

# 非均齐超网络中标度律的涌现 ——富者愈富导致幂律分布吗?\*

郭进利<sup>1)2)†</sup>

1) (上海理工大学管理学院, 上海 200093)

2) (上海理工大学超网络研究中心, 上海 200093)

(2014年4月2日收到; 2014年6月13日收到修改稿)

建立非线性择优连接非均齐超网络演化模型, 研究非均齐超网络演化机制和拓朴性质. 使用 Poisson 过程理论和连续化方法对模型进行分析, 给出超网络超度的特征方程. 利用超度特征方程不仅证明网络稳态平均超度分布存在, 而且获得超度分布的解析表达式. 分析表明这个网络具有“富者愈富”现象. 仿真实验和理论分析相符合. 随着网络规模的增大, 这个动态演化的非均齐超网络的超度分布表现出拉直指数分布的特征, 而不一定是幂律分布. 结果表明“富者愈富”不一定导致幂律分布.

**关键词:** 复杂网络, 无标度网络, 超图, 超网络

**PACS:** 89.75.Hc, 02.50.-r, 89.75.-k, 89.65.-s

**DOI:** 10.7498/aps.63.208901

## 1 引言

自 20 世纪末 Watts 和 Strogatz 提出小世界模型、Barabási 和 Albert (BA) 提出无标度网络以来, 学术界掀起了对复杂网络的研究热潮. 复杂网络作为一种可以有效刻画复杂的自然、社会系统的工具, 在过去十几年中备受关注, 成为物理学、生物学、计算机科学、社会学、经济学及管理学等学科关注的前沿研究热点. 许多学者研究了网络的静态拓朴属性, 并在此基础上构造了很多网络模型. 在复杂网络中用节点代表实际系统中不同的个体, 用连边代表节点之间的关系, 一条连边只能关联 2 个节点. 在计算机领域, 如果把多机系统中的处理机看作节点, 处理机的集合作为超网络的节点集, 把总线集作为超网络的边集, 于是一个多机系统就抽象为一个超网络<sup>[1]</sup>. 现实世界中有很多超网络演化现象, 比如, 供应链合作超网络、科学家合作超网络, 以及演员合作超网络. 现实网络多为综合网络, 而以前的研究方式多限于研究节点与边同质的网

络, 无法完全刻画现实网络的特征<sup>[2]</sup>. 如供应链网络<sup>[2]</sup>: 表示生产商、消费者等的节点与表示实体贸易、电子商务等的边皆不同质. 因此, 对综合网络的研究意义更大、影响更深远. 超网络不仅可以完美刻画现实网络的特征, 且本身为由多网络组成的综合网络. 20 世纪 80 年代, 信息科学家就发现超图与数据库密切相关. 随着大数据时代的到来, 超网络研究也逐渐受到重视. 网络大数据是指“人、机、物”三元世界在网络空间中交互、融合所产生并在互联网上可获得的大数据<sup>[3]</sup>. 网络大数据的规模和复杂度的增长超出了硬件能力增长的摩尔定律, 研究大规模系统数据建模涉及到复杂网络、超网络和复杂科学等领域. 在大数据基础上产生数据驱动, 科学范式开始从模型驱动向数据驱动发生转变<sup>[4]</sup>. 文献<sup>[5—8]</sup>对工业过程控制系统中性能参数的数据驱动估计方法进行了综述和研究. 数据驱动方法必然涉及大数据, 人们深度挖掘和充分利用大数据的价值将会创造巨大机遇. 因此, 迫切需要探讨大数据的科学问题, 发现网络大数据的共性规律, 研究大数

\* 沪江基金 (批准号: A14006) 和上海市一流学科建设项目 (批准号: S1201YLXK) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: [phd5816@163.com](mailto:phd5816@163.com)

据定性、定量分析的基础理论与基本方法. 王元卓等<sup>[3]</sup>分析了网络大数据的现状, 并对大数据科学、数据计算需要的新模式与新范式、新型的IT基础架构和数据的安全与隐私等方面的发展趋势进行了展望. 方锦清<sup>[9]</sup>在大数据背景下针对“网络科学与工程”的最新前沿课题——超网络, 讨论了若干典型的超网络及其主要特点和相关课题初步进展, 并提出了若干挑战性课题和研究机遇.

