物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 63, No. 21 (2014) 210202

sine-Gordon型方程的无穷序列新解*

套格图桑† 伊丽娜

(内蒙古师范大学数学科学学院, 呼和浩特 010022)

(2014 年 5 月 6 日收到; 2014 年 6 月 13 日收到修改稿)

通过下列步骤, 获得了 sine-Gordon 型方程的新解. 第一步、通过函数变换, 把 sine-Gordon 方程与 sinh-Gordon 方程的求解问题转化为两种非线性常微分方程的求解问题. 第二步、获得了两种非线性常微分方程与第一种椭圆方程的拟 Bäcklund 变换. 第三步、利用第一种椭圆方程的 Bäcklund 变换与新解, 构造了 sine-Gordon 型方程的无穷序列新解.

关键词: 函数变换, sine-Gordon 型方程, 第一种椭圆方程, 无穷序列新解

PACS: 02.30.Ik, 02.30.Jr **DOI:** 10.7498/aps.63.210202

1 引 言

文献 [1, 2] 用三角函数型辅助方程法, 构造了 sine-Gordon 方程 (1) 的几种新精确解.

$$u_{xt} = \sin(u). \tag{1}$$

文献 [1, 3] 分别用双曲函数型辅助方程法和初等积分法, 构造了 sinh-Gordon 方程 (2) 的有限多个新精确解.

$$u_{xt} = \alpha \sinh(u). \tag{2}$$

这里 α 是非零任意常数.

文献 [4] 用双线性方法, 构造了 sinh-Gordon 方程 (3) 的复合函数型新精确解.

$$u_{tt} + u_{xx} = -\sinh(u). \tag{3}$$

本文用辅助方程法, sine-Gordon 方程与 sinh-Gordon 方程为应用实例, 构造了无穷序列新精确解. 第一步、通过函数变换, 把 sine-Gordon 方程与 sinh-Gordon 方程的求解问题转化为两种非线性常微分方程的求解问题. 第二步、获得了两种非线性常微分方程与第一种椭圆方程的拟 Bäcklund 变换. 第三步、利用第一种椭圆方程的 Bäcklund 变换与新解, 构造了 sine-Gordon 型方程的无穷序列新解.

2 非线性常微分方程与第一种椭圆方程的相关结论

通过函数变换, sine-Gordon 方程与 sinh-Gordon 方程的求解问题转化为如下常微分方程的求解问题. 因此, 首先给出几种非线性常微分方程的 Bäcklund 变换等相关结论.

$$\begin{aligned}\left(y'(\xi)\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}y(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 &= E + Dy(\xi) + Cy^2(\xi)\\ &\quad + By^3(\xi) + Ay^4(\xi),\end{aligned} \tag{4}$$

$$\left(z'(\xi)\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}z(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 = a + bz^2(\xi) + cz^4(\xi). \tag{5}$$

这里 A, B, C, D, E, a, b 和 c 是常数.

2.1 两种常微分方程的拟 Bäcklund 变换

情况 1 当

$$\begin{aligned}A = &\frac{1}{\sqrt{c}Q^2L^2}\left(\sqrt{c}Q^2 \pm 4\sqrt{a}R^2\right)\\ &\times \left(cQ^2 + bR^2 \pm 2\sqrt{ac}R^2\right),\end{aligned}$$

---

* 国家自然科学基金 (批准号:11361040)、内蒙古自治区高等学校科学研究基金 (批准号: NJZY12031) 和内蒙古自治区自然科学基金 (批准号: 2010MS0111) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: tgts@imnu.edu.cn

$$B=-\frac{2R}{Q^2L}\left[\pm 6\sqrt{ac}Q^2+16aR^2+b\left(Q^2\pm\frac{8\sqrt{a}R^2}{\sqrt{c}}\right)\right],\quad C=b\pm 6\sqrt{ac}+\frac{48aR^2}{Q^2}\pm\frac{24\sqrt{ab}R^2}{\sqrt{c}Q^2},$$
$$D=-\frac{1}{Q^2}\left(32aRL\pm\frac{16\sqrt{ab}RL}{\sqrt{c}}\right),\quad E=\frac{1}{Q^2}\left(8aL^2\pm\frac{4\sqrt{ab}L^2}{\sqrt{c}}\right)$$

