

面向级联失效的相依网络鲁棒性研究*

陈世明[†] 邹小群 吕辉 徐青刚

(华东交通大学电气与电子工程学院, 南昌 330013)

(2013年9月5日收到; 2013年9月27日收到修改稿)

针对相依网络耦合强度、子网络边以及耦合边对网络鲁棒性影响的问题, 基于三种典型网络模型, 建立对称相依网络和不对称相依网络模型. 针对六种不同的相依网络模型, 计算其网络临界成本, 比较耦合边权值和子网络边权值对相依网络成本的贡献程度, 发现耦合边对网络的贡献更大. 采用仿真和理论证明的方法, 获得使网络具有最小网络成本时的子网络负载参数 α 值和耦合强度参数 β 值, 并证明了网络成本变化趋势与该参数对有关. 以网络成本作为鲁棒性测度的变量, 通过对六种相依网络模型进行级联失效仿真, 给出了网络具有最强鲁棒性时参数对的取值, 以及网络鲁棒性与耦合强度之间的关系, 发现网络鲁棒性并不是随着耦合强度单调地增加或减少.

关键词: 相依网络, 耦合强度, 鲁棒性, 级联失效

PACS: 89.75.-k, 89.75.Fb

DOI: 10.7498/aps.63.028902

1 引言

现代社会中, 一些基础设施网络, 包括交通、通信、水电、能源等网络在社会生产和居民生活等各个方面越来越重要. 由于网络复杂性的日益增长, 网络越来越脆弱, 一些微小的失效将会导致整个网络大规模的失效, 甚至瘫痪, 即发生级联失效^[1-4], 这些网络的破坏将会给人们的生活带来极大的损失. 为了减缓或者避免这些灾难的发生, 对基础设施网络鲁棒性的研究就显得尤为重要.

过去人们常常以单个网络如互联网^[5]、航空网^[6]、社交网^[7]等进行网络鲁棒性的研究. 然而, 随着经济和科学技术的日益发展, 网络与网络之间的相互依赖关系越来越强, 对相互依赖相互作用的多个网络组成的系统^[8,9]的研究也逐渐成为一个重要研究方向. 现实生活中存有许多这种“网络的网络”, 如电力-燃气管道网络^[10]、电力-供水网络^[11]、电力-计算机网络^[8]等, 它们既是对方的供方, 又受到对方的限制. 一旦某一个网络遭受攻击, 这种攻击现象会通过相依网络之间的连接关系传递到与

之相互依存的网络中, 导致其失效. 相依网络的这种现象, 使得仅研究单个网络遭受攻击时的鲁棒性已不足以满足我们更深入全面地了解实际网络的运作.

目前, 许多关于相依网络鲁棒性研究的模型和方法被提出. 文献^[8]通过分析由无标度网络组成的相依网络, 发现网络度分布越宽, 则渗流阈值 p_c 就越大, 即度分布越宽, 网络鲁棒性越高. 文献^[12]也证明了当相依网络中相依节点的度分布相同时, 网络度分布越宽, 网络鲁棒性越高. 由此可知相依网络之间的相依关系与网络节点的度有关, 这也为人们建立相依网络理论分析模型提供了一种方法——基于度的耦合方法. 文献^[11]以电力-供水网络为对象, 提出了四种不同的耦合方法, 采用三种不同的攻击方式建立相依网络理论分析模型, 证明基于介数耦合的方法使得网络的鲁棒性最佳, 并提出了一种新的度量网络关键节点的测度. 在此基础上, 文献^[10]以电力-燃气管道网络为例, 采用类似的方法研究了最小化级联失效的耦合方法, 发现基于度耦合时网络鲁棒性最佳, 且网络攻击强度与容忍参数有关. 为了探讨相依网络耦合强度对网络

* 国家自然科学基金 (批准号: 61364017, 60804066) 资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: shmchen@ecjtu.jx.cn

鲁棒性的影响, 文献 [13] 将网络 G_A 依赖于网络 G_B 的节点所占比例 q_A 以及网络 G_B 依赖网络 G_A 的节点所占比例 q_B 作为相依网络的耦合强度进行理论和仿真比较, 发现通过减少两个网络之间的耦合强度, 能显著提高相依网络的鲁棒性. Qiu [14] 采用全局负载重分配原则, 以相依网络子网络的平均度作为相依网络的耦合强度, 度加权的方式加权耦合边, 发现耦合强度越小, 网络鲁棒性越好. 但在实际相依网络中, 一旦子网络的拓扑结构已固定, 通过改变网络结构来提高网络鲁棒性的方法则不可取.

为了探讨耦合强度对相依网络鲁棒性的影响, 本文分别构建了小世界、无标度及随机网络模型作为相依网络的子网络模型, 采用随机耦合的方法建立对称和不对称相依网络理论分析模型, 定义耦合边的负载为耦合强度, 其负载参数为耦合强度参数. 基于子网络负载参数和耦合强度参数, 本文开展如下研究: 对子网络边和耦合边的网络成本临界值进行比较, 获得两者对相依网络贡献更大时的参数对情况; 通过仿真及理论分析确定影响整个网络成本的参数对及其之间的关系; 以鲁棒性测度和网络成本为对象, 采用局部负载重分配原则模拟由负载最大的子网络边和耦合边分别失效时引起的级联失效过程, 仿真结果表明, 无论对称相依网络还是不对称相依网络中, 子网络负载参数等于耦合强度参数时网络具有强鲁棒性.

2 相依网络级联失效模型

将复杂网络建模为无向无权的简单连通图 $G = [V, E]$, 其中 $V = \{v_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ 代表顶点集; $E = \{e_k | e_k = (v_i, v_j), k = 1, 2, \dots, p\}$ 代表边集; 其顶点数和边数为 $N(G)$ 和 $M(G)$; $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为图 G 的邻接矩阵 (如果顶点 v_i 连接 v_j 则 $a_{ij} = 1$, 否则 $a_{ij} = 0$). 相依网络子网络 G_A, G_B 的顶点集、边集、顶点数和边数分别为 $V_A, V_B, E_A, E_B, N_A, N_B$ 以及 M_A, M_B .