近年来, 有文献研究超网络中超链接预测问题<sup>[10]</sup>. 最近, Kim等<sup>[11]</sup>利用演化超图预测癌症的临床结果. 然而针对超网络动态演化模型的构建方法研究文献比较少. 文献<sup>[12]</sup>提出以超网络模型描述维基内容本体的观点, 对网络的重要拓扑属性进行了分析, 但文献<sup>[12]</sup>中的模型不是超网络模型, 而是复杂网络文献<sup>[13]</sup>中论坛网络演化模型的特例. Zhang和Liu<sup>[14]</sup>建立了一种基于用户背景知识和对象、标签双重优先连接机制的超图增长模型; 文献<sup>[15]</sup>用超图理论构建了科研合作超网络演化模型. Wang等<sup>[16]</sup>给出了一种基于超图的超网络动态演化模型, 该模型采用增长和优先连接机制逐步生成超网络, 每次新增加若干个节点, 将这若干个新节点和网络中已有的1个节点结合生成超边, 且每次只增加一条超边. 胡枫等<sup>[17]</sup>给出了另一种基于超图的超网络动态演化模型, 该模型增长和优先连接机制与Wang等的模型一样, 每次新增加1个节点, 将这个新节点和网络中已有的若干个节点结合生成超边, 且每次只增加一条超边. 文献<sup>[18]</sup>中虽然考虑了每个时间步增加若干条超边, 但超网络增长与文献<sup>[17]</sup>相同. 文献<sup>[19]</sup>研究的局域世界超网络演化模型的增长机制也与文献<sup>[17]</sup>中超网络增长机制相同. 文献<sup>[20]</sup>在超网络中建立了一个将文献<sup>[16—18]</sup>中的均齐超网络模型及复杂网络中BA模型的统一模型. 上述超网络模型共同特点之一是均齐超网络演化模型, 但是, 实际超网络大多是非均齐的. 本文的目的之一是建立非均齐超网络演化模型.

上述超网络演化模型的另一个共同特点是择优概率与被选节点的超度成正比, 即线性择优, 网络演化过程体现出“富者愈富”现象, 超度服从幂律分布. “富者愈富”是自然界、物理学、经济学、社会学以及管理科学中的常见现象. 一般情况, 人们认为这种现象导致幂律分布. “富者愈富”一定能导致幂律分布吗? 加拿大和美国的电力网络服从指数分布, 科学家合作网的度分布介于指数和幂律之间, 而它们更适合用超网络刻画. 是否有刻画超度

分布介于指数和幂律之间的超网络模型? 本文的主要目的之二是建立非线性择优机制的超网络演化模型, 证明这种机制演化过程体现出“富者愈富”现象, 但超度分布服从拉直指数分布, 而不一定是幂律分布.

本文组织如下: 在下一节中介绍超图和基于网络的超网络的概念, 给出基于超图的超网络数学定义; 在第三节中介绍无标度超网络演化模型, 建立非线性择优非均齐超网络演化模型; 在第四节中利用Poisson过程理论和连续化方法对模型进行分析, 给出超网络超度的特征方程. 获得网络稳态平均超度分布的解析表达式, 证明这种机制演化过程体现出“富者愈富”现象, 超度分布服从拉直指数分布, 而不是幂律分布; 这个方法是能有效地处理连续增长网络, 并避免了平均场方法随意假设网络节点到达时间服从均匀分布导致的逻辑矛盾, 也避免了主方程方法中稳态平均度分布存在性的假设; 第四节对模型进行计算机仿真实验, 模拟表明: 这个超网络演化模型的解析方法是合理可行的; 第五节是对全文的总结.

