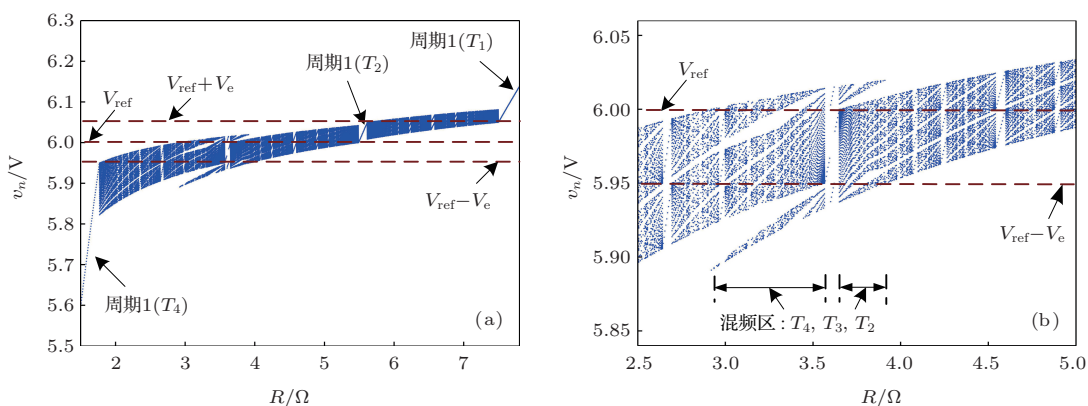


图3 $V_e = 50$ mV 时以 R 为参数的分岔图 (a) $R = 1.5 \sim 7.8 \Omega$; (b) $R = 2.5 \sim 5 \Omega$

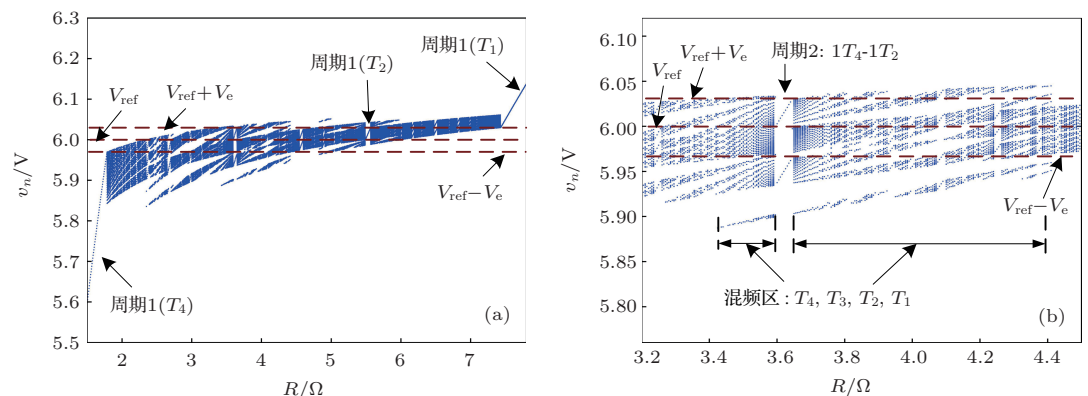


图4 $V_e = 30$ mV 时以 R 为参数的分岔图 (a) $R = 1.5 \sim 7.8 \Omega$; (b) $R = 3.2 \sim 4.5 \Omega$

由此可见, 误差界限电压 V_e 是影响多频率控制DCM开关变换器性能的重要因素之一; 合理地选择参数 V_e , 是正确设计多频率控制的关键.

图5给出了以 v_{in} 为参数的分岔图, 此时负载 $R = 4.5 \Omega$. 当 V_e 较大时, 从图5(a)可以看出: 在整个输入电压 v_{in} 的变化范围内, 输出电压的分岔图具有自相似现象; 分岔图中存在三条边界线, 变换器具有三段相似的分岔子图. 当 V_e 较小时, 从

图5(b)可以看出: 在输入电压的多个范围内, 分岔图出现了混频现象. 在 $v_{in} \in [11.93 \text{ V}, 12.91 \text{ V}]$ 和 $v_{in} \in [12.99 \text{ V}, 13.40 \text{ V}]$ 范围内, 分岔图出现了 T_4, T_3, T_2 脉冲的混频现象; 在 $v_{in} \in [13.41 \text{ V}, 13.88 \text{ V}]$ 和 $v_{in} \in [14.27 \text{ V}, 14.69 \text{ V}]$ 范围内, 分岔图出现了 T_4, T_3, T_2, T_1 脉冲的混频现象; 在 $v_{in} \in [14.70 \text{ V}, 15.08 \text{ V}]$ 和 $v_{in} \in [15.17 \text{ V}, 15.93 \text{ V}]$ 范围内, 分岔图出现了 T_3, T_2, T_1 脉冲的混频现象.