2.1 局部负载重分配原则

初始状态, 每一条边的负载都小于其容量, 网络处于正常运行状态; 而当某条边发生失效时, 其负载将重新分配到其他边, 引起网络中负载的重分配, 这些边的失效又可以导致其他边的失效, 该级联过程延续到没有新的失效边出现时才停止. 本文采用局部负载重分配原则 [15].

将子网络 G_A 与子网络 G_B 之间的连接边称之为耦合边, 耦合边的权值定义为相依网络的耦合强度. 由于组成相依网络的子网络之间是通过一定的关系进行耦合连接的, 相依网络在子网络边失效和耦合边失效两种情况下遭遇级联失效时的响应也不一致. 两种边失效时负载重分配如图 1 所示.

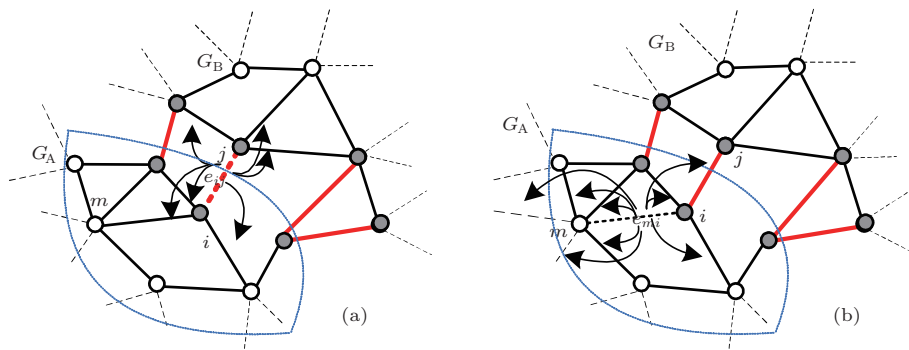


图 1 相依网络边失效时的负载重分配示意图 (a) 耦合边失效; (b) 子网络边失效

如图 1 所示, 以图 1(a) 为例, 耦合边 e_{ij} 失效, 其负载按近邻域中的边负载的比例重新分配到其他边上, 表示形式如下:

$$\Delta L_{ij} = L_{ij} * \frac{L_{mi}}{\sum_{a \in \Gamma_i} L_{ia} + \sum_{b \in \Gamma_j} L_{jb}}, \quad (1)$$

其中, Γ_i 和 Γ_j 分别为点 v_i 和 v_j 的邻接节点集 (其中 Γ_i 不包含点 v_j , Γ_j 不包含点 v_i); L_{ij} 为边 e_{ij} 的初始负载, ΔL_{ij} 为边 e_{mi} 从边 e_{ij} 处获得的额外负载; 边容量 C_{mi} 决定了该边所拥有的最大负载. 当任意

一条边 e_{mi} 的容量 $C_{mi} \geq L_{mi} + \Delta L_{ij}$ 时, 网络才不会出现级联失效现象. 同样, 当子网络边失效时, 其负载重分配原则也一样.

2.2 负载容量模型

网络的构建和维护是受到成本限制的, 须将有限的网络成本合理地分配以抵御级联失效. 对于两个子网络 G_A, G_B , 采用每条边 e_{ij} 的容量 C_{ij} 正比于其权重的方法定义负载与容量之间的

关系 [16], 即

$$C_{ij} = TL_{ij} \quad (T \geq 1), \quad (2)$$

其中, T 为容忍参数, 具有一定的可调范围; L_{ij} 为边 e_{ij} 的初始负载, 根据文献 [17] 的负载加权方式有 $L_{ij} = (k_i k_j)^\alpha$; $k_i k_j$ 为子网络中边 e_{ij} 顶点的度, α 是可调的权重参数, 控制着权重强度.

对于相依网络而言 (本文以两个子网络组成的相依网络为例), 子网络之间以一定的关联关系进行连接, 且耦合强度也会随着耦合边在网络中的重要程度不同而不同. 本文通过随机耦合的方法连接两个子网络, 建立相依网络模型, 并参照文献 [17] 的加权方式, 设定可调参数 β , 通过调整 β 来模拟相依网络耦合边的耦合强度. 具体表达式为

$$L_{ij} = (\tilde{k}_i \tilde{k}_j)^\beta \quad j \in \tilde{\Gamma}_i, \quad (3)$$

\tilde{k}_i 为相依网络耦合边 e_{ij} 在子网络 G_A 中的顶点的度, \tilde{k}_j 为另一网络 G_B 顶点的度. $\tilde{\Gamma}_i$ 为 G_A 中节点 i 在相依网络 G_B 中的邻居节点集.

2.3 测 度

为了刻画级联失效对网络造成的破坏程度, 先从网络中移除一条边 e_{ij} , 并计算其产生的失效规模 S_{ij} (级联失效停止后, 失效边的累计和), 然后依次对网络中的每条边进行移除并计算其失效规模, 再取所有网络边的失效规模 S_{ij} 的平均数, 表达式如下:

$$S = \sum_{ij} \frac{S_{ij}}{M}, \quad (4)$$

其中, S 为网络的鲁棒性测度, M 为网络中的边数. 当 $S \approx 0$ 时, 网络边的数量在级联失效发生前后几乎不变, 具有很强的抵御级联失效的能力, 即可以在级联失效的初始阶段便阻止其进一步传播, 反之 $S \approx 1$ 时, 网络几乎完全崩溃, 即无法阻止级联失效的传播.

由级联失效的负载容量模型、局部负载重分配原则以及网络鲁棒性测度的量化方法可知, 当 T 有

足够大时, 任意网络边的移除都不会导致级联失效的发生. 因此存在一个临界值 T_c , 使得网络可以抵御级联失效发生的同时网络成本最低.

3 网络模型

复杂网络拓扑结构对网络的动力学行为特性有很大的影响, 本文基于典型网络模型来研究相依网络拓扑结构的级联失效行为.

在许多真实网络中, 既存有度分布异质的网络, 也存有度分布同质的网络, 因此本文构建了异质 BA (Barabasi-Albert) 网络模型和同质 WS (Watts-Strogatz) 网络模型、ER (Erdos-Renyi) 网络模型. BA 网络模型构建方式为: 给定初始节点 m_0 , 每个时间步增加一个节点和 m 条边, 且按照择优概率连接到已有的节点上. WS 网络模型是以一个规则网络 (每个节点都与其最近邻 n 个节点相连) 为基础, 以概率 p 对该网络的旧连接线进行重新布线. ER 网络模型是参照 WS 网络模型的构建方法, 以概率 $p = 1$ 进行重新布线.