## 2 超网络概念

超网络分为基于网络的超网络和基于图的超网络. 基于网络的超网络 (supernetworks) 是指由网络组成的网络, 其概念是1985年Denning给出的<sup>[21]</sup>. 明确提出这类超网络的是美国科学家Nagurney等<sup>[22,23]</sup>. 规模巨大、连接复杂的网络, 或网络中嵌套网络的大型网络称为超网络. Nagurney等在处理物流网络、资金网络和信息网络相交的问题时, 将“高于而又超于现存网络”的网络, 用超网络来描述. “高于而又超于”即网络嵌套有网络, 且存在虚拟的节点、边和流等的网络<sup>[2,23]</sup>.

另一种超网络是基于超图 (hypergraph) 的超网络 (hypernetwork). 超图的概念是Berge于1970年提出的<sup>[24]</sup>, 图的每一条边只连接两个节点, 超图中的边可以连接两个以上的节点, 所以称之为超边. Estrada等<sup>[25]</sup>认为, 凡是可以超图表示的网络就是超网络. 数学上超图的定义为<sup>[2,24]</sup>: 设 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 是一个有限集,  $E_i = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}\} (v_{i_j} \in V, j = 1, 2, \dots, k)$ , 记 $E^h = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ , 则称二元关系 $H = (V, E^h)$ 为超图, 简记为 $(V, E^h)$ 或 $H$ . 其中 $V$ 的元素称为超图的节点,  $E^h$ 中的元素称为超图的超边. 如果两个节点属于同一条超边, 则称这两个节点邻

接; 如果两条超边的交集不空, 称为这两条超边邻接. 如果  $|V|$  和  $|E^h|$  均有限, 则称  $H$  为有限超图. 如果  $|E_i| = u (i = 1, 2, \dots, m)$  则称超图  $H = (V, E^h)$  为  $u$ -均齐超图. 如果  $u = 2$ , 则超图退化为图, 有了上述超图的定义, 我们就可以在数学上给出基于超图的超网络定义. 假设  $\Omega = \{(V, E^h) | (V, E^h) \text{ 是有限超图}\}$ ,  $G^h$  是从  $[0, +\infty)$  到  $\Omega$  的映射, 则对于任意给定的  $t \geq 0$ ,  $G^h(t) = (V(t), E^h(t))$  是一个有限超图,  $N^*(t)$  表示到时刻  $t$  超图已发生变化的总次数. 如果  $\{N^*(t), t \geq 0\}$  是一个随机过程, 对于充分大的时间  $t$ , 我们称  $G^h(t) = (V(t), E^h(t))$  是一个超网络; 对于超网络  $G^h(t) = (V(t), E^h(t))$ , 如果存在  $T > 0$ , 使得当  $t \geq T$  时,  $(V(t), E^h(t))$  是  $u$ -均齐超图, 我们则称  $G^h(t) = (V(t), E^h(t))$  是一个  $u$ -均齐超网络. 节点  $v_i$  的超度定义为包含该节点的超边个数, 记为  $h_i$ . 超边的度是指超边所邻接的其他超边个数. 超边的超度是指超边所包含的节点的个数.

$$\text{记 } N(t) = |V(t)|, \quad M(t) = |E^h(t)|,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[N(t)] = N(\text{无穷或有限}),$$

其中,  $E[N(t)]$  表示超网络在时刻  $t$  的平均节点数. 超网络是复杂网络的推广. 对于任何给定的有限超图  $(V, E^h)$ , 任意给定的  $t \geq 0$ , 定义  $G^h(t) = (V, E^h)$ , 由此可见, 超网络也是超图的推广.