时, 两种非线性常微分方程 (4) 和 (5) 之间存在如下 Bäcklund 变换:

$$y(\xi)=\frac{L[\mp\sqrt{a}+\sqrt{c}z^2(\xi)]}{R[\mp\sqrt{a}+\sqrt{c}z^2(\xi)]+\sqrt{c}Qz(\xi)}.\tag{6}$$

情况 2 当

$$A=\frac{R^2}{2(RN-QL)^3}\Big[2aR^2(RN-QL)+b[Q^2RN-2PR^2N-Q^3L\pm Q(\pm 2PRL+\sqrt{\Delta_2})]\Big],$$
$$B=\frac{R}{(RN-QL)^3}\Big[4aR^2L(-RN+QL)\mp b\Big[\mp Q^3L^2+RN(\mp 4PNL+\sqrt{\Delta_2})$$
$$+Q(\pm R^2N^2\pm 4PRL^2+L\sqrt{\Delta_2})\Big]\Big],$$
$$C=\frac{1}{(RN-QL)^3}\Big[6aR^2L^2(RN-QL)+b(R^3N^3-6PR^2NL^2-Q^3L^3+6PQRL^3\pm 3RNL\sqrt{\Delta_2})\Big],$$
$$D=\frac{L}{R(RN-QL)^3}\Big[-b[2R^3N^3-R^2NL(3QN+4PL)\mp QL^2(\pm Q^2L+\sqrt{\Delta_2})$$
$$+RL(2Q^2NL+4PQL^2\pm 3N\sqrt{\Delta_2})]+4aR^2L^2(-RN+QL)\Big],$$
$$E=\mp\frac{L^2}{2R^2(RN-QL)^3}\Big[\pm 2aR^2L^2(-RN+QL)\mp b[2R^3N^3-2R^2NL(2QN+PL)$$
$$\mp QL^2(\pm Q^2L+\sqrt{\Delta_2})+RL(3Q^2NL+2PQL^2\pm 2N\sqrt{\Delta_2})]\Big],$$

$c=0$ 时, 两种非线性常微分方程 (4) 和 (5) 之间存在如下 Bäcklund 变换:

$$y(\xi)=\frac{QRN-Q^2L+2PRL\mp\sqrt{\Delta_2}+2R^2[Nz(\xi)+Lz^2(\xi)]}{2R^2[P+Qz(\xi)+Rz^2(\xi)]}.\tag{7}$$

情况 3 当

$$B=\pm\frac{\sqrt{2\Delta_0L^2}R^3\Delta_1}{Q^2L^3},\quad C=\frac{1}{Q^2L^2}\big[-2bQ^2L^2-3\sqrt{\Delta_0L^2}\big(Q^2L\pm\sqrt{2}R^2\Delta_1\big)\big],$$
$$D=\frac{1}{Q^2RL}\big[4bQ^2L^2+6Q^2L\sqrt{\Delta_0L^2}\mp\big(2\sqrt{2}cQ^2L-3\sqrt{2\Delta_0L^2}R^2\big)\Delta_1\big],\quad A=0,$$
$$E=\frac{L}{Q^2R^4\sqrt{\Delta_0L^2}}\Big[-2bQ^2R^2L\sqrt{\Delta_0L^2}\mp b^2R^2L(\pm 3Q^2L+\sqrt{2\Delta_1}R^2)$$
$$+c\Big[\pm 4aR^2L(\pm 3Q^2L+\sqrt{2\Delta_1}R^2)+\sqrt{\Delta_0L^2}Q^2(Q^2L\pm 2\sqrt{2\Delta_1}R^2)\Big]\Big]$$

