

温库边界对布朗热机性能的影响*

肖宇玲 何济洲† 程海涛

(南昌大学物理系, 南昌 330031)

(2014年5月14日收到; 2014年6月3日收到修改稿)

研究了单势垒锯齿势中, 布朗粒子在外力和空间周期温度场作用下构成的布朗热机的热力学性能. 考虑布朗粒子动能变化以及高、低温库之间热漏引起的热流. 用 Smoluchowski 方程描述粒子在黏性介质中的动力学特性, 推导出高、低温库的热流以及热机功率和效率的解析表达式. 通过数值计算分析势垒高度、外力和温库边界对热机性能的影响. 研究表明: 由于动能变化和热漏引起的不可逆热流的存在, 布朗热机为不可逆热机, 热机的功率效率特性为一闭合的关系曲线; 势垒边界与温库边界重合时, 热机的功率达到最大值; 通过改变温库边界的位置, 可以在一定范围内提高热机的效率, 但同时减小了热机的输出功率.

关键词: 布朗热机, 热漏, 热力学性能, 不可逆性**PACS:** 05.40.-a, 05.70.Ln, 87.10.-e**DOI:** 10.7498/aps.63.200501

1 引言

布朗马达是一种纳米级的微小机器, 具有周期性的空间不对称结构^[1-4]. 在温差驱动下布朗马达能够作为热机进行工作, 实现微观领域的能量转换. Feynman等^[5]首先提出了所谓“热棘轮”的热驱动布朗马达模型. 随后, 人们为了理解布朗马达的特性及工作原理, 开展了大量的理论和实验工作^[6-11]. 例如 Büttiker^[6], van Kampen^[7] 和 Landauer^[8] 等分别从不同的角度研究了由非均匀温度场驱动的布朗马达的粒子流和热力学性能.

近年来, 人们对温差驱动的布朗热机产生了浓厚的兴趣, 基于费曼棘齿演化而来的单势垒锯齿势场中布朗热机的性能得到了广泛的研究, 并得到了许多有意义的结果. 单势垒锯齿势布朗热机或制冷机模型的优势在于可以从布朗粒子的动力学方程推导出粒子流和热流等热力学参量的解析表达式, 方便进行热力学性能优化及分子动力学模拟^[9]. Asfaw 和 Bekele^[12-14] 研究了温差驱动布朗马达的效率和特性, 该马达可以作为一个热机或制

冷机工作, 在准静态极限下布朗热机的效率达到卡诺效率; Derényi 和 Astumian^[15] 考虑布朗粒子在高低温库之间运动时, 粒子的动能变化会产生不可逆热流, 从而影响布朗热机的效率; Zhang 和 He 等^[16-18] 研究了一维晶格中微观布朗热机和制冷机的热力学性能. 大量的研究表明, 由于布朗粒子动能变化引起的不可逆热流, 使得在准静态极限下布朗热机的效率和制冷机的制冷系数都达不到卡诺值^[19-27].

在考虑粒子动能变化引起的热流时, Asfaw^[28,29] 进一步讨论了在黏滞性介质中细分锯齿势对布朗热机效率和制冷机制冷系数的影响, 得出当锯齿势细分程度较小时有可能提高布朗热机的效率. 之前, 我们研究了一个周期性双势垒锯齿势布朗热机模型^[30], 考虑了高、低温库之间存在不可逆热漏, 结果表明低势垒的引入可以在一定程度上提高布朗热机的效率.

为了进一步探究布朗马达系统中各性能参数对布朗热机效率的影响, 寻求提高布朗热机效率的方案, 我们对周期性单势垒锯齿势场中布朗热机的温库边界进行改变, 不再与势垒边界重合. 运用

* 国家自然科学基金(批准号: 11365015)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: hjzhou@ncu.edu.cn

Smoluchowski 方程^[31]导出了稳态流、功率和效率的表达式. 考虑布朗粒子动能的变化以及高、低温库之间热漏的存在, 通过数值计算分析温库边界等参数对布朗热机功率和效率的影响. 相比于势垒边界与温库边界重合的布朗热机, 温库边界的改变在一定程度上提高了热机的效率, 但同时减小了输出功率.