### 3 模型描述

#### 3.1 均齐超网络演化模型

文献 [16] 中建立了每次新增加  $m_1$  个节点, 将这  $m_1$  个新节点和网络中已有的 1 个节点结合生成超边的幂律分布均齐超网络演化模型, 文献 [17, 18] 中建立了每次新增加 1 个节点, 将这个新节点和网络中已有的  $m_2$  个节点结合生成超边的幂律分布均齐超网络演化模型. 文献 [20] 中给出了文献 [16—18] 中的模型及 BA 模型的统一无标度均齐超网络演化模型: 1) 网络开始带有较少的节点数 ( $m_0$ ), 以及一条包含这  $m_0$  个节点的超边, 节点的

到达过程是具有常数率  $\lambda$  的 Poisson 过程; 在  $t$  时刻, 当一批新节点 ( $m_1$  个) 进入网络时, 这  $m_1$  个新节点与网络中已有的  $m_2$  个老节点围成一条超边, 共围成  $m$  条超边, 且  $mm_2 \leq m_0$ , 不出现重超边; 2) 当选择超网络中已有的节点  $i$  与新节点连接时, 选取节点  $i$  的概率  $W$  等于节点  $i$  的超度  $h_i$  与网络中的已有节点超度总和之比, 即满足

$$W(h_i) = \frac{h_i}{\sum_j h_j}, \quad (1)$$

这个超网络演化模型的稳态平均超度分布为 [20]

$$P(k) \approx \frac{1}{m} \left( \frac{m_1}{m_2} + 1 \right) \left( \frac{m}{k} \right)^{\frac{m_1}{m_2} + 2},$$

度分布指数为  $\gamma = \frac{m_1}{m_2} + 2$ .

#### 3.2 非均齐超网络演化模型

现存超网络文献中演化模型的共同特点是: 超网络是均齐超网络, 且线性择优 [16—20], 超度分布是幂律分布. 但是, 实际超网络是非均齐的, 许多合作网络表现出拉直指数现象. 在复杂网络中 Krapivsky 等非线性择优模型 [26] 构建思想的启发下, 我们给出拉直指数分布非均齐超网络演化模型: 1) 网络增长, 网络开始带有较少的节点数 ( $m_0$ ), 以及一条包含这些节点的超边, 节点的到达过程是具有常数率  $\lambda$  的 Poisson 过程  $N(t)$ ; 在  $t$  时刻, 当第  $N(t)$  批新节点到达网络时, 从服从分布  $F(\eta)$  的正整数中抽取  $\eta_{N(t)}$ , 这  $\eta_{N(t)}$  个新节点与网络中已有的  $m_2$  个老节点围成一条超边, 共围成  $m$  条超边, 且不出现重超边,  $mm_2 \leq m_0$ ; 2) 择优连接, 在  $t$  时刻, 当选择网络中第  $i$  批到达的第  $j$  个节点与新节点连接时, 选择这个节点的概率  $W$  与它的超度  $h_j(t, t_i)$  的  $\alpha$  次方成正比, 即满足

$$W(h_j(t, t_i)) = \frac{(h_j(t, t_i))^\alpha}{\sum_{ij} (h_j(t, t_i))^\alpha}, \quad (2)$$

其中,  $t_i$  表示第  $i$  批节点进入网络的时刻,  $0 < \alpha < 1$ ,  $m_1 = \int \eta dF(\eta) < +\infty$ .

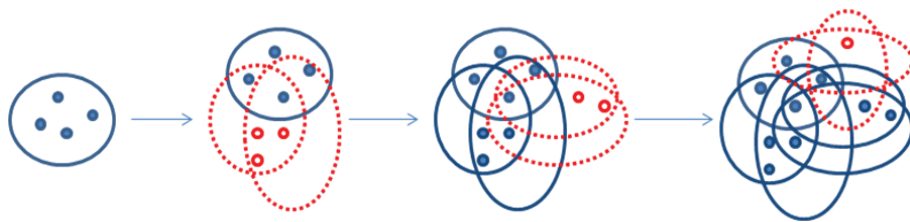


图1 非均齐超网络模型演化过程示意图

### 4 模型分析与仿真

记  $N(t) = \{ \text{在时刻 } t \text{ 网络的节点数} \} - m_0$ ,  $\mu(t) = E[N(t)]$ . 因为节点的到达过程  $N(t)$  是具有常数率  $\lambda$  的 Poisson 过程, 由 Poisson 过程理论我们知道,  $E[N(t)] = \lambda t$ .  $h_j(t, t_i)$  表示第  $i$  批到达的第  $j$  个节点在时刻  $t$  的超度. 假定  $h_j(t, t_i)$  是连续实值变量, 由模型的假设条件及连续化方法我们知道  $h_j(t, t_i)$  满足动态方程

$$\frac{\partial h_j(t, t_i)}{\partial t} = \lambda m m_2 \frac{h_j(t, t_i)^\alpha}{\sum_{ij} (h_j(t, t_i))^\alpha}, \quad (3)$$