时, 两种非线性常微分方程 (4) 和 (5) 之间存在如下 Bäcklund 变换:

$$y(\xi)=\frac{L\big[R^2(bL+\sqrt{\Delta_0L^2})-2c(Q^2L\pm\sqrt{2\Delta_1}R^2)+2cR^2Lz^2(\xi)\big]}{R^2\big[R(bL+\sqrt{\Delta_0L^2}\mp\sqrt{2\Delta_1}c)+2cL[Q+Rz(\xi)]z(\xi)\big]}\tag{8}$$

情况 4 当

$$B=-\frac{2\sqrt{b^3}P}{L\sqrt{b}+\sqrt{LRa}},\quad C=\frac{\sqrt{Lb^3}-5b\sqrt{aR}}{\sqrt{bL}+\sqrt{aR}},\quad D=\frac{2Lb\sqrt{aR}-4aR\sqrt{bL}}{\sqrt{bLP}+P\sqrt{aR}},$$
$$A=0,\quad E=\frac{aR\sqrt{L^3b}-L\sqrt{a^3R^3}}{(\sqrt{bL}+\sqrt{aR})P^2}$$

和 $c=0$ 时, 两种非线性常微分方程 (4) 和 (5) 之间存在如下 Bäcklund 变换:

$$y(\xi)=\frac{\sqrt{aL}[L+Rz^2(\xi)]}{\sqrt{aLP}\mp\sqrt{-(\sqrt{bL}+\sqrt{aR})^2P^2z(\xi)-P\sqrt{bR}z^2(\xi)}}.\tag{9}$$

情况 5 当

$$B=\frac{64c^2P^4-b^2Q^4}{16cRP^3-4LcPQ^2},$$
$$D=\frac{4P}{c(4RP^2-LQ^2)(8cP^2-bQ^2)}\left[-8LbcR(8cP^2+bQ^2)+4c^2L^2(24cP^2+bQ^2)+b^2R^2(8cP^2+3bQ^2)\right],$$
$$E=-\frac{16P^2(-2cL+bR)^2(16c^2P^2L-b^2RQ^2)}{c(4RP^2-LQ^2)(-8cP^2+bQ^2)^2},$$
$$C=\frac{1}{c(4RP^2-LQ^2)}[-4Lc(12cP^2+bQ^2)+bR(16cP^2+3bQ^2)],$$

$A=0$ 和 $b^2-4ac=0$ 时, 两种非线性常微分方程 (4) 和 (5) 之间存在如下 Bäcklund 变换:

$$y(\xi)=\frac{4P\left[L+\dfrac{4(2Lc-bR)PQ}{8cP^2-bQ^2}z(\xi)+Rz^2(\xi)\right]}{[2P+Qz(\xi)]^2},\tag{10}$$

其中

$$\varDelta_0=b^2-4ac,\quad \varDelta_1=\sqrt{-\frac{Q^2L(bL+\sqrt{\varDelta_0L^2})}{cR^2}},\quad \varDelta_2=(Q^2-4PR)(RN-QL)^2;$$

P, Q, R, N 和 L 是非零任意常数.

2.2 特殊常微分方程的几种结论

情况 1 当 $A=0,\ B=0$ 时, 非线性常微分方程 (4), 通过下列变换, 转化为 Riccati 方程. 因此, 利用 Riccati 方程的 Bäcklund 变换与解的非线性叠加公式 [5], 可以获得非线性常微分方程 (4) 的无穷序列新解.

$$y(\xi)=\frac{2\sqrt{E}\rho(\xi)-D}{C-\rho^2(\xi)},\quad \rho(\xi)=-2x(\xi),\tag{11}$$
$$\frac{\mathrm{d}x(\xi)}{\mathrm{d}\xi}=x'(\xi)=x^2(\xi)-\frac{1}{4}C.\tag{12}$$