本文主要围绕对称和不对称相依网络模型来展开研究, 由于网络是以度加权的方式进行加权的, 不同网络规模使得网络节点的度、负载以及级联失效发生时负载重分配中每条边所获得的权值比重不一样, 对网络发生级联失效的影响结果也不一样, 因此本文采用相同和不同网络规模的两个子网络组成对称和不对称相依网络进行模拟仿真, 其子网络模型的构建参数及网络特性如表 1, 表 2 所示.

表 1 BA 网络的构建参数及网络特性

m_0	m	N	E	$\langle K \rangle$	C	$\langle d \rangle$
6	6	100	521	10.42	0.22609	2.1343
6	6	100	522	10.44	0.26086	2.1226
6	6	50	253	10.12	0.36589	1.8816

m_0 为给定的初始节点数, m 为每步新增加的边数, N 为网络节点数, E 为网络的边数, $\langle K \rangle$ 为网络平均度, C 为网络的聚类系数, $\langle d \rangle$ 为网络的平均最短路径.

表 2 WS 及 ER 网络的构建参数及网络特性

网络模型	n	p	N	E	$\langle K \rangle$	C	$\langle d \rangle$
WS 网络	6	0.5	100	600	12	0.19117	2.1236
WS 网络	6	0.5	100	600	12	0.1681	2.1232
WS 网络	6	0.5	50	300	12	0.2649	1.7869
ER 网络	6	1	100	600	12	0.11742	2.0766
ER 网络	6	1	100	600	12	0.1209	2.0806
ER 网络	6	1	50	300	12	0.22466	1.7837

n 为规则网络中每个节点的近邻节点数, p 为网络的重连概率.

4 仿真分析

依据表1, 表2参数分别建立BA网络、WS网络以及ER网络模型, 并以随机耦合的方法构建对称和不对称相依网络模型, 耦合边的数量 $M_o \leq N_A \times N_B$.

当网络中边 e_{ij} 失效后, 其邻域边 e_{mi} 的容量为

$$C_{mi} = L_{mi} + \Delta L_{ij}, \quad (5)$$

等式两边同时除以 L_{mi} 有 $T = 1 + \Delta L_{ij}/L_{mi}$, 考虑

到负载容量之间的关系, 为保证网络在任意攻击时都不会失效, 则网络的临界成本为

$$T_c = \max_{\substack{0 \leq i \leq r_i \\ 0 \leq j \leq r_j}} (T). \quad (6)$$

对于相依网络子网络边和耦合边而言, 其权重参数不同时, 对网络的贡献也不相同. 本文针对耦合边在每对参数变化时的 T_c 进行了仿真, 并与相同参数下两个子网络的临界成本进行了比较, 如图2所示: 不论是对称还是不对称相依网络中, 网络

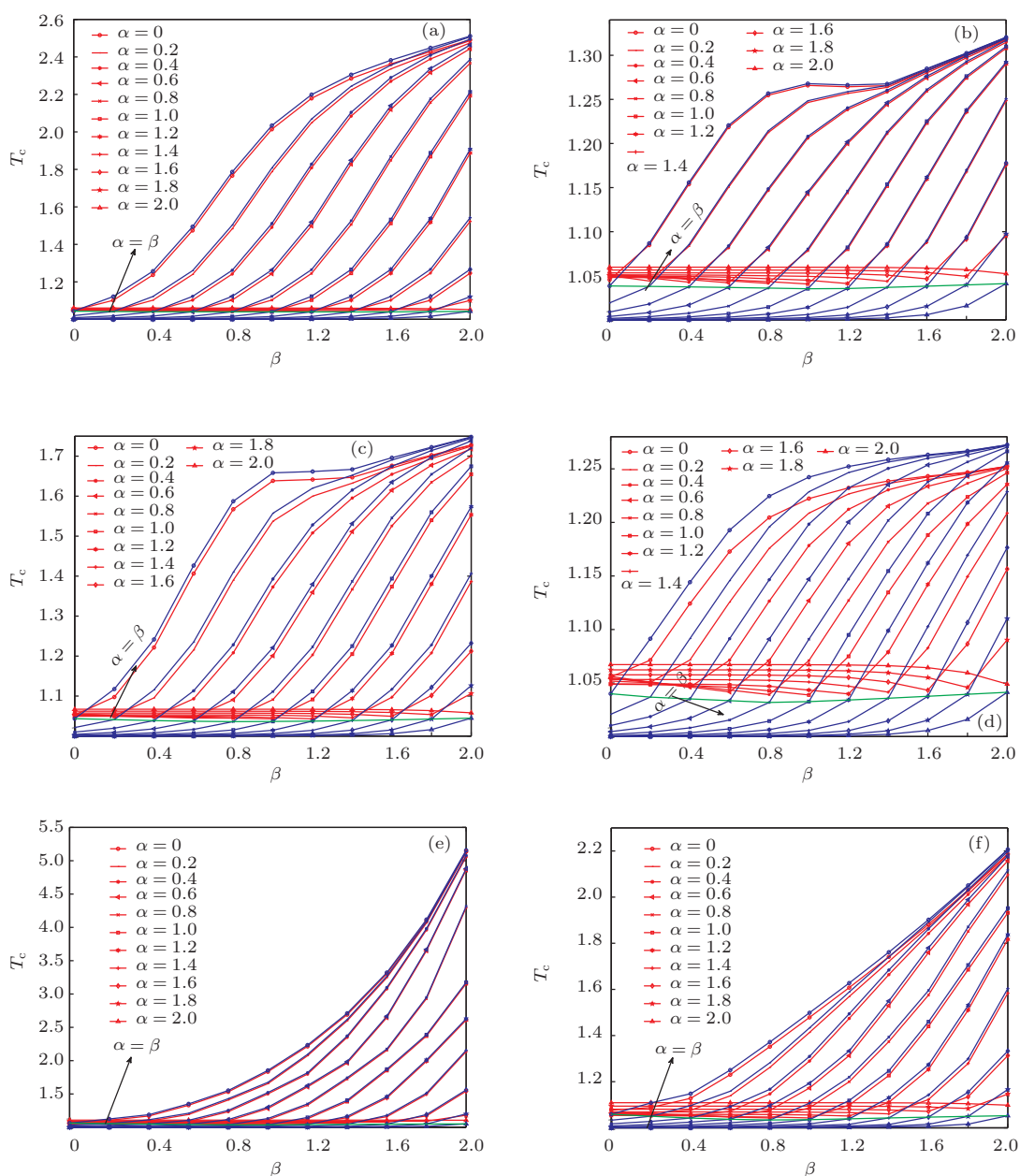


图2 临界成本仿真比较 (a) WS对称相依网络; (b) WS不对称相依网络; (c) ER对称相依网络; (d) ER不对称相依网络; (e) BA对称相依网络; (f) BA不对称相依网络; 耦合边临界成本(图中蓝线部分)与相依网络临界成本(图中红线部分)进行比较, 其中绿线部分为 $\alpha = \beta$ 时的曲线

