

# 太阳强迫厄尔尼诺/南方涛动充电振子模型的 Hopf 分岔与混沌\*

张妩帆<sup>†</sup> 赵强

(北京大学物理学院, 北京 100871)

(2014年1月15日收到; 2014年2月26日收到修改稿)

本文研究了一类太阳强迫的厄尔尼诺/南方涛动(ENSO)充电振子数理模型, 通过数学变换将此 ENSO 振子方程组变换为有周期强迫项的 van der Pol-Duffing 方程, 利用谐波平衡法定性分析得到此 ENSO 系统发生 Hopf 分岔的条件并做简单数值模拟, 结果发现随着强迫作用增大, 11 年周期太阳循环强迫的 ENSO 系统经历准周期、倍频锁相到混沌的过程.

**关键词:** 厄尔尼诺/南方涛动, van der Pol-Duffing 方程, Hopf 分岔, 混沌

**PACS:** 02.30.Hq, 92.10.am, 05.45.-a

**DOI:** 10.7498/aps.63.210201

## 1 引言

厄尔尼诺/南方涛动(ENSO)是赤道耦合海气系统中最主要的年际变化模态,也是全球气候系统中季节到年际尺度的主要预测因子<sup>[1]</sup>.它的影响范围不仅关系到全球气候的变化,还与生态系统、社会经济等密切相关<sup>[1-4]</sup>.相对于复杂的全球海-气耦合数值模式,通过简化海气非线性相互作用物理过程所得到的振子概念模型能够更容易地刻画海气耦合运动本质和物理机理,从而更成功地模拟 ENSO 的某些重要物理现象.因此许多学者提出研究 ENSO 的各种振子形式的动力系统模型,例如延迟振子,西太平洋振子,充电-放电振子以及平流-反射等理论来探索 ENSO 动力学机理<sup>[5,6]</sup>.许多研究发现 ENSO 系统中存在着周期振荡<sup>[7-10]</sup>,然而外在强迫因素的存在会使 ENSO 现象变得非常复杂,受外强迫的 ENSO 振子模型经常表现出准周期、混沌等现象<sup>[11-13]</sup>.近年来研究表明,太阳循环辐射强迫作用对于气候系统变化(包括 ENSO)都有重要影响<sup>[14-18]</sup>,例如 White 和 Liu 在耦合海气

环流模式数值模拟和概念模型中均发现了 11 年周期太阳循环强迫下 ENSO 发生锁相现象<sup>[19]</sup>.另一方面,我们也注意到 van der Pol 振子作为概念模型已应用于耦合海冰模式、模拟高分辨率的冰芯资料、古气候动力学理论等研究<sup>[20-22]</sup>.在本文中,我们将用一个受到周期强迫的 van der Pol-Duffing 振子来研究 11 年周期太阳强迫对 ENSO 的影响.基于 Jin<sup>[23]</sup>所提出的 ENSO 充电振子理论,在考虑有外源强迫作用下该 ENSO 振子模型的动力学控制方程组可写成如下形式:

$$\frac{dT}{dt} = CT + Dh - \varepsilon T^3 + F_1, \quad (1a)$$

$$\frac{dh}{dt} = -ET - R_h h + F_2, \quad (1b)$$

其中  $T$  表示赤道东太平洋的海表温度(SST)距平,  $h$  表示赤道西太平洋的温跃层厚度距平.上面的模型有效地描述了海表温度距平和温跃层厚度距平间的非线性相互作用.  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $R_h$  和  $\varepsilon$  表示正的模式参数,有关它们的详细定义和物理意义参见文献<sup>[6, 8, 13, 23, 24]</sup>.在这里我们增加了  $F_1$  和  $F_2$  来代表外源强迫项.