4 Lyapunov 指数

根据(2), (4), (5)和(8)式, 可得多频率控制 DCM Buck 变换器在第 n 个开关周期的特征值 λ_n 方程

$$\lambda_n = \frac{dv_{n+1}}{dv_n} = e^{-2\alpha(T_X - t_{ON} - t_{Fn})} \times [\rho_2 + 2\alpha\rho_1 v_c(nT_X + t_{ON} + t_{Fn})], \quad (10)$$

其中 T_X 由(9)式决定, $v_c(nT_X + t_{ON} + t_{Fn})$ 由(4)式决定, t_{Fn} 由(5)式决定, 且

$$\begin{aligned} \rho_1 &= -L(c_{31}\sigma_1 - c_{41}\sigma_2)/(\alpha Lc_{31} - c_{41})^2, \\ \rho_2 &= e^{-\alpha t_{Fn}}[(\sigma_1 + c_{42}\omega\rho_1 - c_{41}\alpha\rho_1)\cos(\omega t_{Fn}) \\ &\quad + (\sigma_3 - c_{41}\omega\rho_1 - c_{42}\alpha\rho_1)\sin(\omega t_{Fn})], \\ \sigma_1 &= e^{-\alpha t_{ON}}\left[\cos(\omega t_{ON}) - \frac{\alpha}{\omega}\sin(\omega t_{ON})\right], \\ \sigma_2 &= -\frac{1}{\omega L}e^{-\alpha t_{ON}}\sin(\omega t_{ON}), \\ \sigma_3 &= \frac{1}{\omega C}\sigma_2 - \frac{\alpha}{\omega}\sigma. \end{aligned}$$

根据(10)式, 可进一步得到变换器的 Lyapunov

指数 λ_L 为^[20]

$$\lambda_L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{\infty} \ln |\lambda_n|. \quad (11)$$

选择与图2(a)和图5(a)相同的电路参数, 可以得到如图6所示的以 R 和 v_{in} 为参数的 Lyapunov 指数. 由图6可知, 随着 R 和 v_{in} 的不断增大, Lyapunov 指数发生了多次跳变, 该跳变与分岔图中的边界碰撞分岔相对应; 在整个负载和输入电压变化范围内, Lyapunov 指数均小于零, 表明变换器一直处于稳定的周期态. 图6(a)和(b)的 Lyapunov 指数均表现出自相似现象, 且分别验证了图2(a)和图5(a)所示分岔图的正确性.

5 自相似和混频现象分析

为了进一步观察和分析变换器出现的自相似和混频现象, 选取与图2—4相同的电路参数, 对多频率控制 DCM Buck 变换器进行 PSIM (power simulation) 电路仿真.

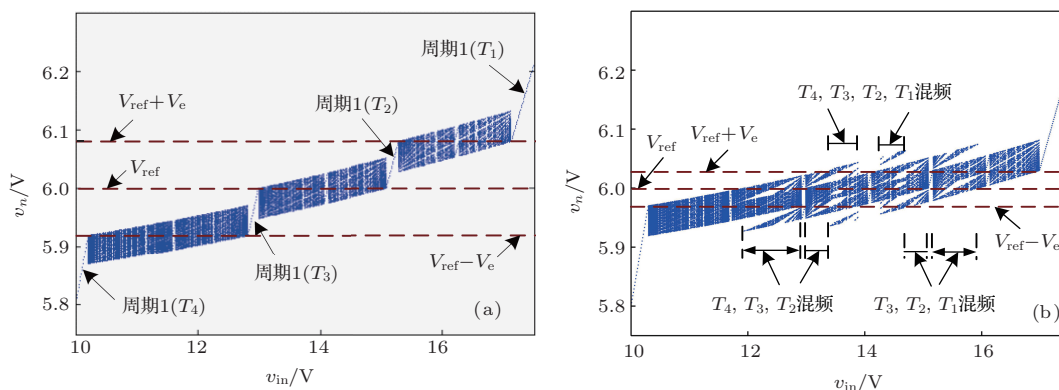


图5 以 v_{in} 为参数的分岔图 $v_{in} = 10\text{--}17.5\text{ V}$: (a) $V_e = 80\text{ mV}$; (b) $V_e = 30\text{ mV}$