的临界成本值都有相类似的变化趋势,且1) 耦合边 $T_{c\text{耦合边}}$ 随着 β 值的增加而增加,子网络边 $T_{c\text{子网络边}}$ 则先减后增; 2) 当 $\alpha \geq \beta$ 时, 耦合边临界成本小于子网络边临界成本, 当 $\alpha < \beta$ 时, 耦合边的临界成本大于或等于子网络边临界成本; 3) 同一参数对下, ER 和 WS 网络模型的网络临界值小于 BA 网络模型, 这是由于 BA 网络的度分布不均匀质 (WS, ER 网络度分布均匀质), 部分节点的度过大, 导致网络中部分边负载分布不均, 从而使得网络成本临界值变化范围大. 仿真结果的具体数值如表 3 所示 (取 BA 对称相依网络为例).

不论是耦合边临界成本更大还是子网络边临界成本更大, 对于相依网络整体而言, 为保

证其在任意条件下都不失效, 网络的临界成本 $T_c = \max\{T_{c\text{耦合边}}, T_{c\text{子网络边}}\}$. 子网络边和耦合边在权重参数不同时, 相依网络的临界成本变化如图 3 所示.

图 3 中六个图形曲线变化趋势可知, $\alpha = \beta$ 时, 六种相依网络模型都具有最小的 T_c ; $\alpha < \beta$ 时, β 变大 (或 α 减小), T_c 呈对数形式增加; $\alpha > \beta$ 时, β 变大 (或 α 减小), T_c 缓慢变小, 但其值都大于 $\alpha = \beta$ 时的值. 特别地, 当 $\alpha = 0, \beta = 2$ 时, 网络抵御级联失效所需的成本远大于 $\alpha = 2, \beta = 0$ 时的网络成本, 这说明相依网络子网络内部边权重的大小对网络成本的贡献小于耦合边权重的大小.

表 3 子网络边 a 和耦合边 b 临界成本比较的具体数值

$\alpha \backslash \beta$		0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0	a	1.0625	1.1047	1.1689	1.3308	1.5313	1.8333	2.2135	2.6901	3.3016	4.0968	5.1370
	b	1.0625	1.1247	1.1889	1.3508	1.5513	1.8533	2.2335	2.7101	3.3216	4.1168	5.1570
0.2	a	1.0649	1.0555	1.0929	1.1909	1.4093	1.6540	2.0733	2.5984	3.2462	4.0648	5.1189
	b	1.0333	1.0550	1.1129	1.2109	1.4293	1.6700	2.0933	2.6184	3.2662	4.0848	5.1389
0.4	a	1.0659	1.0595	1.0519	1.0844	1.2332	1.5009	1.7978	2.3501	3.0768	3.9608	5.0585
	b	1.0163	1.0289	1.0480	1.1044	1.2532	1.5209	1.8178	2.3701	3.0968	3.9808	5.0785
0.6	a	1.0643	1.0595	1.0539	1.0480	1.0953	1.2804	1.6057	1.9642	2.6464	3.6493	4.8621
	b	1.0075	1.0138	1.0249	1.0415	1.1153	1.3004	1.6257	1.9842	2.6664	3.6693	4.8821
0.8	a	1.0596	1.0575	1.0547	1.0501	1.0440	1.1116	1.3315	1.7231	2.1545	2.9297	4.2967
	b	1.0033	1.0062	1.0117	1.0212	1.0367	1.1316	1.3515	1.7431	2.1745	2.9597	4.3167
1.0	a	1.0540	1.0536	1.0526	1.0506	1.0466	1.0414	1.1280	1.3850	1.8520	2.3691	3.1545
	b	1.0014	1.0027	1.0052	1.0098	1.0179	1.0358	1.1480	1.4050	1.8720	2.3891	3.1745
1.2	a	1.0535	1.0535	1.0535	1.0535	1.0533	1.0529	1.0516	1.1438	1.4391	1.9903	2.6082
	b	1.0006	1.0012	1.0023	1.0043	1.0082	1.0150	1.0400	1.1638	1.4591	2.0103	2.6282
1.4	a	1.0652	1.0652	1.0652	1.0651	1.0651	1.0649	1.0645	1.0632	1.1582	1.4917	2.1350
	b	1.0003	1.0005	1.0010	1.0019	1.0036	1.0068	1.0131	1.0436	1.1782	1.5117	2.1550
1.6	a	1.0781	1.0781	1.0781	1.0781	1.0781	1.0780	1.0779	1.0775	1.0761	1.1707	1.5408
	b	1.0001	1.0002	1.0004	1.0008	1.0016	1.0031	1.0055	1.0121	1.0467	1.1907	1.5608
1.8	a	1.0922	1.0922	1.0922	1.0922	1.0922	1.0922	1.0922	1.0920	1.0916	1.0903	1.1810
	b	1.0000	1.0001	1.0002	1.0004	1.0007	1.0014	1.0026	1.0047	1.0128	1.0491	1.2010
2.0	a	1.1074	1.1074	1.1074	1.1074	1.1074	1.1074	1.1074	1.1073	1.1072	1.1068	1.1056
	b	1.0000	1.0000	1.0001	1.0002	1.0003	1.0006	1.0011	1.0022	1.0039	1.0134	1.0508