\* 国家自然科学基金(批准号:40975028 和 41175052)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: zwf@pku.edu.cn

## 2 van der Pol-Duffing 方程

首先, 将 ENSO 振子模型 (1) 改写为

$$\left(\frac{d}{dt} - C + \varepsilon T^2\right) T = Dh + F_1, \quad (2a)$$

$$\left(\frac{d}{dt} + R_h\right) h = -ET + F_2. \quad (2b)$$

对 (2a) 式做  $\left(\frac{d}{dt} + R_h\right)$  运算, 并利用 (2b) 式消去  $h$ , 并令  $\mu = C - R_h > 0$ ,  $T = \sqrt{\frac{\mu}{3}}x$ , 于是我们得到了以下受到外强迫  $F$  作用的 van der Pol-Duffing 方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1-x^2)\frac{dx}{dt} - \gamma x + \eta x^3 = F, \quad (3)$$

其中

$$\gamma = CR_h - DE > 0, \quad \eta = \frac{\mu \varepsilon R_h}{3} > 0, \quad (4)$$

$F$  为  $F_1$  和  $F_2$  的函数, 代表总的综合外源强迫作用. 为了简化起见并不失一般性, 令  $\gamma = \eta = 1$ ; 考虑总的外源强迫作用为 11 年周期太阳循环强迫 [19], 即假设  $F = f \cos(\Omega t)$ , 其中  $\Omega$  是强迫频率,  $f$  为强迫振幅. 于是方程 (3) 转化为包含周期强迫项的 van der Pol-Duffing 方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1-x^2)\frac{dx}{dt} - x + x^3 - f \cos(\Omega t) = 0. \quad (5)$$

## 3 定性分析与数值模拟

我们通过谐波平衡法 [25] 来得到该 ENSO 系统发生 Hopf 分岔的条件. 方程 (6) 的解可以被近似假设成

$$x = m(t) \cos \Omega t - n(t) \sin \Omega t, \quad (6)$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\mu}{4} - \frac{\mu}{16}(3m^2 + n^2) - \frac{3mn}{4\Omega} & -\frac{\mu}{8}mn + \frac{\Omega^2 + 1}{2\Omega} - \frac{3}{8\Omega}(m^2 + 3n^2) \\ -\frac{\mu}{8}mn - \frac{\Omega^2 + 1}{2\Omega} + \frac{3}{8\Omega}(3m^2 + n^2) & \frac{\mu}{4} - \frac{\mu}{16}(m^2 + 3n^2) + \frac{3mn}{4\Omega} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

平衡态的特征方程为

$$\lambda^2 - \left(\frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{4}a^2\right)\lambda + M = 0, \quad (12)$$

其中

$$M = \left[\frac{\mu}{4} - \frac{\mu}{16}(3m^2 + n^2) - \frac{3mn}{4\Omega}\right]$$

其中  $m(t)$  和  $n(t)$  都是  $t$  的慢变函数, 于是有  $\frac{d^2m(t)}{dt^2} \cong 0$  和  $\frac{d^2n(t)}{dt^2} \cong 0$ . 从方程 (7) 可以导出

$$\frac{dx}{dt} = (-\Omega m - n') \sin \Omega t + (-\Omega n + m') \cos \Omega t, \quad (7a)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (\Omega^2 n - 2\Omega m') \sin \Omega t + (-\Omega^2 m - 2\Omega n') \cos \Omega t, \quad (7b)$$

其中  $m' = \frac{dm}{dt}$ ,  $n' = \frac{dn}{dt}$ . 将方程 (6) 和方程 (7) 代入到方程 (5), 消去高阶谐波项后, 方程两边的  $\sin \Omega t$ ,  $\cos \Omega t$  的系数应对应相等, 得到

$$m' = \frac{\mu}{4}m - \frac{\mu}{16}m(m^2 + n^2) + \frac{\Omega^2 + 1}{2\Omega}n - \frac{3}{8\Omega}n(m^2 + n^2), \quad (8a)$$

$$n' = \frac{\mu}{4}n - \frac{\mu}{16}n(m^2 + n^2) - \frac{\Omega^2 + 1}{2\Omega}m + \frac{3}{8\Omega}m(m^2 + n^2) - \frac{f}{2\Omega}. \quad (8b)$$