2 模型与理论分析

考虑布朗粒子在周期性单势垒锯齿势中运动, 黏性介质沿空间坐标 x 的方向交替地与高、低温热库接触, 粒子受到沿 x 负方向的线性外力 f 的作用, 如图 1 所示.

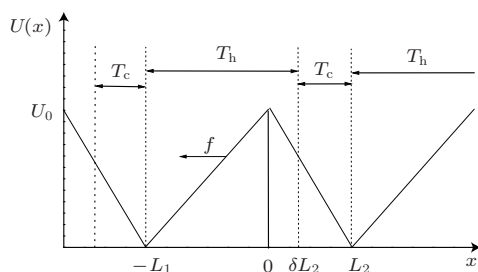


图 1 布朗热机示意图

在区间 $-L_1 \leq x < L_2$ 内, 单势垒锯齿势分布为

$$U_s(x) = \begin{cases} U_0 \left(\frac{x}{L_1} + 1 \right) & (-L_1 \leq x \leq 0) \\ U_0 \left(\frac{-x}{L_2} + 1 \right) & (0 < x < L_2) \end{cases}, \quad (1)$$

U_0 为势垒的高度, $L = (L_1 + L_2)$ 为锯齿势的周期长度. 温度曲线 $T(x)$ 有如下形式:

$$T(x) = \begin{cases} T_h & (-L_1 \leq x \leq \delta L_2) \\ T_c & (\delta L_2 < x < L_2) \end{cases}, \quad (2)$$

其中 T_h , T_c 分别为高、低温热库的温度. 势场 $U_s(x)$ 和温度 $T(x)$ 拥有相同的周期 L , 使得

$$U_s(x + L) = U_s(x), \quad T(x + L) = T(x).$$

外力 f 产生的等效势为 fx , 总的等效锯齿势变为 $U(x) = U_s(x) + fx$.

在周期性非均匀温度和外力的驱动下, 布朗粒子做定向运动并最终形成一个稳态流 J . 稳态流的大小和方向由表征模型的参数决定. 布朗粒子在非均匀介质中的动力学由 Smoluchowski 方程表示^[31]:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\gamma(x)} \left[U'(x) P(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} (T(x) P(x, t)) \right] \right), \quad (3)$$

$P(x, t)$ 为 t 时刻发现粒子在 x 处的概率密度, $U'(x) = dU(x)/dx$, $\gamma(x)$ 为 x 处的摩擦系数. 取玻尔兹曼常数 $k_B = 1$, 稳态时的恒定流为

$$J = -\frac{1}{\gamma(x)} \left[U'(x) P_{ss}(x) + \frac{d}{dx} (T(x) P_{ss}(x)) \right], \quad (4)$$

其中 $P_{ss}(x)$ 为 x 处的稳态概率密度. 假定黏性介质中各处的摩擦系数相同, 利用周期性边界条件 $P_{ss}(x + L) = P_{ss}(x)$ 以及本文中所给定的锯齿势场和温度曲线, 可得到稳态流的表达式:

$$J = \frac{-F}{G_1 G_2 + H F}, \quad (5)$$

其中 F , G_1 , G_2 , H 的具体表达式在附录中给出. 布朗粒子的速度 ν 与稳态流的关系为 $\nu = JL$.

作为热机模型时, 稳态流大于 0 (即布朗粒子向右运动). 考虑系统中存在的两种热流: 一种为高、低温库之间的热漏, 大小为 $k(T_h - T_c)$, k 为热漏系数^[32]; 另一种为布朗粒子运动所产生的热流, 包括布朗粒子克服势垒、外力以及黏性阻力时吸收热量产生的热流和温度边界处由于布朗粒子动能变化引起的热流 $(T_h - T_c)/2$ ^[15]. 因此, 在周期时间 $t = L/\nu$ 内, 从高温库中释放出来的热量为

$$Q_h = (1 - \delta)U_0 + (\gamma\nu + f)(L_1 + \delta L_2) + (T_h - T_c)/2 + k(L/\nu)(T_h - T_c). \quad (6)$$