上式右端的因子  $m_2$  是因为第  $i$  批到达的第  $j$  个节点可能被第 1, 第 2,  $\dots$ , 第  $m_2$  次依次选中. 记

$$\mu = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{m m_1 \lambda t} \sum_{ij} (h_j(t, t_i))^\alpha, \quad (4)$$

由于

$$\begin{aligned} & \sum_{ij} (h_j(t, t_i)) \\ & \approx \sum_{i=0}^{N(t)} m(\eta_i + m_2) \approx m(m_1 + m_2)\lambda t, \end{aligned}$$

因此,

$$\frac{1}{m m_1} \leq \mu \leq 1 + \frac{m_2}{m_1}. \quad (5)$$

对于充分大的  $t$

$$\sum_{ij} (h_j(t, t_i))^\alpha \approx m m_1 \lambda t \mu. \quad (6)$$

将方程 (6) 代入方程 (3), 有

$$\frac{\partial h_j(t, t_i)}{\partial t} = m_2 \frac{h_j(t, t_i)^\alpha}{m_1 \mu t}. \quad (7)$$

注意  $h_j(t_i, t_i) = m$ , 解方程 (7), 得

$$h_j(t, t_i) = \left[ \frac{m_2(1-\alpha)}{m_1 \mu} \ln \left( \frac{t}{t_i} \right) + m^{1-\alpha} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (8)$$

将方程 (8) 代入方程 (6),  $\mu$  满足如下方程:

$$\begin{aligned} & m \left( \frac{m_1}{m_2(1-\alpha)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \mu^{\frac{1}{1-\alpha}} e^{-\frac{m_1 m^{1-\alpha}}{m_2(1-\alpha)} \mu} \\ & = \Gamma \left( \frac{1}{1-\alpha}, \frac{m_1 m^{1-\alpha} \mu}{m_2(1-\alpha)} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

其中,  $\Gamma(v, z)$  是不完全 Gamma 函数. 方程 (9) 称为这个超网络超度的特征方程. 从 (8) 式, 有

$$\begin{aligned} & P\{h_j(t, t_i) \geq k\} \\ & = P\left\{t_i \leq e^{-\frac{m_1 \mu}{m_2(1-\alpha)}(k^{1-\alpha} - m^{1-\alpha})} t\right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

由 Poisson 过程理论, 我们知道节点到达时间  $t_i$  服从参数为  $i$  与  $\lambda$  的 Gamma 分布. 因此,

$$\begin{aligned} & P\left\{t_i \leq e^{-\frac{m_1 \mu}{m_2(1-\alpha)}(k^{1-\alpha} - m^{1-\alpha})} t\right\} \\ & = 1 - e^{-\lambda t} e^{-\frac{m_1 \mu}{m_2(1-\alpha)}(k^{1-\alpha} - m^{1-\alpha})} \\ & \quad \times \sum_{l=0}^{i-1} \frac{1}{l!} \left( \lambda t e^{-\frac{m_1 \mu}{m_2(1-\alpha)}(k^{1-\alpha} - m^{1-\alpha})} \right)^l. \end{aligned} \quad (11)$$

将 (11) 式代入 (10) 式, 得

$$\begin{aligned} & P\{h_j(t, t_i) \geq k\} \\ & = 1 - e^{-\lambda t} e^{-\frac{m_1 \mu}{m_2(1-\alpha)}(k^{1-\alpha} - m^{1-\alpha})} \\ & \quad \times \sum_{l=0}^{i-1} \frac{1}{l!} \left( \lambda t e^{-\frac{m_1 \mu}{m_2(1-\alpha)}(k^{1-\alpha} - m^{1-\alpha})} \right)^l. \end{aligned} \quad (12)$$