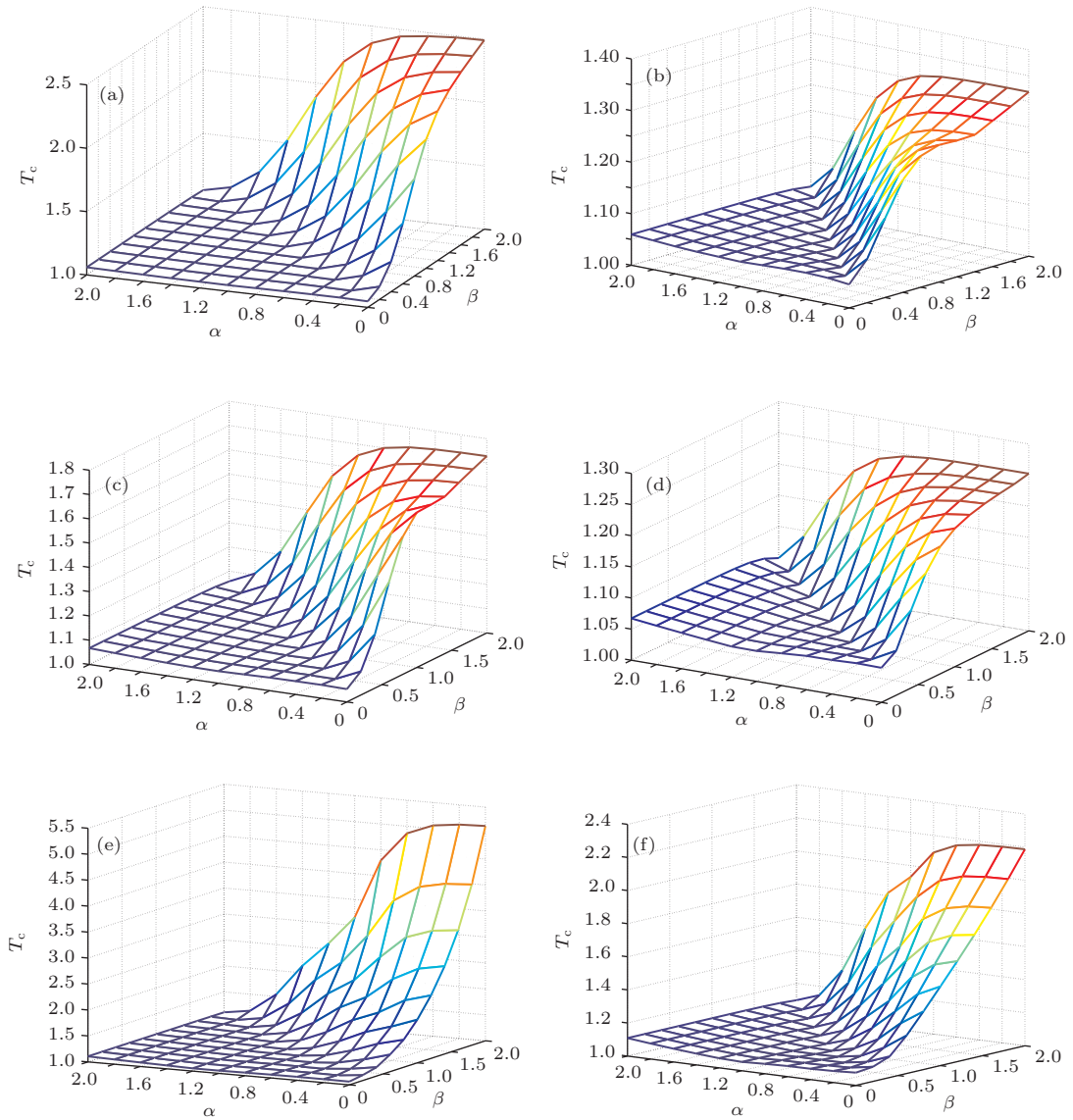


图3 不同相依网络模型中 α, β 与 T_c 之间的关系 (a) WS 对称相依网络; (b) WS 不对称相依网络; (c) ER 对称相依网络; (d) ER 不对称相依网络; (e) BA 对称相依网络; (f) BA 不对称相依网络

为了说明相依网络在 $\alpha = \beta$ 时网络成本最小这一现象, 结合 (1), (2), (3) 式, 选取耦合边 e_{ij} 失效的情况进行理论分析. 为了使网络能够在第一时间阻止级联失效的发生, 应满足 $\Delta L_{ij} + L_{mi} < C_{mi}$, 即

$$(\tilde{k}_i \tilde{k}_j)^\beta * \frac{(k_m k_i)^\alpha}{\sum_{a \in \Gamma_i} (k_i k_a)^\alpha + \sum_{b \in \Gamma_j} (k_j k_b)^\alpha} + (k_m k_i)^\alpha < T (k_m k_i)^\alpha, \quad (7)$$

其中 $\sum_{a \in \Gamma_i} (k_i k_a)^\alpha = k_i^\alpha \sum_{k'=\max}^{k_{\min}} k_i p(k'|k_i) k'^\alpha$, $p(k'|k_i)$ 是度为 k_i 的节点近邻域中度为 k' 的条件概率, k_{\max} 和 k_{\min} 为网络中节点度数的最大值和最小值. 由于三种典型网络没有度相关性^[18], 因此

有 $p(k'|k_i) = k' p(k'|k_i) / \langle k \rangle$, 从而可得:

$$\sum_{a \in \Gamma_i} (k_i k_a)^\alpha = k_i^\alpha \sum_{k'=\max}^{k_{\min}} k_i p(k'|k_i) k'^\alpha = \frac{k_i^{\alpha+1} \langle k^{\alpha+1} \rangle}{\langle k \rangle}. \quad (8)$$

将 (8) 式代入 (7) 式并在不等式两边除去相同项 $(k_m k_i)^\alpha$, \tilde{k}_i, \tilde{k}_j 分别为两个子网络的节点的度, 在理论分析中等同于 k_i, k_j , 则 $\tilde{k}_i = k_i, \tilde{k}_j = k_j$. 整理得:

$$\frac{(k_i k_j)^\beta}{k_i^{\alpha+1} + k_j^{\alpha+1}} \frac{\langle k \rangle}{\langle k^{\alpha+1} \rangle} + 1 < T. \quad (9)$$