同样, 可知低温库吸收的热量

$$Q_c = (1 - \delta)U_0 - (\gamma\nu + f)(L_2 - \delta L_2) + (T_h - T_c)/2 + k(L/\nu)(T_h - T_c); \quad (7)$$

热机的功和效率分别为

$$W = (\gamma\nu + f)(L_1 + L_2), \quad (8)$$

$$\eta = \frac{W}{Q_h} = \frac{(\gamma\nu + f)(L_1 + L_2)}{(1 - \delta)U_0 + (\gamma\nu + f)(L_1 + \delta L_2) + (T_h - T_c)/2 + k(L/\nu)(T_h - T_c)}; \quad (9)$$

于是热机的功率为

$$P = W/t = (\gamma\nu + f)(L_1 + L_2)\nu/L = (\gamma\nu + f)\nu. \quad (10)$$

为了便于分析, 我们对模型中的参量进行无量纲处理. 令

$$u = U_0/T_h, \quad \tau = T_c/T_h, \\ \lambda = fL_1/T_h, \quad l = L_2/L_1,$$

以及 $J_0 = T_h/(\gamma L_1^2) = 1$.

3 无外力时热机功率和效率特性

没有外力时, 即 $\lambda = 0$. 利用 (9) 和 (10) 式我们给出了热机的功率、效率关于势垒高度 u 的关系曲线, 如图 2 和图 3 所示. 功率和效率都与势垒高度呈抛物线型曲线关系; 在 $u = u_P$ 处, 功率达到最大值 P_u ; 在 $u = u_\eta$ 处, 效率达到最大值 η_u . δ 的取值 (即温库的边界位置) 影响着热机的功率和效率, 随着 δ 的增大, 最大功率和最大效率都减小. 当 $u = 0$ 时, 即势垒不存在, 由于没有非对称的势场驱使布朗粒子定向运动, 布朗热机不工作, 热机的功率和效率都为 0; 当 u 很大时, 温差的驱动不足以让布朗粒子克服锯齿势垒向右运动, 此时热机也不工作, 热机的功率和效率同样也为 0.

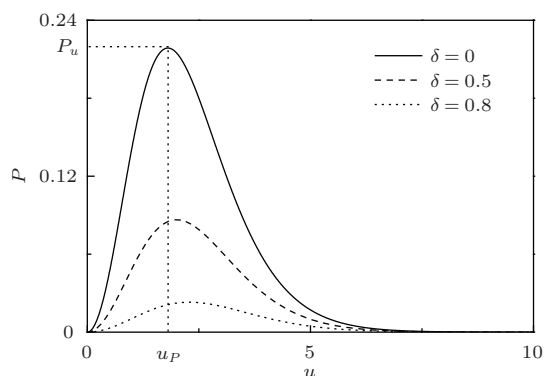


图 2 功率 P 与势垒高度 u 的关系 (其中 $\tau = 0.5$, $l = 0.6$, $k = 0.004$)

图 4 为不同 δ 取值下热机功率 P 与效率 η 的关系曲线. 从图 5 中可以看出, 由于热漏以及动能变化引起的不可逆热流的存在, 使得布朗热机为不可逆热机, 热机的功率效率特性为一闭合的关系曲线, 与经典的不可逆热机相似 [33].

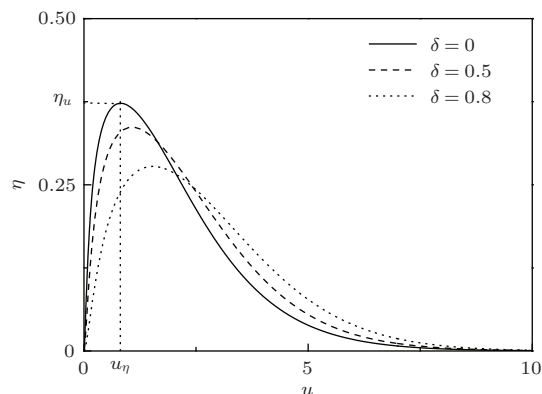


图 3 效率 η 与势垒高度 u 的关系 (其中 $\tau = 0.5$, $l = 0.6$, $k = 0.004$)