对于任意给定的  $k \geq m, i, n, t > 0$  和  $t_i < t_n \leq t$ , 从方程 (12), 有

$$\begin{aligned} & P\{h_j(t, t_i) \geq k\} \\ & = 1 - e^{-\lambda t} e^{-\frac{m_1 \mu}{m_2(1-\alpha)}(k^{1-\alpha} - m^{1-\alpha})} \\ & \quad \times \sum_{l=0}^{i-1} \frac{1}{l!} \left( \lambda t e^{-\frac{m_1 \mu}{m_2(1-\alpha)}(k^{1-\alpha} - m^{1-\alpha})} \right)^l \\ & > 1 - e^{-\lambda t} e^{-\frac{m_1 \mu}{m_2(1-\alpha)}(k^{1-\alpha} - m^{1-\alpha})} \\ & \quad \times \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{l!} \left( \lambda t e^{-\frac{m_1 \mu}{m_2(1-\alpha)}(k^{1-\alpha} - m^{1-\alpha})} \right)^l \\ & = P\{h_j(t, t_n) \geq k\}, \end{aligned} \quad (13)$$

不等式 (13) 表明网络的超度表现出“富者愈富”现象.

下面证明非均齐超网络演化模型的稳态平均超度分布存在. 由 (12) 式, 有

$$\begin{aligned} & P\{h_j(t, t_i) = k\} \\ & \approx \lambda t \frac{m_1 \mu}{m_2} e^{-\frac{m_1 \mu}{m_2(1-\alpha)}(k^{1-\alpha} - m^{1-\alpha})} \\ & \quad \times k^{-\alpha} \frac{\lambda t e^{-\frac{m_1 \mu}{m_2(1-\alpha)}(k^{1-\alpha} - m^{1-\alpha})}}{(i-1)!} \\ & \quad \times e^{-\lambda t} e^{-\frac{m_1 \mu}{m_2(1-\alpha)}(k^{1-\alpha} - m^{1-\alpha})}, \end{aligned} \quad (14)$$

由 (14) 式可知, 非均齐超网络演化模型的稳态平均超度分布为

$$P(k) \approx \frac{m_1}{m_2} \mu e^{-\frac{m_1 \mu}{m_2(1-\alpha)}(k^{1-\alpha} - m^{1-\alpha})} k^{-\alpha}, \quad (15)$$

方程 (15) 是拉直指数分布, 也称广延指数分布, 属于一类威布尔分布, 它是从非常接近于幂函数到非常接近于指数函数这一个广阔范围内的一类分布.

由于当  $\alpha = 0$  时, 从方程 (4) 可知,  $\mu = \frac{1}{mm_1}$ , 从方程 (15), 当  $\alpha \rightarrow 0$  时, 我们获得如下指数分布

$$P(k) \approx \frac{1}{mm_2} e^{-\frac{1}{m_2}(k-m)}. \quad (16)$$

由于当  $\alpha = 1$  时, 从方程 (4) 可知,  $\mu = 1 + \frac{m_2}{m_1}$ , 从方程 (15), 当  $\alpha \rightarrow 1$  时, 获得如下幂律分布

$$P(k) \approx \frac{1}{m} \left( \frac{m_1}{m_2} + 1 \right) \left( \frac{m}{k} \right)^{\frac{m_1}{m_2} + 2}. \quad (17)$$

当  $0 < \alpha < 1$  时, 从不等 (13) 可知, 拉直指数分布非均齐超网络的超度表现出“富者愈富”现象, 但从方程 (15) 可见这个网络的超度分布不是幂律分布. 由此可见, “富者愈富”并不一定能诱导出幂律分布.