由于 $(k_i)^{\alpha+1} + (k_j)^{\alpha+1} \geq 2(k_i k_j)^{(1+\alpha)/2}$, 所以有

$$\frac{(k_i k_j)^{\beta - \frac{(\alpha+1)}{2}}}{2} \frac{\langle k \rangle}{\langle k^{\alpha+1} \rangle} + 1 < T. \quad (10)$$

为了证明方便, 以 $\alpha = \beta$ 作参照, β 为变化参数, 令 $f(\beta) = \langle k \rangle (k_i k_j)^{\beta - (\alpha+1)/2} / 2 \langle k^{\alpha+1} \rangle > 0$, 将 β 划分为三个部分 $\beta > \alpha$, $\beta = \alpha$ 和 $\beta < \alpha$. 当 $\alpha = \beta$ 时,

$$f(\alpha = \beta) = \frac{\langle k \rangle (k_i k_j)^{(\alpha-1)/2}}{2 \langle k^{\alpha+1} \rangle}, \quad (11)$$

此时有 $T > \langle k \rangle (k_i k_j)^{(\alpha-1)/2} / 2 \langle k^{\alpha+1} \rangle + 1$, 按 α 分布范围划分, 可以获得:

$$T_c = \begin{cases} \frac{k_{\max}^{\alpha-1}}{2} \frac{\langle k \rangle}{\langle k^{\alpha+1} \rangle} + 1 & \alpha > 1 \\ \frac{\langle k \rangle}{2 \langle k^2 \rangle} + 1 & \alpha = 1 \\ \frac{k_{\min}^{\alpha-1}}{2} \frac{\langle k \rangle}{\langle k^{\alpha+1} \rangle} + 1 & \alpha < 1 \end{cases} \quad (12)$$

因为

$$\begin{aligned} & k_{\max}^{\alpha} \langle k \rangle / 2 \langle k^{\alpha+1} \rangle \\ &= \langle k \rangle / (2/N) \sum_{i=1}^N k_i^2 (k_i / k_{\max})^{\alpha-1} > \langle k \rangle / (2/N) \\ & \times \sum_{i=1}^N k_i^2 = \langle k \rangle / 2 \langle k^2 \rangle, \end{aligned}$$

且 $k_{\min}^{\alpha} \langle k \rangle / 2 \langle k^{\alpha+1} \rangle > \langle k \rangle / 2 \langle k^2 \rangle$, 由此可知, 在 $\alpha = \beta$ 时, 存在使网络容量最小的值 $T_c(\alpha = 1)$. 因

$$\begin{aligned} & (k_{\max}^{\alpha} \langle k \rangle / 2 \langle k^{\alpha+1} \rangle) / (k_{\min}^{\alpha} \langle k \rangle / 2 \langle k^{\alpha+1} \rangle) \\ &= (\langle k \rangle / (2/N) \sum_{i=1}^N k_i^2 (k_i / k_{\max})^{\alpha-1}) / (\langle k \rangle / (2/N) \\ & \times \sum_{i=1}^N k_i^2 (k_i / k_{\max})^{\alpha-1}) > 1, \end{aligned}$$

可以知道 $\alpha = \beta$ 时的最大值为 $T_{c \max} = T_c(\alpha > 1)$.

由于本文用于模拟仿真的网络是连通图, 有 $k_i \geq 1, k_j \geq 1$, 且组成边 e_{ij} 的两个顶点中必须有

一个顶点的度要大于等于2, 因此有 $k_i k_j \geq 2$. 当 $\beta_1 > \beta_2 > \alpha = \beta$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{f(\beta_1)}{f(\beta)} &= \frac{\langle k \rangle (k_i k_j)^{\beta_1 - (\alpha+1)/2}}{2 \langle k^{\alpha+1} \rangle} \bigg/ \frac{\langle k \rangle (k_i k_j)^{\beta - (\alpha+1)/2}}{2 \langle k^{\alpha+1} \rangle} \\ &= (k_i k_j)^{\frac{\beta_1}{\beta}} > 1, \end{aligned} \quad (13)$$

即 $f(\beta_1) > f(\beta)$, 同理有 $f(\beta_2) > f(\beta)$, $f(\beta_1) > f(\beta_2)$, 则可推出 $T(\beta_1) > T(\beta_2) > T(\beta)$. 由此可知 $\beta > \alpha$, 且 β 增加时, 网络成本呈单调递增趋势, 且都会大于 $T(\alpha = \beta)$.

当 $\beta_1 < \beta_2 < \alpha = \beta$ 时, 有

$$\frac{f(\beta_1)}{f(\beta)} = (k_i k_j)^{\beta_1/\beta}, \quad (14)$$

由于 β 为大于等于0的数, $\beta = 0$ 时不存在小于 β 的 β_1 值, 因此可以推出 $0 < \beta_1/\beta < 1$, $f(\beta_1)/f(\beta) > 1$, 即 $f(\beta_1) > f(\beta)$, 同理可推出 $f(\beta_2) > f(\beta)$, $f(\beta_1) > f(\beta_2)$, 以及 $T(\beta_1) > T(\beta_2) > T(\beta)$. 由此可得到结论: 当 $\beta < \alpha$ 时, 随着 β 值的增加, 网络成本呈单调递减趋势, 但其值都会大于 $T(\alpha = \beta)$.

采用相同的方法, 可以证明以 α 为变化量, 当 $\beta > \alpha$ 时, 随着 α 值的增加, 网络成本呈单调递减趋势; 当 $\beta < \alpha$ 时, 随着 α 值的增加, 网络成本呈单调递增趋势, 但两种情况下网络成本都会大于 $T(\alpha = \beta)$, 且 $T(\alpha = \beta = 1)$ 为全网络最小成本.