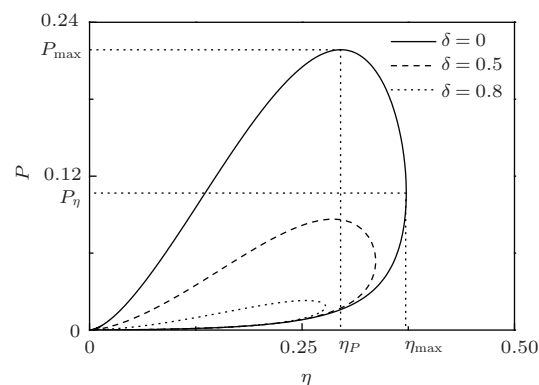


图 4 功率 P 与效率 η 的关系 (其中 $\tau = 0.5$, $l = 0.6$, $k = 0.004$)

4 外力与温库边界对热机功率和效率的影响

根据 (9) 和 (10) 式, 分析外力、温库边界对热机功率、效率的影响. 图 5 和图 6 为不同势垒高度下热机功率 P 、效率 η 与外力 λ 的关系曲线. 从图中可以看出, 当 $\lambda = 0$ 时 (即外力不存在), 功率为 P_0 完全用来驱使布朗粒子克服黏滞阻力向右运动, 热机的效率为 η_0 ; 随着外力 λ 的增大, 功率 P 和效率 η 先增大后减小, 存在最优的外力取值 λ_P 和 λ_η 使得功率、效率分别达到最大值 P_λ , η_λ ; λ 取值存在上限值 $\lambda_{\max}$, 当 $\lambda = \lambda_{\max}$ 时, 热机的功率、效率都为 0, 布朗粒子平均稳态速度为 0, 系统处于准静态. 综上, 布朗热机工作在一定的外力取值区间内, 通过对外力合适的取值, 可以使得热机工作在最大功率下或是最大效率下.

图 7 和图 8 为不同势垒高度下热机功率 P 、效率 η 与温库边界 δ 的关系曲线. 从图中可以看出: 当 $\delta = 0$ 时, 即温库边界与势垒位置重合, 此时功

率达到最大值 P_δ , 热机的效率为 η_0 ; 随着 δ 的增大, 功率 P 单调减小, 效率 η 先增大后减小, 存在最优的温库边界 δ_η 使得热机效率达到最大值 η_δ ; δ 取值存在上限值 $\delta_{\max}$, 当 $\delta = \delta_{\max}$ 时, 热机的功率、效率都为 0, 布朗粒子平均稳态速度为 0, 系统处于准静态. 综上, 温库边界 δ 的取值影响着热机的功率、效率特性, 适当地改变温库边界位置能提高热机的效率, 但同时减小了热机的输出功率.

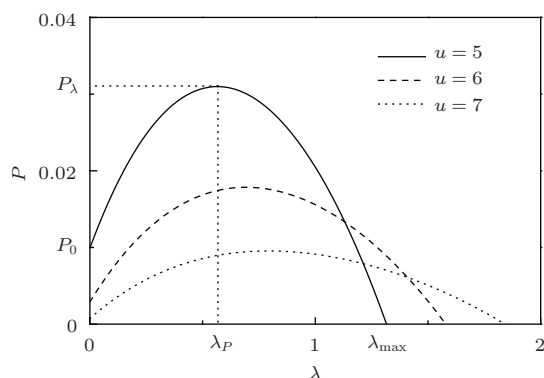


图5 功率 P 与外力 λ 的关系 (其中 $\delta = 0.5$, $\tau = 0.5$, $l = 0.6$, $k = 0.004$)

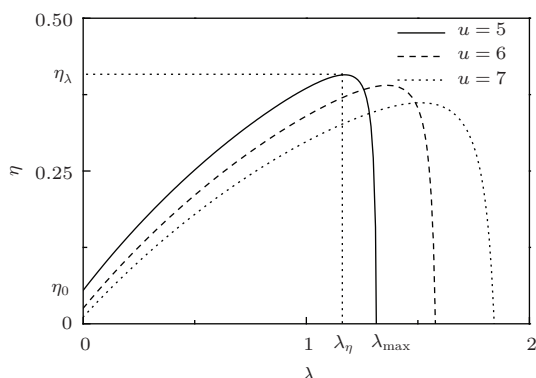


图6 效率 η 与外力 λ 的关系 (其中 $\delta = 0.5$, $\tau = 0.5$, $l = 0.6$, $k = 0.004$)