情况 2 当 $A=0,\ B=0,\ D^2-4EC=0$ 时, 非线性常微分方程 (4) 存在如下解:

$$y(\xi)=-\frac{D}{2C}+\exp\left(|\sqrt{C}\xi|\right),\quad (C>0).\tag{13}$$

情况 3 当 $A=0,\ B=0,\ D^2-4EC=0$ 时, 非线性常微分方程 (4) 存在如下自 Bäcklund 变换. 若 $y_{n-1}(\xi)$ 是非线性常微分方程 (4) 的解, 则下列 $y_n(\xi)$ 也是非线性常微分方程 (4) 的解:

$$y_n(\xi)=\frac{D^2(DN-2P\sqrt{C})+4DM\sqrt{C^3}y_{n-1}(\xi)}{4PD\sqrt{C^3}-4\sqrt{C^3}(2MC+DN\sqrt{C})y_{n-1}(\xi)+4ND\sqrt{C^3}y'_{n-1}(\xi)},\quad (n=1,\ 2,\ \cdots).\tag{14}$$
$$y_n(\xi)=\frac{D(DN-2P\sqrt{C})}{4\sqrt{C^3}\left[P-N\sqrt{C}y_{n-1}(\xi)+Ny'_{n-1}(\xi)\right]},\quad (n=1,2,\cdots).\tag{15}$$

这里 M, N 和 P 是不全为零的任意常数.

情况 4 当 $A=0,\ B=0,\ E=0$ 时, 非线性常微分方程 (4) 存在如下解:

$$y(\xi)=\begin{cases}-\dfrac{D}{2C}-\dfrac{D}{2C}\sin(\sqrt{-C}\xi), & 2p\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\sqrt{-C}\xi\leqslant 2p\pi+\dfrac{3\pi}{2},\quad (C<0,\ p\in Z),\\ 0, & \text{其他};\end{cases}\tag{16}$$
$$y(\xi)=\begin{cases}-\dfrac{D}{2C}-\dfrac{D}{2C}\sin(\sqrt{-C}\xi), & 2p\pi+\dfrac{\pi}{2}\leqslant\sqrt{-C}\xi\leqslant 2p\pi+\dfrac{5\pi}{2},\quad (C<0,\ p\in Z),\\ -D/C, & \text{其他};\end{cases}\tag{17}$$

$$y(\xi)=\begin{cases}-\dfrac{D}{2C}-\dfrac{D}{2C}\cos(\sqrt{-C}\xi), & 2p\pi-\pi\leqslant\sqrt{-C}\xi\leqslant 2p\pi+\pi,\quad (C<0,\ p\in Z),\\ 0, & \text{其他};\end{cases}\tag{18}$$

$$y(\xi)=\begin{cases}-\dfrac{D}{2C}-\dfrac{D}{2C}\cos(\sqrt{-C}\xi), & 2p\pi\leqslant\sqrt{-C}\xi\leqslant 2p\pi+2\pi,\quad (C<0,\ p\in Z),\\ -D/C, & \text{其他}.\end{cases}\tag{19}$$

情况 5 当 $A=0,\ B=0,\ E=0$ 时, 非线性常微分方程 (4) 存在如下 Bäcklund 变换. 若 $y_{n-1}(\xi)$ 是非线性常微分方程 (4) 的非常数解, 则下列 $y_n(\xi)$ 也是方程 (4) 的解:

$$\begin{aligned}y_n(\xi)={}&\frac{1}{DA_0}\big[DB_0+(DA_0+2CB_0)y_{n-1}(\xi)\\&\mp 2\sqrt{DA_0B_0+CB_0^2}y'_{n-1}(\xi)\big],\\&(n=1,2,\cdots).\end{aligned}\tag{20}$$

$$\begin{aligned}y_n(\xi)={}&\frac{1}{4C}\big[(-2\mp\sqrt{2})D\\&\mp 2\sqrt{2C}y_{n-1}(\xi)\mp 2\mathrm{i}\sqrt{2C}y'_{n-1}(\xi)\big],\\&(C<0;n=1,2,\cdots).\end{aligned}\tag{21}$$

这里 B_0 是任意常数, A_0 是非零任意常数.

2.3 第一种椭圆方程的新解

情况 1 第一种椭圆方程的 Riemannθ 函数新解 [12].