为了讨论相依网络子网络边和耦合边发生级联失效时网络的鲁棒性, 以网络成本作为变量, 仿真相依网络在负载最大的子网络边和耦合边发生失效时网络的鲁棒性. 以BA网络为例, $\alpha = 1$ 时的仿真结果如图4所示: 任意相依网络中, 随着网络成本 T 的增加, S 越来越小, 即网络的鲁棒性越来越强, 当达到一个临界值时, 将不会出现级联失效

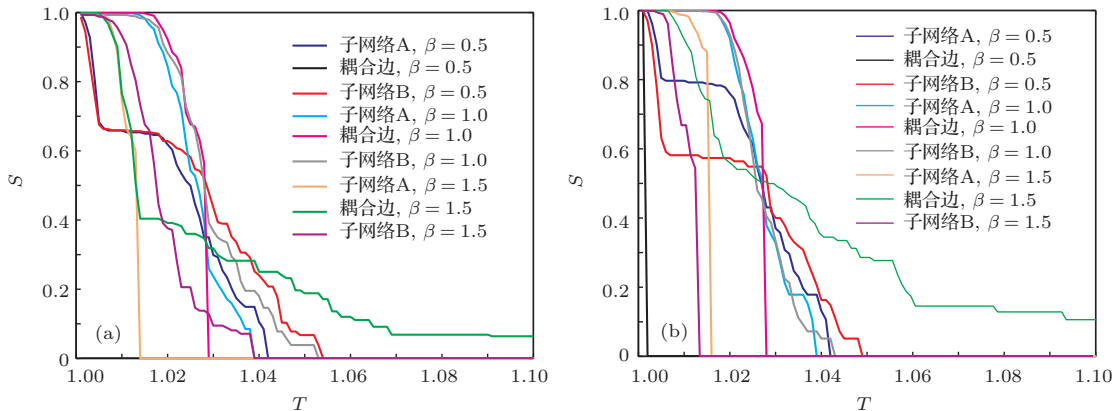


图4 BA网络在 $\alpha = 1, \beta$ 变化时的鲁棒仿真 (a) BA 对称相依网络; (b) BA 不对称相依网络

现象, 这与实际网络抵御级联失效原理相同; 当 $\alpha \geq \beta$ 时, 有 $T_{c\text{耦合边}} < T_{c\text{子网络边}}$, $\alpha < \beta$ 时, $T_{c\text{耦合边}} > T_{c\text{子网络边}}$, 这与图 2 结论相同; 对于整个相依网络而言, 为保证网络遭受攻击时网络能正常运行, 选择两种边发生失效时所需最大成本作为变量, 则从图 4 中可以看出, 无论 β 值为 0.5 还是 1.5, 级联失效结束后, 网络用于抵御级联失效的总体网络成本都要大于 $T(\alpha = \beta = 1)$, 这与理论证明相符合.

不同参数 α, β 变化下, 网络鲁棒性 S 与网络成本 T 之间的关系如图 5 所示. 图中仿真结果表明: 1) $\alpha = \beta = 1$ 时, 网络可以以较小的成本最强鲁棒性来抵御级联失效; 2) 无论 α, β 如何变化, 网络用于抵御级联失效的成本都要大于 $\alpha = \beta$; 3) 无论 β 增大或 α 减小, $\alpha < \beta$ 时, 确保网络在任意情况下都不失效的网络成本越来越大, 也即耦合强度增加, 网络鲁棒性则越差. 而 $\alpha > \beta$ 时, 网络成本缓慢减小, 但都会大于 $T(\alpha = \beta)$, 也就是说, 此时耦合强

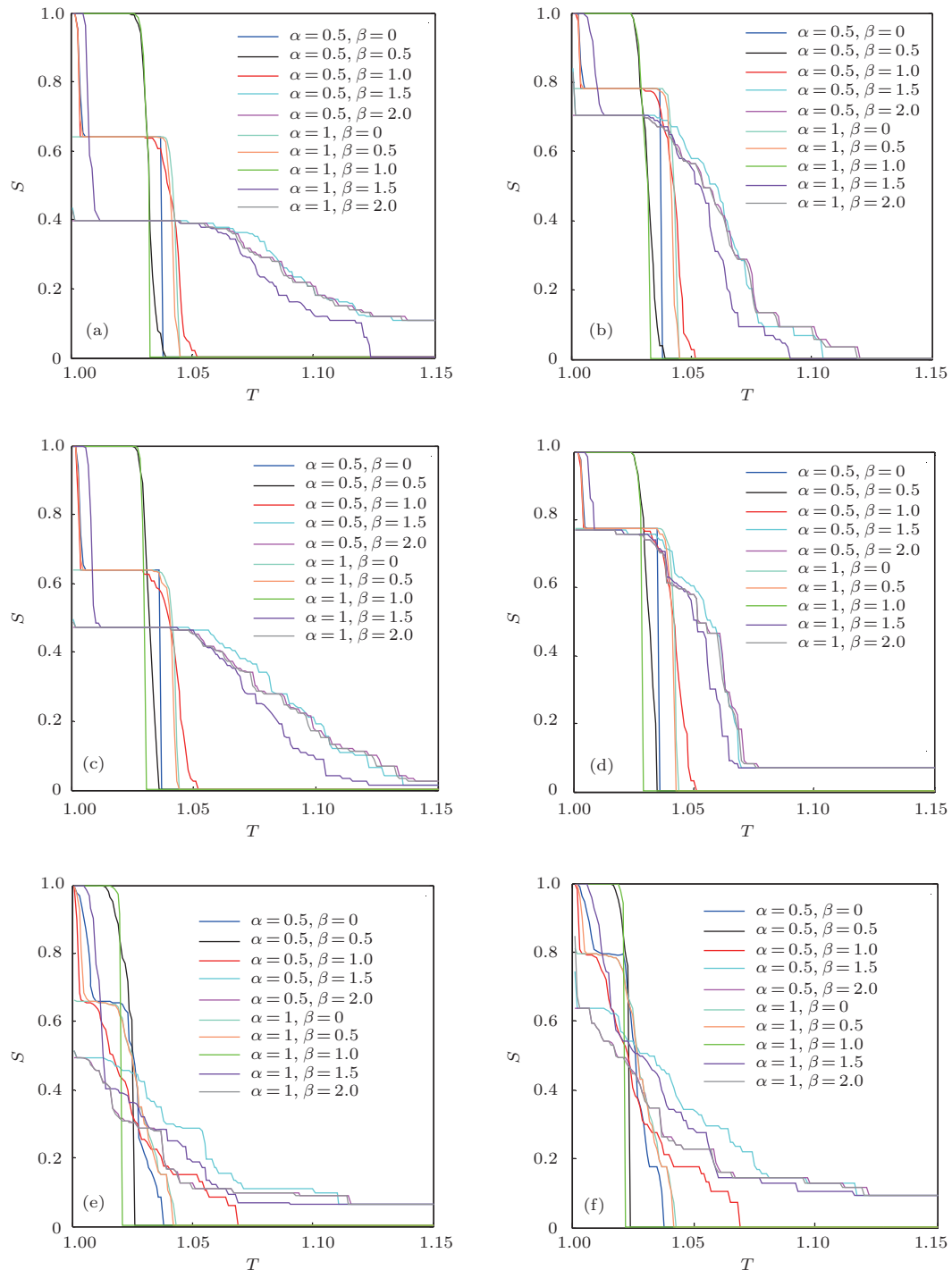


图 5 不同网络在不同参数对 α, β 下的 S 与 T 之间的关系 (a) WS 对称相依网络; (b) WS 不对称相依网络; (c) ER 对称相依网络; (d) ER 不对称相依网络; (e) BA 对称相依网络; (f) BA 不对称相依网络

度增加,网络鲁棒性会缓慢变强,但都会劣于网络的最佳鲁棒性.