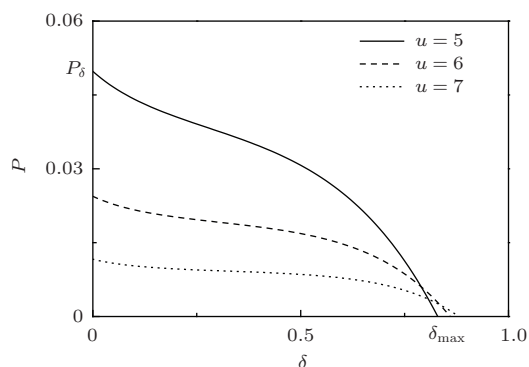


图7 功率 P 与温库边界 δ 的关系 (其中 $\lambda = 0.5$, $\tau = 0.5$, $l = 0.6$, $k = 0.004$)

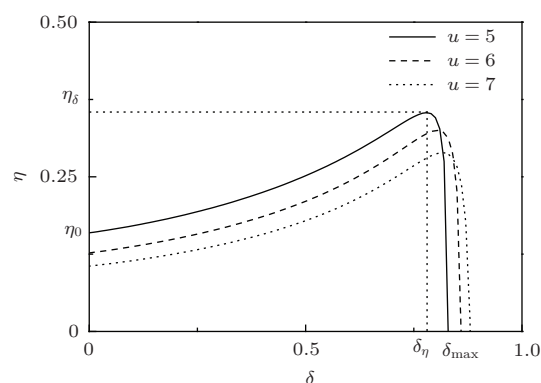


图8 效率 η 与温库边界 δ 的关系 (其中 $\lambda = 0.5$, $\tau = 0.5$, $l = 0.6$, $k = 0.004$)

5 结 论

本文研究了单势垒锯齿势中布朗粒子在外力和空间周期温度场作用下构成的布朗热机的热力学性能, 考虑布朗粒子动能变化以及高、低温库之间热漏引起的热流. 用 Smoluchowski 方程描述粒子在黏性介质中的动力学特性, 推导出高、低温库的热流以及热机功率和效率的解析表达式. 通过数值计算分析势垒高度、外力和温库边界对热机性能的影响. 结果表明: 由于动能变化以及热漏引起的不可逆热流的存在, 布朗热机为不可逆热机, 热机的功率效率特性为一闭合的关系曲线; 热机的功率、效率都与势垒高度、外力呈抛物线型曲线关系, 存在最优的取值, 使得热机的功率或效率达到最大值; 当势垒边界与温库边界重合时, 热机的功率达到最大值, 随着温库边界的改变在一定范围内提高热机的效率, 同时减小了热机的输出功率.

附录

考虑布朗粒子在周期性势场中运动, 其中势场曲线, 温度场曲线由文中 (1), (2) 式给出, 总的等效的锯齿势 $U(x) = U_s(x) + fx$. 布朗粒子的动力学方程为

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\gamma(x)} \left[U'(x) P(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} (T(x) P(x, t)) \right] \right).$$

稳态时的恒定流为

$$J = -\frac{1}{\gamma(x)} [U'(x) P_{ss}(x) + \frac{d}{dx} (T(x) P_{ss}(x))].$$

利用周期性边界条件和归一化条件可求得稳态流为

$$J = \frac{-F}{G_1 G_2 + H F},$$

其中

$$F = e^{\phi(L_1)} - 1,$$

$$G_1 = \int_{-L_1}^{L_1} \frac{e^{-\phi(x)}}{T(x)} dx,$$

$$G_2 = \int_{-L_1}^{L_1} e^{\phi(x)} \gamma(x) dx,$$

$$H = \int_{-L_1}^{L_1} \frac{e^{-\phi(x)}}{T(x)} dx \int_{-L_1}^x e^{\phi(x')} \gamma(x') dx',$$

$$\phi(x) = \int_{-L_1}^x U'(x') dx' / T(x').$$

通过计算进一步求得:

$$F = e^{[(U_0+fL_1)/T_h+\delta(-U_0+fL_2)/T_h+(1-\delta)(-U_0+fL_2)/T_c]}$$

$$-1,$$

$$G_1 = \frac{L_1}{(U_0+fL_1)} [1 - e^{-(U_0+fL_1)/T_h}]$$

$$+ \frac{L_2}{(-U_0+fL_2)} e^{-(U_0+fL_1)/T_h}$$

$$\times [1 - e^{-\delta(-U_0+fL_2)/T_h}]$$

$$+ \frac{L_2}{(-U_0+fL_2)}$$

$$\times e^{-[(U_0+fL_1)/T_h+\delta(-U_0+fL_2)/T_h]}$$

$$\times [1 - e^{-(1-\delta)(-U_0+fL_2)/T_c}],$$

$$G_2 = \frac{\gamma T_h L_1}{(U_0+fL_1)} [e^{(U_0+fL_1)/T_h} - 1]$$

$$+ \frac{\gamma T_h L_2}{(-U_0+fL_2)} e^{(U_0+fL_1)/T_h}$$

$$\times [e^{\delta(-U_0+fL_2)/T_h} - 1]$$

$$+ \frac{\gamma T_c L_2}{(-U_0+fL_2)}$$

$$\times e^{[(U_0+fL_1)/T_h+\delta(-U_0+fL_2)/T_h]}$$

$$\times [e^{(1-\delta)(-U_0+fL_2)/T_c} - 1],$$

$$H = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6,$$

$$t_1 = \frac{\gamma L_1^2}{(U_0+fL_1)}$$

$$\times \left[1 + \frac{T_h}{(U_0+fL_1)} (e^{-(U_0+fL_1)/T_h} - 1) \right],$$

$$t_2 = \frac{-\gamma T_h L_1 L_2}{(U_0+fL_1)(-U_0+fL_2)} e^{-(U_0+fL_1)/T_h}$$

$$\times (e^{(U_0+fL_1)/T_h} - 1)(e^{-\delta(-U_0+fL_2)/T_h} - 1),$$

$$t_3 = \frac{\gamma L_2^2}{(-U_0+fL_2)}$$

$$\times \left[\delta + \frac{T_h}{(-U_0+fL_2)} (e^{-\delta(-U_0+fL_2)/T_h} - 1) \right],$$

$$t_4 = \frac{-\gamma T_h L_1 L_2}{(U_0+fL_1)(-U_0+fL_2)}$$

$$\times e^{-[(U_0+fL_1)/T_h+\delta(-U_0+fL_2)/T_h]}$$

$$\times (e^{(U_0+fL_1)/T_h} - 1)(e^{-(1-\delta)(-U_0+fL_2)/T_c} - 1),$$

$$t_5 = \frac{-\gamma T_h L_2^2}{(-U_0+fL_2)^2} e^{-\delta(-U_0+fL_2)/T_h}$$

$$\times (e^{\delta(-U_0+fL_2)/T_h} - 1)(e^{-(1-\delta)(-U_0+fL_2)/T_c} - 1),$$

$$t_6 = \frac{\gamma L_2^2}{(-U_0+fL_2)} \left[(1 - \delta) \right.$$

$$\left. + \frac{T_c}{(-U_0+fL_2)} (e^{-(1-\delta)(-U_0+fL_2)/T_c} - 1) \right].$$