我们取  $m_0 = 10$ ,  $m = 3$ ,  $m_2 = 3$ , 网络规模为  $N = 120000$ , 分别对拉直指数分布的非均齐超网络模型进行计算机仿真. 对超度分布进行模拟, 双对数坐标下的模拟图如图 2 和图 3, 可见, 我们理论预测的超度分布与模拟结果符合得较好.

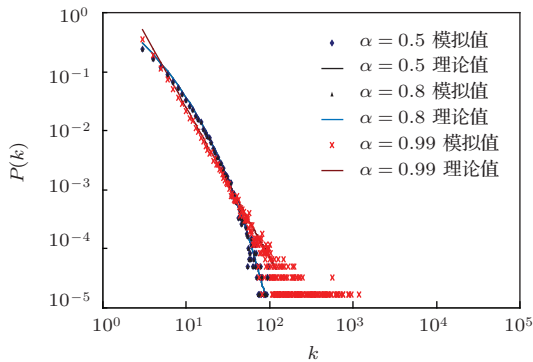


图2 非均齐超网络演化模型模拟图 新节点数在 1—3 中随机选取

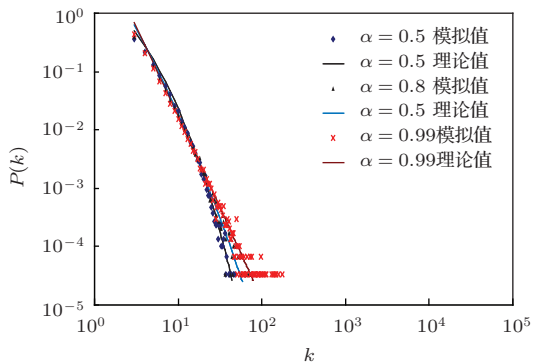


图3 非均齐超网络演化模型模拟图 新节点数在 1—7 中随机选取

## 5 结 论

本文提出的拉直指数分布超网络模型是连续时间增加的非均齐超网络演化模型, 体现出了超网络中拉直指数分布的涌现. 不等式 (13) 表明这个超网络节点的超度表现出“富者愈富”现象, 方程 (15) 表明网络的稳态平均超度分布是渐近时间无关的 (且与系统规模  $N = \lambda t + m_0$  无关), 尽管网络持续增长, 但是网络节点平均超度分布达到一个稳定状态, 表现出拉直指数分布, 这个分布表现出将指数分布拉直和将幂律分布弯曲的中间形状, 这也是我们将 (15) 式称为拉直指数分布的因素. 本文结果表明“富者愈富”并不一定能诱导出幂律分布. 但是, 当模型线性择优连接时, 这个非均齐超网络涌现出无标度特征.

## 参考文献

- [1] Wang Z P, Wang Z T 2008 *Hypernetwork Theory and Application* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [王志平, 王众托 2008 超网络理论及其应用 (北京: 科学出版社)]
- [2] Qi Y H, Guo J L 2013 *J. Univ. Shanghai Sci. Technol.* **35** 227 (in Chinese) [漆玉虎, 郭进利 2013 上海理工大学学报 **35** 227]
- [3] Wang Y Z, Jin X L, Cheng X Q 2013 *Chin. J. Comput.* **36** 1125 (in Chinese) [王元卓, 靳小龙, 程学旗 2013 计算机学报 **36** 1125]
- [4] Guo H D, Wang L Z, Chen F, Liang D 2014 *Chin. Sci. Bull.* **59** 1047 (in Chinese) [郭华东, 王力哲, 陈方, 梁栋 2014 科学通报 **59** 1047]
- [5] Yin S, Luo H, Ding S X 2014 *IEEE Trans. Ind. Electron.* **61** 2402
- [6] Yin S, Ding S X, Sari A H A, Hao H Y 2013 *Int. J. Syst. Sci.* **44** 1366
- [7] Yin S, Wang G, Karimi H R 2014 *Mechatronics* **24** 289
- [8] Yin S, Yang X B, Karimi H R 2012 *Math. Problems in Engineering* **2012** 1
- [9] Fang J Q 2013 *Chin. J. Nature* **35** 345 (in Chinese) [方锦清 2013 自然杂志 **35** 345]
- [10] Fürnkranz J, Hüllermeier E, Higuchi T 2013 *Lecture Notes in Computer Science* (Verlag Berlin Heidelberg: Springer) pp324–339
- [11] Kim S J, Ha J H, Zhang B T 2014 *J. Biomed. Inform.* **49** 101
- [12] Ni Z J, Rong L L, Liu Q 2013 *J. Manag. Sci. China* **16** 68 (in Chinese) [倪子建, 荣莉莉, 刘泉 2013 管理科学学报 **16** 68]
- [13] Guo J L 2010 *An Evolution Model for Forum Networks* <http://wenku.baidu.com/> (in Chinese) [郭进利 2010 论坛网络演化模型 <http://wenku.baidu.com/>]
- [14] Zhang Z K, Liu C 2010 *J. Stat. Mech.* P10005