图5中,相依网络鲁棒性与耦合强度并没有呈现正相关或者负相关的关系,而是由耦合强度和子网络负载共同决定.因此,在设计网络模型时,选择合适的符合实际要求的参数对来规划网络线路负载是十分必要的.文中六种相依网络模型都具有相似的结论,由此可知本文结论具有普遍性.

5 结 论

相依网络鲁棒性的研究有助于人们更深入全面地了解实际网络的运作,本文在对相依网络模型学习的基础上,基于三种典型网络模型以随机耦合的方式建立对称和不对称相依网络,定义子网络之间的连接边为耦合边, $(\tilde{k}_i \tilde{k}_j)^\beta$ 为相依网络耦合强度.通过调节子网络的权重参数 α 和耦合强度参数 β , 仿真比较了子网络边和耦合边权值对相依网络临界成本的贡献,发现耦合边权值对网络影响更大.为获得相依网络的最小网络成本,本文提供了相应的仿真和理论分析,发现 $\alpha = \beta$ 时具有最小网络成本值,且在 $\alpha < \beta$ ($\alpha > \beta$), $\beta(\alpha)$ 时,网络成本单调递增,而 $\alpha > \beta$ ($\alpha < \beta$), $\beta(\alpha)$ 时,网络成本单调递减.随后以网络成本作为鲁棒性测度的变量,对六种相依网络进行级联失效仿真,结果表明 $\alpha < \beta$ 时,耦合强度增加 (β 增加),网络鲁棒性则越差,而 $\alpha > \beta$ 时,耦合强度增加,网络鲁棒性会缓慢变强,但都会劣于网络的最强鲁棒性水平.

本文基于六种不同的相依网络模型比较都有相同的结论,由此推断参数对网络鲁棒性影响作用在任意组合的相依网络中都有相似的结论,由此可知这种现象具有普遍性.这为实际相依网络构建

中网络负载的设计分配提供了一定的参考价值,也为网络在不改变总体网络成本,通过局部调整网络线路上的负载关系来抵御级联失效提供了一种方法.

参考文献

- [1] Zio E, Golea L R, Sansavini G 2012 *Reliab Eng. Sys. Saf.* **103** 72
- [2] Xiao Y D, Lao S Y, Hou L L, Bai L 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 180201 (in Chinese)[肖延东, 老松杨, 侯绿林, 白亮 2013 物理学报 **62** 180201]
- [3] Chen S M, Pang S P, Zou X Q 2013 *Chin. Phys. B* **22** 058901
- [4] Wang J W, Rong L L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3714 (in Chinese)[王建伟, 荣莉莉 2009 物理学报 **58** 3714]
- [5] West B J, Grigolini P 2011 *Phys. Today* **64** 58
- [6] Barabási A L, Bonabeau E 2003 *Sci. Am.* **288** 50
- [7] Borgatti S P, Mehra A, Brass D, Labianca G 2009 *Science* **323** 892
- [8] Buldyrev S V, Parshani R, Paul G, Stanley H E, Havlin S 2010 *Nature* **464** 1025
- [9] Li R Q, Tang M, Xu B M 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 168903 (in Chinese)[李睿琪, 唐明, 许伯铭 2013 物理学报 **62** 168903]
- [10] Wang S Hong L, Chen X 2012 *Physica A* **391** 3323
- [11] Wang S, Hong L, Ouyang M, Zhang J, Chen X 2013 *Safety Sci.* **51** 328
- [12] Buldyrev S V, Shere N W, Cwlich G A 2011 *Phys. Rev. E* **83** 016112
- [13] Parshani R, Buldyrev S V, Havlin S 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 048701
- [14] Qiu Y 2013 *Physica A* **392** 1920
- [15] Wang W, Chen G 2008 *Phys. Rev. E* **77** 026101
- [16] Motter A E, Lai Y C 2002 *Phys. Rev. E* **66** 065102
- [17] Poccock M, Evans D, Memmott J 2012 *Science* **335** 973
- [18] Mirzasoleiman B, Babaei M, Jalili M, Safari M 2011 *Phys. Rev. E* **84** 046114

Research on robustness of interdependent network for suppressing cascading failure^{*}

Chen Shi-Ming[†] Zou Xiao-Qun Lü Hui Xu Qing-Gang

(School of Electrical and Electronic Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

(Received 5 September 2013; revised manuscript received 27 September 2013)

Abstract

In order to study the influences of network coupling strength, subnetwork edge, and coupling edge of interdependent networks on the network robustness, symmetrically and asymmetrically coupled interdependent network models are constructed based on three typical network models. Firstly, we calculate the cost thresholds of six different interdependent networks, and find that the coupling edges have a greater influence on the cost of interdependent network than the edges of sub-networks. Furthermore, the relationship of the two parameters (α , β) with the cost of network is obtained by simulation and theoretical analysis, and the cost of network correlated with the two parameters is proved. Finally, by setting the cost of network as a variable measuring the robustness, the simulations on interdependent networks for suppressing cascading failure provide the values of the parameters corresponding to the strongest robustness and the relationship between the robustness and the coupling strength, and it is found that the robustness of network neither increases nor decreases monotonically with the increase coupling strength.

Keywords: interdependent network, coupling strength, robustness, cascading failure

PACS: 89.75.-k, 89.75.Fb

DOI: [10.7498/aps.63.028902](https://doi.org/10.7498/aps.63.028902)

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61364017, 60804066).

[†] Corresponding author. E-mail: shmchen@ecjtu.jx.cn