参考文献

- [1] Hanggi P, Marchesoni F 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 387
- [2] Astumian R D, Bier M 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 1766
- [3] Parrondo J M R, Blanco J M, Cao F J 1998 *Europhys. Lett.* **43** 248
- [4] Ambaye H, Kehr K W 1999 *Physica A* **267** 111
- [5] Feynman R P, Leighton R B, Sands M 1963 *The Feynman Lectures on Physics*. (Vol. I) (Boston: Addison-Wesley) Reading 46.1
- [6] Büttiker M 1987 *Z. Phys. B* **68** 161
- [7] van Kampen N G 1988 *IBM J. Res. Dev.* **32** 107
- [8] Landauer R 1988 *J. Stat. Phys.* **53** 233
- [9] van den Broeck C, Kawai R 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 210601
- [10] Li N, Zhan F, Hanggi P, Li B 2009 *Phys. Rev. E* **80** 011125
- [11] Li N, Hanggi P, Li B 2008 *Europhys. Lett.* **84** 40009
- [12] Asfaw M, Bekele M 2004 *Eur. Phys. J. B* **38** 457
- [13] Asfaw M, Bekele M 2005 *Phys. Rev. E* **72** 056109
- [14] Asfaw M, Bekele M 2007 *Physica A* **384** 346
- [15] Derényi I, Astumian R D 1999 *Phys. Rev. E* **59** R6219
- [16] Zhang Y P, He J Z, He X 2010 *Commun. Theor. Phys.* **54** 857
- [17] Zhang Y P, He J Z, Ouyang H 2010 *Phys. Scr.* **82** 055005
- [18] Zhang Y P, He J Z 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 090502
- [19] Luo X G, Liu N, He J Z 2013 *Phys. Rev. E* **87** 022139
- [20] Hondou T, Sekimoto K 2000 *Phys. Rev. E* **62** 6021
- [21] Ai B Q, Xie H Z, Wen D H 2005 *Eur. Phys. J. B* **48** 101
- [22] Ai B Q, Wang L Q, Liu L G 2006 *Phys. Lett. A* **352** 286
- [23] Ai B Q, Wang X J, Liu G T 2003 *Phys. Rev. E* **68** 061105
- [24] Zhang Y, Lin B H, Chen J C 2006 *Eur. Phys. J. B* **53** 481
- [25] Lin B H, Chen J C 2009 *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 075006
- [26] Ding Z M, Chen L G, Sun F R 2010 *Braz. J. Phys.* **40** 141

- [27] Ding Z M, Chen L G, Sun F R 2010 *Sci. China G: Phys. Mech. Astron.* **40** 16 (in Chinese) [丁泽民, 陈林根, 孙丰瑞 2010 中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学 **40** 16]
- [28] Asfaw M 2008 *Eur. Phys. J. B* **65** 109
- [29] Asfaw M 2014 *Phys. Rev. E* **89** 012143
- [30] Cheng H T, He J Z, Xiao Y L 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 010502 (in Chinese) [程海涛, 何济洲, 肖宇玲 2012 物理学报 **61** 010502]
- [31] Sancho J M, Miguel M S, Dürr D 1982 *J. Stat. Phys.* **28** 291
- [32] Gao T F, Zhang Y, Chen J C 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3279
- [33] Gordon J M, Huleihil M 1992 *J. Appl. Phys.* **72** 829

Influence of the heat reservoir boundary on the performance of Brownian heat engine*

Xiao Yu-Ling He Ji-Zhou[†] Cheng Hai-Tao

(Department of Physics, Nanchang University, Nanchang 330031, China)

(Received 14 May 2014; revised manuscript received 3 June 2014)

Abstract

In this paper we study the thermodynamic performance of a Brownian heat engine, which is driven by temperature difference. Brownian particles move in a periodic single-barrier sawtooth potential under the action of an external load force, and contact an alternating hot and cold reservoir. The kinetic energy change of the Brownian particles and the heat leak between hot and cold reservoir are considered simultaneously. The dynamics of the Brownian particle is governed by the Smoluchowski equation. The expressions for heat flow, power output and efficiency are derived analytically. The influences of the height of barrier, the external load force and the heat reservoir boundary on efficiency and power output are discussed by numerical calculation. It is shown that the Brownian heat engine is irreversible when the irreversible heat flow caused by the kinetic energy change and the heat leak exist. The curve of the power output versus the efficiency is a loop-shaped one. When the barrier boundary coincides with the heat reservoir boundary, the heat engine has a maximum power output. The efficiency of the heat engine is enhanced, but the power output is reduced when the heat reservoir boundary is changed.

Keywords: Brownian heat engine, heat leak, thermodynamic performance, irreversibility

PACS: 05.40.-a, 05.70.Ln, 87.10.-e

DOI: 10.7498/aps.63.200501

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11365015).

[†] Corresponding author. E-mail: hjzhou@ncu.edu.cn