- [15] Hu F, Zhao H X, He J B, Li F X, Li S L, Zhang Z K 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 198901 (in Chinese) [胡枫, 赵海兴, 何佳倍, 李发旭, 李淑玲, 张子柯 2013 物理学报 **62** 198901]
- [16] Wang J W, Rong L L, Deng Q H, Zhang J Y 2010 *Eur. Phys. J. B* **77** 493
- [17] Hu F, Zhao H X, Ma X J 2013 *Sci. China G: Phys. Mech. Astron.* **43** 16 (in Chinese) [胡枫, 赵海兴, 马秀娟 2013 中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学 **43** 16]
- [18] Wu Z Y, Duan J Q, Fu X C 2014 *Appl. Math. Model.* **38** 2961
- [19] Yang G Y, Liu J G 2014 *Chin. Phys. B* **23** 018901
- [20] Guo J L, Zhu X Y 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 090207 (in Chinese) [郭进利, 祝昕昀 2014 物理学报 **63** 090207]
- [21] Denning P J 1985 *American Scientist* **73** 127
- [22] Nagurney A, Dong J 2002 *Supernetworks: Decision-Making for the Information Age* (Cheotenham: Edward Elgar Publishers)
- [23] Wang Z T 2011 *J. Univ. Shanghai Sci. Technol.* **33** 229 (in Chinese) [王众托 2011 上海理工大学学报 **33** 229]
- [24] Berge C 1973 *Graphs and Hypergraphs* (2nd Ed.) (New York: Elsevier) 389
- [25] Estrada E, Juan A, Rodríguez V 2006 *Physica A* **364** 581
- [26] Krapivsky P L, Redner S, Leyvraz F 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 4629

# Emergence of scaling in non-uniform hypernetworks —does “the rich get richer” lead to a power-law distribution?\*

Guo Jin-Li<sup>1)2)†</sup>

1) (Business School, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

2) (Center for Supernetwork Research, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

( Received 2 April 2014; revised manuscript received 13 June 2014 )

## Abstract

In this paper, we propose a non-uniform hypernetwork model with a nonlinear preferential attachment, and study the evolving mechanism and topological properties of the hypernetwork. We analyze the model by using a Poisson process theory and a continuous technique, and give a characteristic equation of hyperdegrees. We obtain the stationary average hyperdegree distribution of the hypernetwork by the characteristic equation. The analytical result shows that the hypernetwork has a phenomenon of “the rich get richer”, and it accords well with the simulation. It is shown in this paper that the hyperdegree distribution of the dynamic model exhibits a stretched exponential distribution with the increase of the hypernetwork size. It proves that “the rich get richer” does not necessarily induce a power-law distribution.

**Keywords:** complex network, non-uniform hypernetwork, hypergraph, scale-free network

**PACS:** 89.75.Hc, 02.50.-r, 89.75.-k, 89.65.-s

**DOI:** 10.7498/aps.63.208901

\* Project supported by the Hujiang Foundation of China (Grant No. A14006) and the Shanghai First-class Academic Discipline Project, China (Grant No. S1201YLXK).

† Corresponding author. E-mail: [phd5816@163.com](mailto:phd5816@163.com)