当 $a=\theta_4^2(0)\theta_2^2(0),\ b=\theta_2^4(0)-\theta_4^4(0),\ c=-\theta_4^2(0)\theta_2^2(0)$ 时, 第一种椭圆方程 (5) 有如下解:

$$z(\xi)=\frac{\theta_1(\xi)}{\theta_3(\xi)}.\tag{22}$$

当 $a=\theta_3^2(0)\theta_2^2(0),\ b=-\big(\theta_2^4(0)+\theta_3^4(0)\big),\ c=\theta_3^2(0)\theta_2^2(0)$ 时, 第一种椭圆方程 (5) 有如下解:

$$z(\xi)=\frac{\theta_1(\xi)}{\theta_4(\xi)}.\tag{23}$$

当 $a=\theta_4^2(0)\theta_3^2(0),\ b=\theta_3^4(0)+\theta_4^4(0),\ c=\theta_4^2(0)\theta_3^2(0)$ 时, 第一种椭圆方程 (5) 有如下解:

$$z(\xi)=\frac{\theta_1(\xi)}{\theta_2(\xi)}.\tag{24}$$

这里

$$\begin{aligned}\theta\begin{pmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon^*\end{pmatrix}(z,\tau)={}&\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Big[\Big(n+\frac{\varepsilon}{2}\Big)\Big(\pi i\tau\Big(n+\frac{\varepsilon}{2}\Big)\\&+2\Big(z+\frac{\varepsilon^*}{2}\Big)\Big)\Big],\end{aligned}$$

$\begin{pmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon^*\end{pmatrix}$ 是二维向量, n 为整数. 另外,

$$\theta_1(z)=\theta\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(z;\tau),$$

$$\theta_2(z)=\theta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(z;\tau),$$

$$\theta_3(z)=\theta\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}(z;\tau),$$

$$\theta_4(z)=\theta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(z;\tau).$$

情况 2 第一种椭圆方程的 Jacobi 椭圆函数新解.

根据 Jacobi 椭圆函数的周期性, 可以获得第一种椭圆方程的多种新解, 这里列出几种新解 [13,14].

当 $a=1,\ b=-1-k^2,\ c=k^2$ 时, 第一种椭圆方程 (5) 有如下解:

$$z(\xi)=\mathrm{sn}(\xi,k),\tag{25}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}\mathrm{sn}(\xi,k), & (4p-1)K(k)\leqslant\xi\leqslant(4p+3)K(k),\quad p\in Z,\\ -1, & \text{其他};\end{cases}\tag{26}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}1, & \xi\leqslant(4p+1)K(k),\\ \mathrm{sn}(\xi,k), & (4p+1)K(k)\leqslant\xi\leqslant(4p+3)K(k),\\ -1, & (4p+3)K(k)\leqslant\xi,\quad p\in Z;\end{cases}\tag{27}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}-1, & \xi\leqslant(4p+3)K(k),\\ \mathrm{sn}(\xi,k), & (4p+3)K(k)\leqslant\xi\leqslant(4p+5)K(k),\\ 1, & (4p+5)K(k)\leqslant\xi,\quad p\in Z.\end{cases}\tag{28}$$

当 $a=1-k^2$, $b=2k^2-1$, $c=-k^2$ 时, 第一种椭圆方程 (5) 有如下解:

$$z(\xi)=\operatorname{cn}(\xi,k); \tag{29}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}\operatorname{cn}(\xi,k),(4p+2)K(k)\leqslant\xi\leqslant(4p+6)K(k), & p\in Z,\\ -1, & \text{其他};\end{cases} \tag{30}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}1, & \xi\leqslant 4pK(k),\\ \operatorname{cn}(\xi,k), & 4pK(k)\leqslant\xi\leqslant(4p+2)K(k),\\ -1, & \xi\geqslant(4p+2)K(k),\qquad p\in Z;\end{cases} \tag{31}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}-1, & \xi\leqslant(4p+2)K(k),\\ \operatorname{cn}(\xi,k), & (4p+2)K(k)\leqslant\xi\leqslant(4p+4)K(k),\\ 1, & \xi\geqslant(4p+4)K(k),\qquad p\in Z.\end{cases} \tag{32}$$