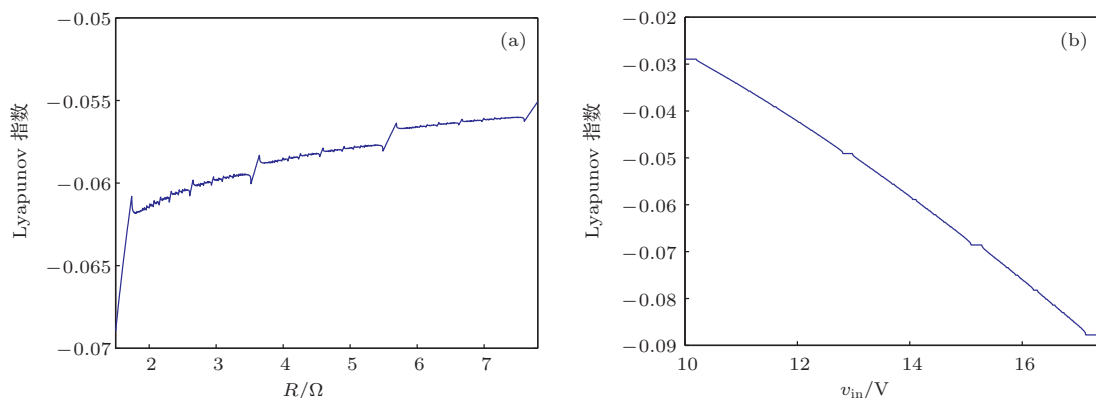
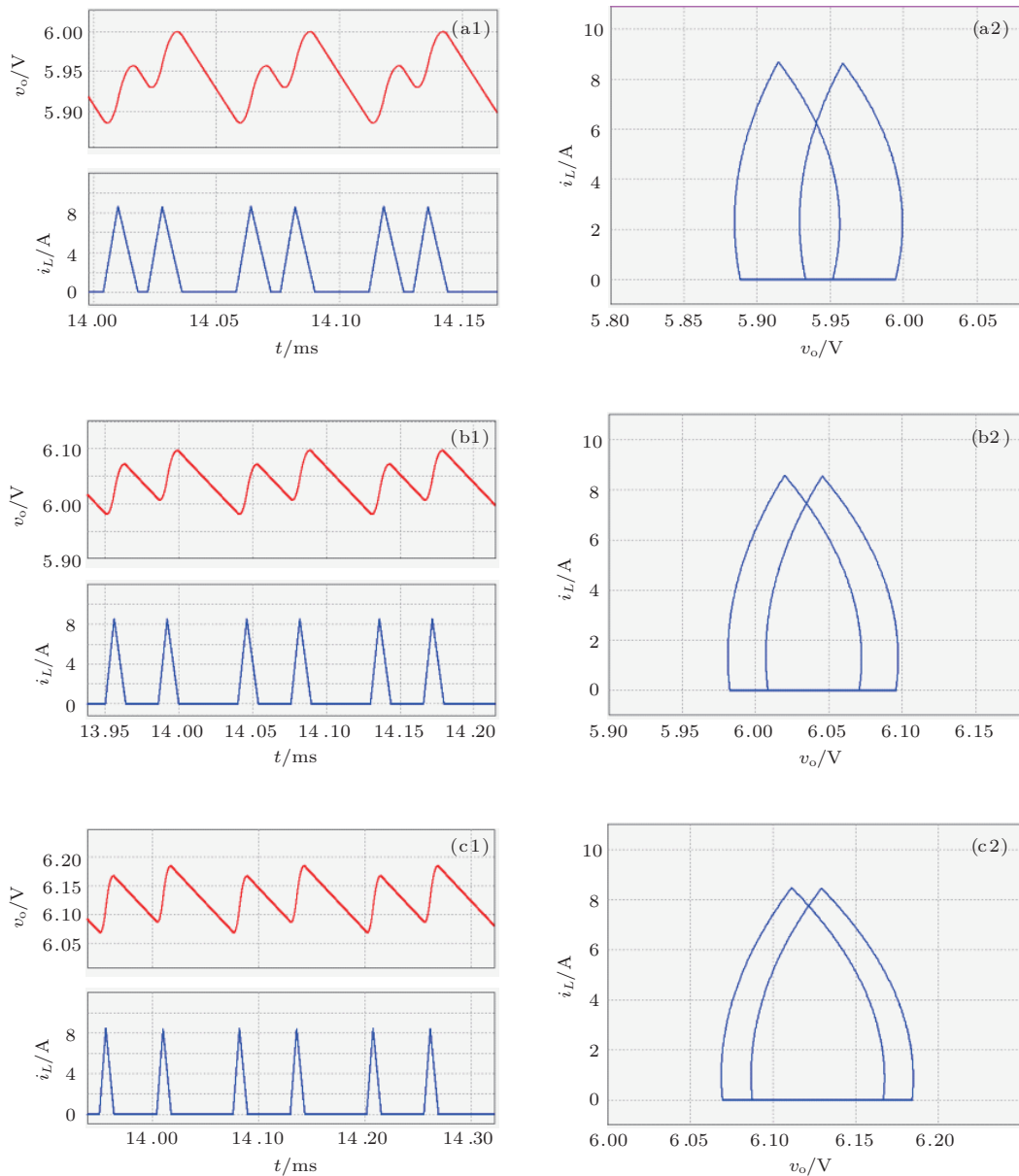


图6 以 R 和 v_{in} 为参数的 Lyapunov 指数 (a) $R = 1.5\text{--}7.8\ \Omega$; (b) $v_{in} = 10\text{--}17.5\text{ V}$

当 $V_e = 80 \text{ mV}$ 时, 图 7(a)—(f) 分别给出了 $R = 2.62, 4.56, 6.64, 2.95, 4.90, 6.98 \Omega$ 时的 i_L, v_o 仿真波形以及 v_o-i_L 相轨图. 从图 7(a)—(c) 可以看出: 变换器均工作于 DCM 模式的周期 2 态, 相轨图均为两个环, 循环周期分别为 $T_M = 1T_4 + 1T_3$, $T_M = 1T_3 + 1T_2$, $T_M = 1T_2 + 1T_1$. 从图 7(d)—(f) 可以看出: 变换器均工作于 DCM 模式的周期 3 态, 相轨图均为 3 个环, 循环周期分别为 $T_M = 1T_4 + 2T_3$, $T_M = 1T_3 + 2T_2$, $T_M = 1T_2 + 2T_1$. 通过对比可知, 图 7(a)—(c) 的仿真结果是相似的, 它们具有相似的工作状态和脉冲组合. 类似地, 图 7(d)—(f) 也具有相似的工作状态和脉冲组合.