平衡态有  $m' = n' = 0$ . 假设  $a = \sqrt{m^2 + n^2}$ ,  $\varphi = \arctan \frac{n}{m}$ , 由  $[m \times (8a) + n \times (8b)]$  和  $[n \times (8a) - m \times (8b)]$  得到

$$\frac{\mu}{4}a - \frac{\mu}{16}a^3 - \frac{f}{2\Omega} \sin \varphi = 0, \quad (9a)$$

$$\frac{\Omega^2 + 1}{2\Omega}a - \frac{3}{8\Omega}a^3 + \frac{f}{2\Omega} \cos \varphi = 0. \quad (9b)$$

消去方程 (9a) 和方程 (9b) 中的  $\varphi$ , 有

$$\mu^2 \Omega^2 \left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{8}\right)^2 + \left[(1 + \Omega^2)a - \frac{3}{4}a^3\right]^2 - f^2 = 0. \quad (10)$$

方程 (8) 的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{\mu}{4} - \frac{\mu}{16}(m^2 + 3n^2) + \frac{3mn}{4\Omega} \\ -\left[\frac{\mu}{8}mn + \frac{\Omega^2 + 1}{2\Omega} - \frac{3}{8\Omega}(m^2 + 3n^2)\right] \\ -\left[\frac{\mu}{8}mn - \frac{\Omega^2 + 1}{2\Omega} + \frac{3}{8\Omega}(3m^2 + n^2)\right] \\ \frac{\mu}{4} - \frac{\mu}{16}(m^2 + 3n^2) + \frac{3mn}{4\Omega} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

发生 Hopf 分岔有纯虚数特征根, 应当满足方

程(12)中的  $\frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{4}a^2 = 0$ , 且方程(13)中的  $M > 0$ . 由此得  $a = \sqrt{2}$ , 将其代入方程(10)得

$$2\Omega^4 + \left(\frac{\mu^2}{8} - 2\right)\Omega^2 + \frac{1}{2} - f^2 = 0. \quad (14)$$

基于上述 ENSO 发生 Hopf 分岔的条件来做简单数值模拟, 分析太阳强迫 ENSO 充电振子的一系列非线性过程. 在数值模拟中, 模型参数  $\mu = 0.2$ ,  $\Omega = 2\pi/11$ . 我们观察到系统发生 Hopf 分岔后, 随着太阳强迫振幅  $f$  的增大, 在  $f = 0.352$  时进入了准周期状态. 如图 1 所示, 图 1(a1)  $x$  的时间序列表现为不规则振荡, (a2) 相平面图(其中  $x' = dx/dt$ )

上的复杂轨迹, (a3) Poincaré 截面上的闭合圆环, 表示系统为准周期运动. 此时, ENSO 系统几乎不会重复进入之前的轨道, 只是在之前的轨道附近运动. 当太阳强迫的影响增大到  $f = 0.362$  时, 如图 1(b1) 所示,  $x$  的时间序列变得规则了, (b3) Poincaré 截面上的相空间轨道退化为 3 个点, 象征着系统出现倍频锁相现象. 最后当太阳强迫作用增大到  $f = 2.02$  时, 如图 1 所示, (c1)  $x$  的时间序列再次变得不规则, (c2) 相平面和 (c3) Poincaré 截面上的奇怪吸引子表明 ENSO 系统进入混沌状态.