当 $a=-1+k^2$, $b=2-k^2$, $c=-1$ 时, 第一种椭圆方程 (5) 有如下解:

$$z(\xi)=\operatorname{dn}(\xi,k); \tag{33}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}\operatorname{dn}(\xi,k),\ 2pK(k)\leqslant\xi\leqslant(2p+2)K(k), & p\in Z,\\ 1, & \text{其他};\end{cases} \tag{34}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}\operatorname{dn}(\xi,k),\ (2p+1)K(k)\leqslant\xi\leqslant(2p+3)K(k), & p\in Z,\\ \sqrt{1-k^2}, & \text{其他};\end{cases} \tag{35}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}\sqrt{1-k^2}, & \xi\leqslant(2p+1)K(k),\\ \operatorname{dn}(\xi,k), & (2p+1)K(k)\leqslant\xi\leqslant(2p+2)K(k),\\ 1, & \xi\geq(2p+2)K(k),\quad p\in Z;\end{cases} \tag{36}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}1, & \xi\leqslant(2p+2)K(k),\\ \operatorname{dn}(\xi,k), & (2p+2)K(k)\leqslant\xi\leqslant(2p+3)K(k),\\ \sqrt{1-k^2}, & \xi\geq(2p+3)K(k),\quad p\in Z.\end{cases} \tag{37}$$

这里

$$K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\mathrm{d}x,$$

$0\leqslant k\leqslant 1$. Z 是整数集.

情况 3 第一种椭圆方程的其他新解.

当 $b^2-4ac=0$ 时, 第一种椭圆方程 (5) 有如下解:

$$z(\xi)=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2c}}\tan\Big(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2}}|\xi|\Big),\quad(b>0,c>0); \tag{38}$$

$$z(\xi)=\frac{\sqrt{-b}\big[1+\exp(\sqrt{-2b}|\xi|)\big]}{\sqrt{2c}\big[1-\exp(\sqrt{-2b}|\xi|)\big]},\quad(b<0,c>0). \tag{39}$$

2.4 第一种椭圆方程的Bäcklund变换

若 $z_{n-1}(\xi)$ 是第一种椭圆方程 (5) 的非常数解, 则 $z_n(\xi)$ 也是第一种椭圆方程 (5) 的解:

$$z_n^2(\xi)=\frac{a\big[-bM_0\pm\sqrt{(b^2-4ac)M_0^2}-2cM_0z_{n-1}^2(\xi)\big]}{c\big[2aM_0\mp\big(\mp bM_0+\sqrt{(b^2-4ac)M_0^2}\big)z_{n-1}^2(\xi)\big]}. \tag{40}$$

这里 M_0 的任意非零常数. a, b 和 c 是第一种椭圆方程 (5) 的系数.

若 $z_{n-1}(\xi)$ 是第一种椭圆方程 (5) 的非常数解, 则下列 $z_n(\xi)$ 也是方程 (5) 的解:

$$z_n^2(\xi) = \frac{1}{4c}\big[-b + 2cz_{n-1}^2(\xi) \mp 2\sqrt{c}z'_{n-1}(\xi)\big],\quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{41}$$

这里 a, b 和 c 是第一种椭圆方程 (5) 的系数, 而且 $b^2 - 4ac = 0$.

若 $z_{n-1}(\xi)$ 是第一种椭圆方程 (5) 的非常数解, 则下列 $z_n(\xi)$ 也是方程 (5) 的解:

$$z_n(\xi) = \mp \frac{H^2 - aL^2 z_{n-1}^2(\xi)}{L\sqrt{a^2L^2 + bH^2}z_{n-1}(\xi) \mp HL\sqrt{a + bz_{n-1}^2(\xi)}},\quad (c = 0). \tag{42}$$

这里 a, b 和 $c = 0$ 是第一种椭圆方程 (5) 的系数. H 和 L 是非零任意常数.

3 sine-Gordon 型方程的无穷序列新解

下面利用以上给出的相关结论, 构造 sine-Gordon 方程与 sinh-Gordon 方程的无穷序列新精确解.