图 8(a) 和 (b) 分别给出了 $V_e = 50 \text{ mV}$, $R =$

3.45Ω 和 $V_e = 30 \text{ mV}$, $R = 4.2 \Omega$ 时的 i_L, v_o 仿真波形以及 v_o-i_L 相轨图. 从图 8(a) 可以看出: 变换器发生了三种频率的混频现象, 工作于周期 12 态, 相轨图为 12 个环, 循环周期为 T_4, T_3, T_2 脉冲的组合, 组合方式为 $1T_4-1T_2-1T_4-9T_3$, 循环周期的大小为 $T_M = 2T_4 + 9T_3 + 1T_2$. 从图 8(b) 可以看出: 变换器发生了四种频率的混频现象, 工作于周期 13 态, 相轨图为 13 个环, 循环周期为 T_4, T_3, T_2, T_1 脉冲的组合, 组合方式为 $1T_4-1T_2-3(2T_3-1T_2)-1T_4-1T_1$, 循环周期的大小为 $T_M = 2T_4 + 6T_3 + 4T_2 + 1T_1$. 图 7 和图 8 的电路仿真结果与图 2—4 的分岔图相一致.



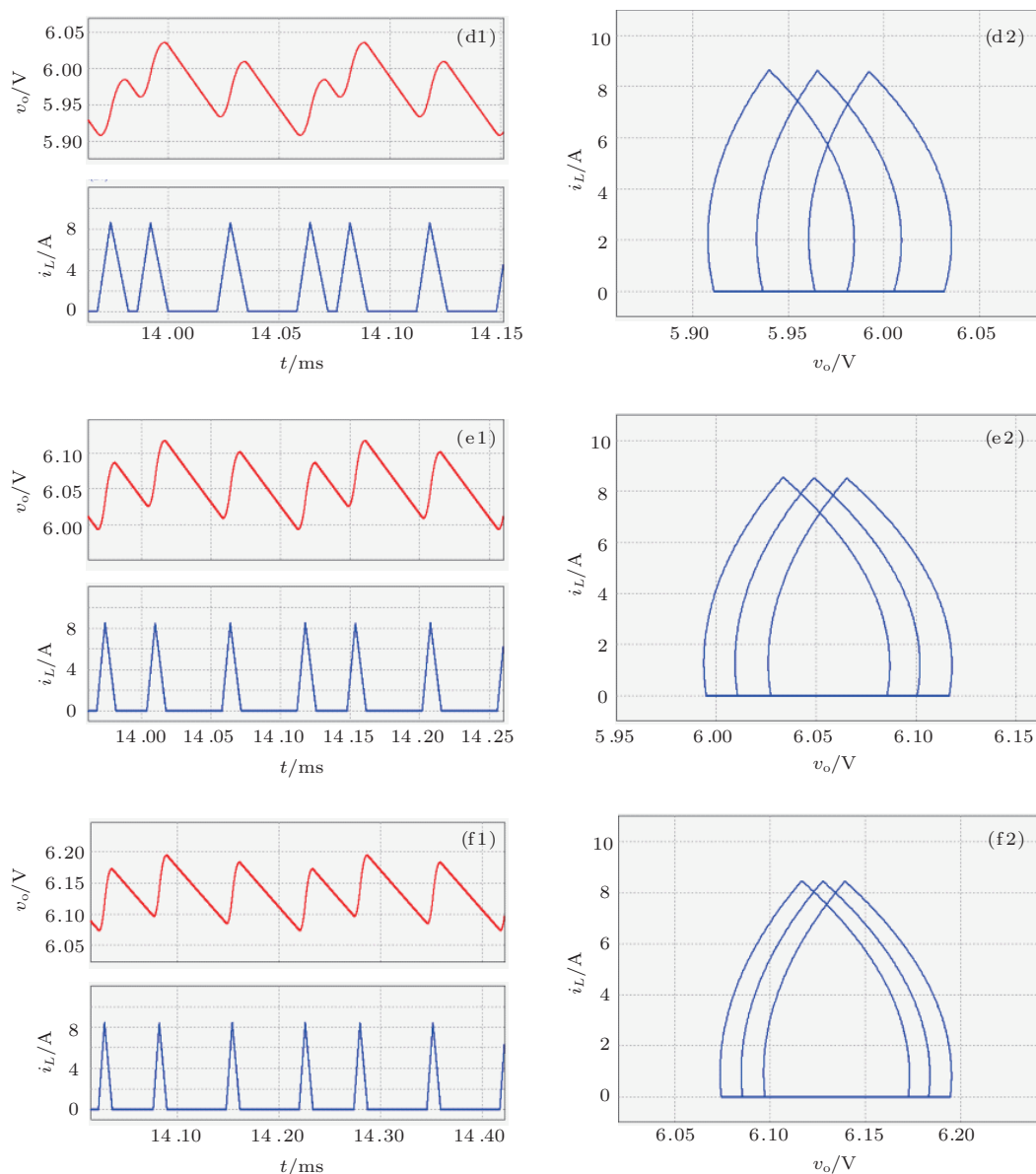


图7 $V_e = 80 \text{ mV}$ 时多频率控制下电路仿真的 i_L 和 v_o 波形 (左)、 v_o - i_L 相轨图 (右) (a) $R = 2.62 \Omega$; (b) $R = 4.56 \Omega$; (c) $R = 6.64 \Omega$; (d) $R = 2.95 \Omega$; (e) $R = 4.90 \Omega$; (f) $R = 6.98 \Omega$

6 实验验证

为了验证第5节电路仿真结果的正确性, 本节采用与第5节电路仿真相同的参数对多频率控制 DCM Buck 变换器进行实验研究.