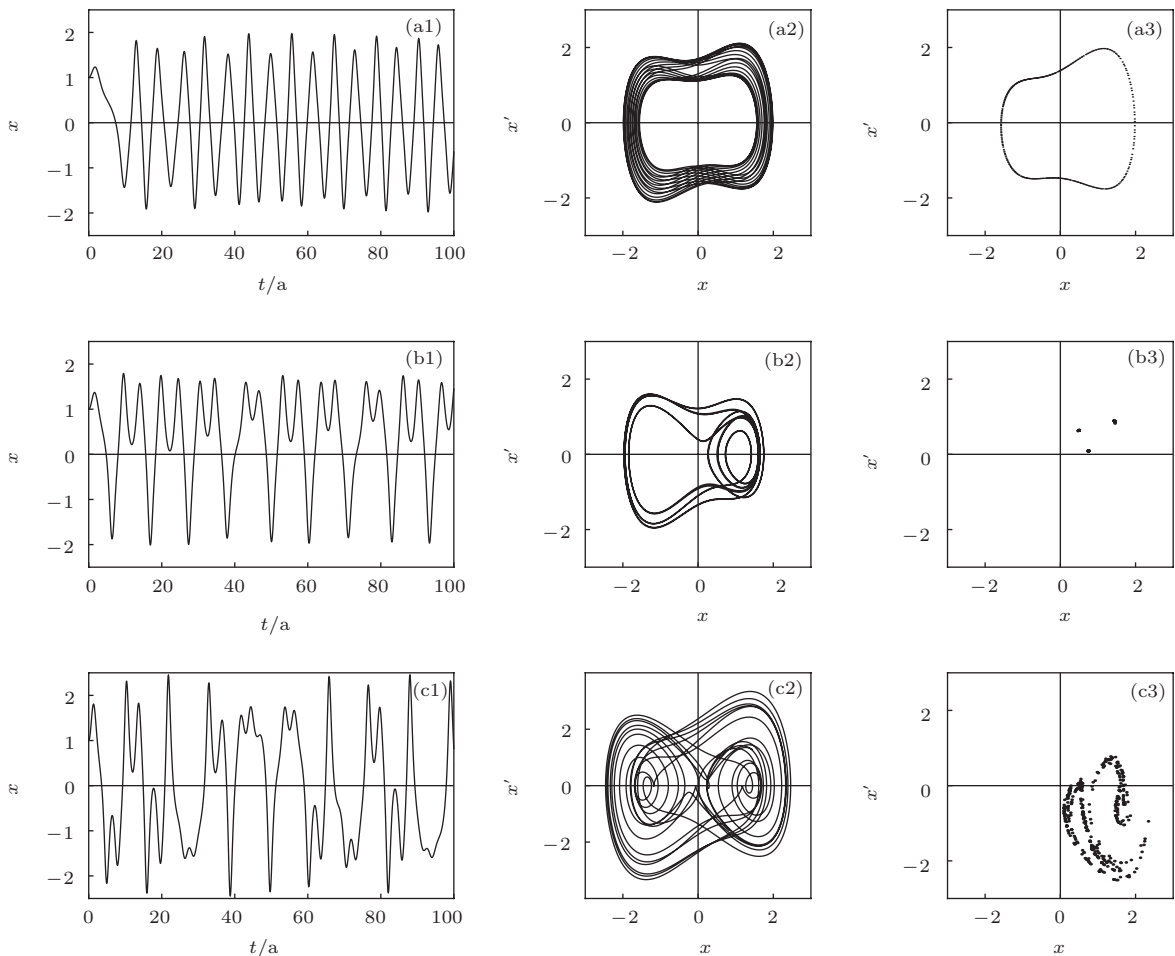


图 1 时间序列(左), 相平面图(中)和 Poincaré 截面图(右). 从上到下依次为(a)准周期, (b)锁相和(c)混沌

## 4 结 论

ENSO 是非常复杂的海气耦合非线性系统, 我们对其物理机理的有限理解使得对 ENSO 的数值模拟和准确预测面临着极大的阻碍. 本文研究一类太阳循环强迫的 ENSO 充电振子模型, 定性分析该 ENSO 系统 Hopf 分岔的条件, 数值模拟发现 11 年

周期太阳强迫下 ENSO 充电振子可出现准周期、倍频锁相到混沌的现象, 进一步丰富 ENSO 动力学的内容.