当 $V_e = 80 \text{ mV}$ 时, 图9(a)–(f) 分别给出了 $R = 2.62, 4.56, 6.64, 2.95, 4.90, 6.98 \Omega$ 时的实验结果. 对比图9和图7可知: 周期2态 ($1T_4$ - $1T_3$, $1T_3$ - $1T_2$, $1T_2$ - $1T_1$) 的三个子图(a)–(c) 具有相似性, 实验时域波形和相轨图与仿真结果基本相符, 但存在些微差别. 输出电压实验波形的高频毛刺是由于实际输出电容存在寄生电感造成的, 该高频毛刺在实验相轨图的顶部表现出交叉状. 周期3态 ($1T_4$ - $2T_3$,

$1T_3$ - $2T_2$, $1T_2$ - $2T_1$) 的实验时域波形和相轨图与仿真结果相符, 且周期3态的三个子图(d)–(f) 具有相似性.

图10(a) 和 (b) 分别给出了 $V_e = 50 \text{ mV}$, $R = 3.45 \Omega$ 和 $V_e = 30 \text{ mV}$, $R = 4.2 \Omega$ 时的实验结果. 从图10(a) 可以看出: 变换器发生了三种频率的混频现象, 工作于周期12态, 相轨图为12个环, 循环周期的组合方式为 $1T_4$ - $1T_2$ - $1T_4$ - $9T_3$, 与图8(a) 所示的仿真结果相符. 从图10(b) 可以看出: 变换器发生了四种频率的混频现象, 工作于周期13态, 相轨图为13个环, 循环周期的组合方式为 $1T_4$ - $1T_2$ - $3(2T_3$ - $1T_2)$ - $1T_4$ - $1T_1$, 与图8(b) 所示的仿真结果一致. 实验结果验证了文中仿真结果的正确性.

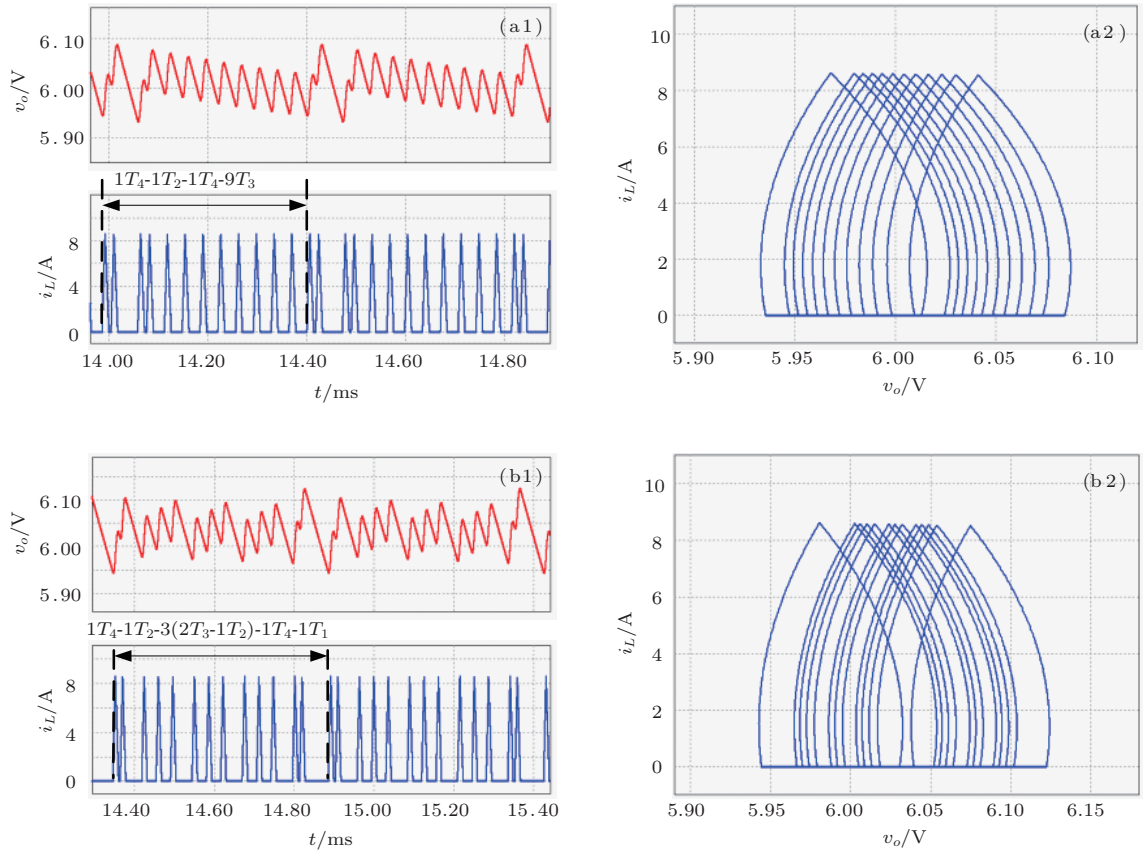
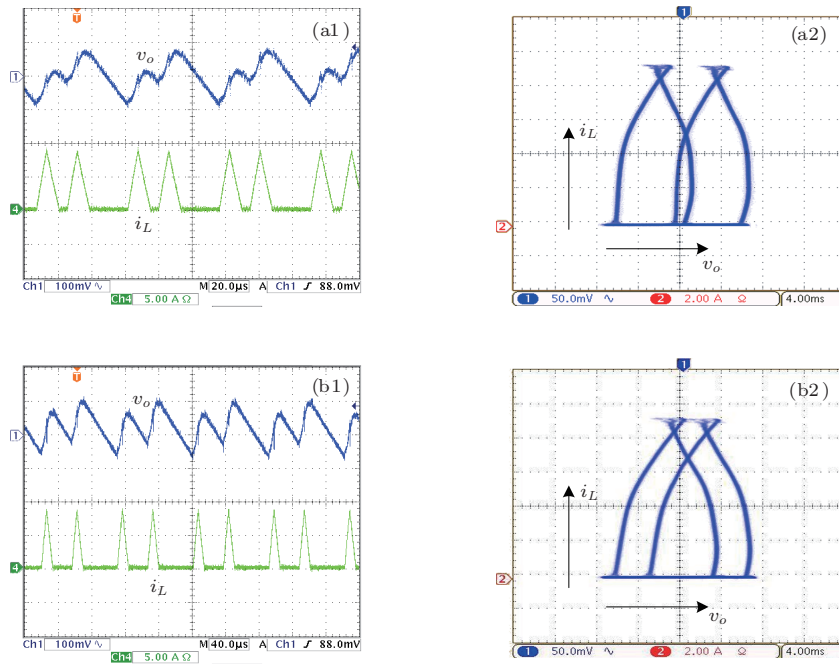


图8 多频率控制下电路仿真的 i_L 和 v_o 波形(左)、 v_o-i_L 相轨图(右) (a) $V_e = 50 \text{ mV}$, $R = 3.45 \Omega$; (b) $V_e = 30 \text{ mV}$, $R = 4.2 \Omega$



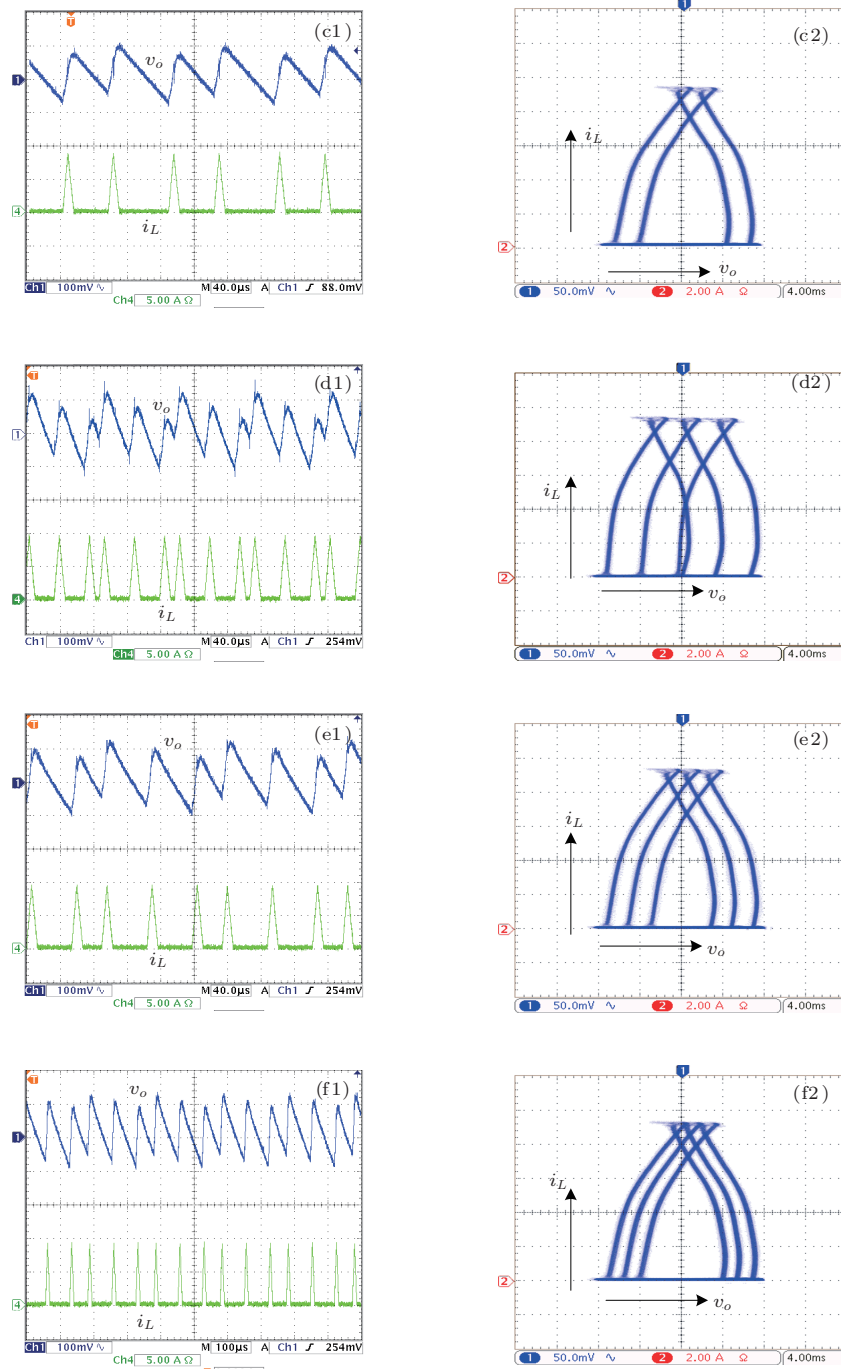


图9 $V_e = 80 \text{ mV}$ 时电压型多频率控制下电路实验的 i_L 和 v_o 波形 (左)、 v_o - i_L 相轨图 (右) (a) $R = 2.62 \Omega$; (b) $R = 4.56 \Omega$; (c) $R = 6.64 \Omega$; (d) $R = 2.95 \Omega$; (e) $R = 4.90 \Omega$; (f) $R = 6.98 \Omega$