## 参考文献

[1] Philander, S G 1990 *El Niño, La Niña, and the Southern Oscillation* (London: Academic Press)

- [2] Clarke A J 2008 *An Introduction to the Dynamics of El Niño and the Southern Oscillation* (London: Academic Press)
- [3] Sarachik E S and Cane M A 2010 *The El Niño-Southern Oscillation Phenomenon* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [4] McPhaden M J, S E Zebiak, Glantz M H 2006 *Science* **314** 1740
- [5] Lin J L 2009 *Chin. Ann. Math.* **30B** 715
- [6] Wang C Z 2001 *Adv. Atmos. Sci.* **18** 674
- [7] Zhao Q, Liu S K, Liu S D 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 220201 (in Chinese) [赵强, 刘式适, 刘式达 2012 物理学报 **61** 220201]
- [8] Li X J 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030201
- [9] Wang W, Xu Y, Lu S P 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 030205 (in Chinese) [王雯, 徐燕, 鲁世平 2011 物理学报 **60** 030205]
- [10] Zhang W F, Zhao Q 2013 *Chin. Phys. B* **22** 120201
- [11] Zaliapin I, Ghil M 2010 *Nonlin. Processes Geophys.* **17** 123
- [12] Tziperman E, Stone L, Cane M, Jarosh H 1994 *Science* **264** 72
- [13] Tziperman E, Cane M A, Zebiak S E 1995 *J. Atmos. Sci.* **50** 293
- [14] Zhou Q, Chen W, Zhou W 2013 *J. Geophys. Res.: Atmospheres* **118** 5111
- [15] Meehl G A, Arblaster J M, Matthes K, Sassi F, Loon H 2009 *Science* **325** 1114
- [16] Roy I, Haigh J D 2010 *Atmos. Chem. Phys.* **10** 3147
- [17] Haam E, Tung K K 2012 *J. Atmos. Sci.* **69** 2934
- [18] Haam E, Tung K K 2013 *J. Atmos. Sci.* **70** 9
- [19] White W B, Liu Z 2008 *Geophys. Res. Lett.* **35** L19607
- [20] Saltzman B 2002 *Dynamical paleoclimatology: generalized theory of global climate change (international geophysics)* (London: Academic Press)
- [21] Rial J A, Saha R 2013 *Abrupt Climate Change: Mechanisms, Patterns, and Impacts* American Geophysical Union, Washington, D.C.
- [22] B. De Saedeleer, Crucifix M, Wiczeorek S 2013 *Climate Dyn.* **40** 273
- [23] Jin F F 1997 *J. Atmos. Sci.* **54** 811
- [24] Zhu B Z, Jin F F, Liu Z Y 1991 *An Introduction to the nonlinear Dynamics of the atmosphere and ocean* (Beijing: Ocean Press) (in Chinese) [朱抱真, 金飞飞, 刘征宇 1991 大气和海洋的非线性动力学概论 (北京: 海洋出版社)]
- [25] Hu H Y 2000 *Applied Nonlinear Dynamics* (Beijing: Aviation Industry Press) (in Chinese) [胡海岩 2000 应用非线性动力学 (北京: 航空工业出版社)]

# Hopf bifurcation and chaos in the solar-forced El Niño/Southern Oscillation recharge oscillator model\*

Zhang Wu-Fan<sup>†</sup> Zhao Qiang

(School of Physics, Peking University, Beijing 100871, China)

( Received 15 January 2014; revised manuscript received 26 February 2014 )

## Abstract

A class of solar-forced recharge oscillator model for the El Niño /Southern Oscillation (ENSO) is considered. By transforming the ENSO model equations into the van der Pol-Duffing oscillator with periodic forcing, we obtain the Hopf bifurcation conditions by the harmonic balance method. Numerical simulations also show that the 11-yr solar-cycle forced ENSO system undergoes a transition from the quasi-periodicity route to chaos as the solar-cycle forcing is increased.

**Keywords:** El Niño/Southern Oscillation, van der Pol-Duffing equation, Hopf bifurcation, chaos

**PACS:** 02.30.Hq, 92.10.am, 05.45.-a

**DOI:** 10.7498/aps.63.210201

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 40975028 and 41175052).

† Corresponding author. E-mail: [zwf@pku.edu.cn](mailto:zwf@pku.edu.cn)