7 结 论

根据多频率控制开关变换器的工作原理, 以及开关管和二极管导通、关断时的状态方程, 本文建立了多频率控制 DCM Buck 变换器的离散迭代映射模型及特征值方程, 并进行了相应的分岔行为分析. 结果表明: 随着电路参数的变化, 变换器存在边界碰撞分岔行为和多周期行为; 与双频率控制相

比, 多频率控制因误差界限电压 V_e 的不同而表现出自相似现象和混频现象; 特别地, 当 V_e 较大时, 双频率控制是多频率控制的特殊情况. 根据特征值方程, 进一步研究了多频率控制开关变换器的 Lyapunov 指数. 结果表明: 变换器一直工作于稳定的周期态, 不会发生混沌行为, 验证了分岔图的正确性.

采用 PSIM 电路仿真, 进一步分析了变换器出

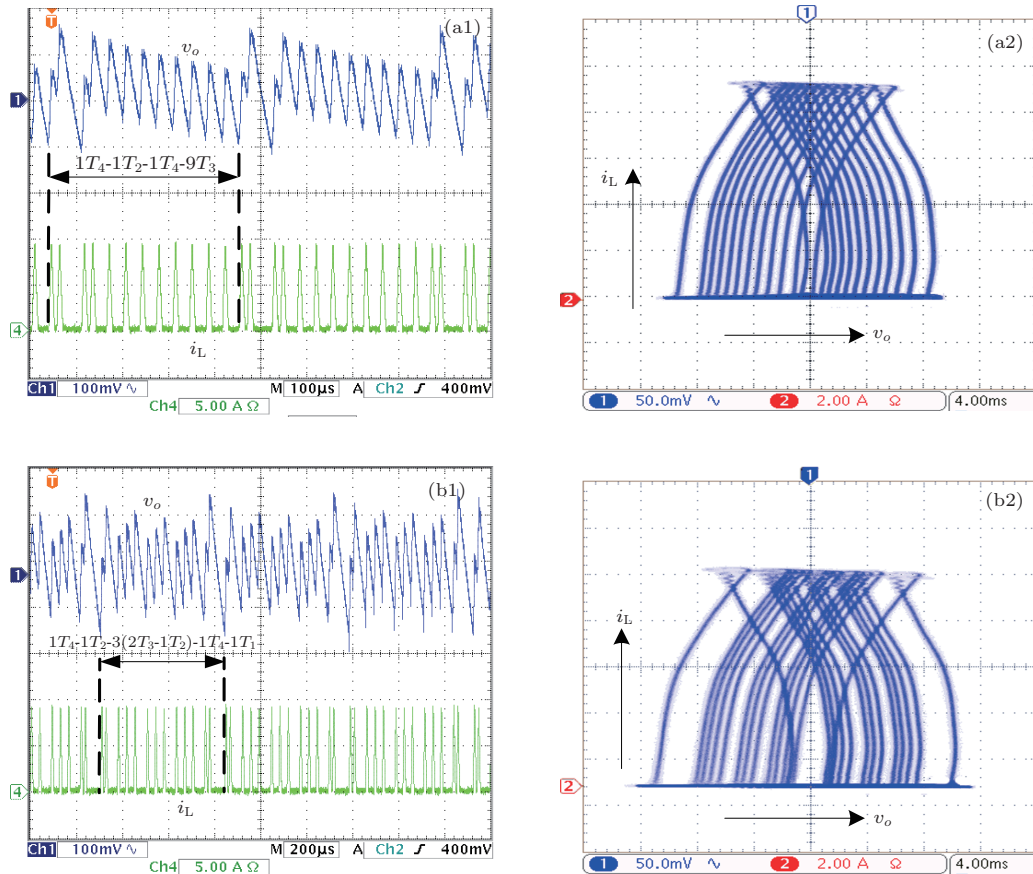


图10 电压型多频率控制下电路实验的 i_L 和 v_o 波形(左)、 v_o - i_L 相轨图(右) (a) $V_e = 50 \text{ mV}$, $R = 3.45 \Omega$; (b) $V_e = 30 \text{ mV}$, $R = 4.2 \Omega$

现的自相似和混频现象, 结果表明: 当 V_e 较大时, 在变换器工作于相同的DCM周期态 (比如周期2态, 周期3态等) 条件下, 其时域波形具有明显的相似性, 相轨图具有相等的环个数, 循环周期具有相似的脉冲组合方式; 当 V_e 较小时, 变换器的时域波形表现出明显的三频、四频混频现象. 最后, 采用与电路仿真相同的参数设计了实验装置, 并对变换器进行了实验研究, 用实验结果验证了仿真结果的正确性.

参考文献

- [1] Maity S, Tripathy D, Bhattacharya T K, Banerjee S 2007 *IEEE Trans. Circ. Syst. -I* **54** 1120
- [2] Yang P, Bao B C, Sha J, Xu J P 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 010504 (in Chinese)[杨平, 包伯成, 沙金, 许建平 2013 物理学报 **62** 010504]
- [3] Bao B C, Yang P, Ma Z H, Zhang X 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 220502 (in Chinese)[包伯成, 杨平, 马正华, 张希 2012 物理学报 **61** 220502]
- [4] Wang F Q, Zhang H, Ma X K 2012 *Chin. Phys. B* **21** 020505
- [5] Zhou G H, Bao B C, Xu J P, Jin Y Y 2010 *Chin. Phys. B* **19** 050509
- [6] Zhou Y F, Chen J N, Iu H H C, Tse C K 2008 *Int. J. Bifurc. Chaos* **18** 121
- [7] Zhou Y F, Chen J N, Ke D M 2005 *Acta Electron. Sin.* **33** 915 (in Chinese)[周宇飞, 陈军宁, 柯导明 2005 电子学报 **33** 915]
- [8] Zhou G H, Xu J P, Bao B C 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2272 (in Chinese)[周国华, 许建平, 包伯成 2010 物理学报 **59** 2272]
- [9] Zhou G H, Xu J P, Bao B C 2012 *Int. J. Bifurc. Chaos* **22** 1250008
- [10] Zhou G H, Xu J P, Bao B C, Jin Y Y 2010 *Chin. Phys. B* **19** 060508
- [11] Wang J P, Xu J P, Xu Y J 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 058401 (in Chinese)[王金平, 许建平, 徐扬军 2011 物理学报 **60** 058401]
- [12] Zhang X, Bao B C, Wang J P, Ma Z H, Xu J P 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 160503 (in Chinese)[张希, 包伯成, 王金平, 马正华, 许建平 2012 物理学报 **61** 160503]
- [13] Wang F Q, Zhang H, Ma X K 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2842 (in Chinese)[王发强, 张浩, 马西奎 2008 物理学报 **57** 2842]
- [14] Wang F Q, Zhang H, Ma X K 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1522 (in Chinese)[王发强, 张浩, 马西奎 2008 物理学报 **57** 1522]
- [15] Xu J P, Wang J P 2011 *IEEE Trans. Industr. Electron.* **58** 3658

- [16] Khaligh A, Emadi A 2008 *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* **44** 766
- [17] Wang J P, Xu J P, Qin M, Mu Q B 2010 *Proc. CSEE* **30** 1 (in Chinese)[王金平, 许建平, 秦明, 牟清波 2010 中国电机工程学报 **30** 1]
- [18] Wang J P, Xu J P, Zhou G H, Mi C B, Qin M 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 048402 (in Chinese)[王金平, 许建平, 周国华, 米长宝, 秦明 2011 物理学报 **60** 048402]
- [19] Sha J, Bao B C, Xu J P, Gao Y 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 120501 (in Chinese)[沙金, 包伯成, 许建平, 高玉 2012 物理学报 **61** 120501]
- [20] Wu S R, He S Z, Xu J P, Zhou G H, Wang J P 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 218403 (in Chinese)[吴松荣, 何圣仲, 许建平, 周国华, 王金平 2013 物理学报 **62** 218403]
- [21] Xu J P, Wang J P, Zhou G H, Qin M, Wu S R, Mu Q B 2010 *Chinese Patent* ZL 2009 2 0079219.X [2010-01-13] (in Chinese) [许建平, 王金平, 周国华, 秦明, 吴松荣, 牟清波 2010 中国专利 ZL2009 2 0079219.X[2010-01-13]]

Self-similarity and frequency-mixing phenomena analysis of multi-frequency controlled switching converter*

Wu Song-Rong^{1)†} Zhou Guo-Hua¹⁾ Wang Jin-Ping²⁾ Xu Jian-Ping¹⁾ He Sheng-Zhong¹⁾

1) (Key Laboratory of Magnetic Suspension Technology and Maglev Vehicle, Ministry of Education, School of Electrical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

2) (School of Electrical Engineering and Automation, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

(Received 30 September 2013; revised manuscript received 16 October 2013)

Abstract

Based on the operation principle and state equations of multi-frequency (MF) controlled switching converter, the discrete iterative map model is established, the corresponding characteristics equation and Lyapunov exponent of MF controlled switching converter operating in discontinuous conduction mode are derived. According to the discrete iterative map model, its bifurcation behaviors are investigated. It is found that the border-collision bifurcation and the multi-period behaviors occur in converter, when the circuit parameters are varied. When the voltage error boundary is too large, the converter behaves as self-similarity phenomenon, and when the voltage error boundary is too small, the converter behaves as frequency-mixing phenomenon. The converter stability is investigated by Lyapunov exponent, which validates the correctness of bifurcation analysis. Time-domain waveforms and phase portraits of converter with the load varied, are analyzed by circuit simulation, which validates the validity of discrete iterative map model and the correctness of theoretical analysis. Finally, simulation results in this paper are verified by experimental results.

Keywords: multi-frequency control, switching converter, self-similarity, frequency-mixing

PACS: 84.30.Jc, 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.63.028401

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 51177140, 61371033), the Sichuan Provincial Youth Science and Technology Fund, China (Grant No. 2013JQ0033), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities of China (Grant Nos. 2682013ZT20, SWJTU11CX032).

† Corresponding author. E-mail: srwu88@163.com