3.1 sine-Gordon 方程的无穷序列新精确解

把行波变换 $u(x,t) = u(\xi)$, $\xi = \mu x + \omega t$(这里 μ 和 ω 是待定的常数) 代入方程 (1) 后得到下列常微分方程:

$$\omega\mu u''(\xi) = \sin\big(u(\xi)\big). \tag{43}$$

通过函数变换, 把常微分方程转化为如下常微分方程组:

$$\frac{du(\xi)}{d\xi} = Y(\xi),\quad \frac{dY(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{\mu\omega}\sin\big(u(\xi)\big). \tag{44}$$

经计算获得了常微分方程组 (44) 的如下首次积分:

$$y^2(\xi) = \frac{2}{\mu\omega}\cos\big(u(\xi)\big) + 2c_0. \tag{45}$$

这里 c_0 是积分常数.

将首次积分代入常微分方程组的第一方程后得到如下方程:

$$\Big(\frac{\mathrm{d}u(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\Big)^2 = \frac{2}{\mu\omega}\cos\big(u(\xi)\big) + 2c_0. \tag{46}$$

常微分方程 (46) 通过如下函数变换 (47), 转化为常微分方程 (48):

$$u(\xi) = 2\arctan\big(v(\xi) + m\big). \tag{47}$$

这里 m 是任意常数.

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\mathrm{d}v(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\Big)^2 &= \Big(2c_0 - \frac{1}{2\mu\omega}\Big)v^4(\xi) + \Big(8mc_0 - \frac{2m}{\mu\omega}\Big)v^3(\xi) \\ &+ \Big(4c_0 + 12c_0m^2 - \frac{3m^2}{\mu\omega}\Big)v^2(\xi) \\ &+ \Big(8mc_0 + 8c_0m^3 - \frac{2m^3}{\mu\omega}\Big)v(\xi) + 2c_0 \\ &+ 4c_0m^2 + 2c_0m^4 + \frac{1}{2\mu\omega} - \frac{m^4}{2\mu\omega}.\end{aligned} \tag{48}$$

当 $c_0 = \frac{1}{4\mu\omega}$ 时, 常微分方程 (48) 转化为下列常微分方程:

$$\Big(\frac{\mathrm{d}v(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\Big)^2 = \frac{1}{\mu\omega} + \frac{m^2}{\mu\omega} + \frac{2m}{\mu\omega}v(\xi) + \frac{1}{\mu\omega}v^2(\xi). \tag{49}$$

常微分方程 (49), 通过下列变换, 转化为 Riccati 方程:

$$v(\xi) = \frac{2\Big[m + 2\mu\omega\sqrt{\frac{1+m^2}{\mu\omega}}x(\xi)\Big]}{-1 + 4\mu\omega x^2(\xi)}, \tag{50}$$

$$\frac{\mathrm{d}x(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = x'(\xi) = x^2(\xi) - \frac{1}{4\mu\omega}. \tag{51}$$

根据第二节第一部分中给出的相关结论与文献 [5] 中给出的 Riccati 方程解的非线性叠加公式等结论, 可以构造 sine-Gordon 方程的无穷序列新精确解.

情况 1 当 $A = 2c_0 - \frac{1}{2\mu\omega}$, $B = 8mc_0 - \frac{2m}{\mu\omega}$, $C = 4c_0 + 12c_0m^2 - \frac{3m^2}{\mu\omega}$, $D = 8mc_0 + 8c_0m^3 - \frac{2m^3}{\mu\omega}$ 和 $E = 2c_0 + 4c_0m^2 + 2c_0m^4 + \frac{1}{2\mu\omega} - \frac{m^4}{2\mu\omega}$ 满足第二节第一部分的情况 1 时, 通过下列叠加公式, 获得 sine-Gordon 方程的无穷序列新精确解:

$$u_n(\xi) = 2\arctan\big(v_n(\xi) + m\big),\quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

$$v_n(\xi)=\frac{L[\mp\sqrt{a}+\sqrt{c}z_n^2(\xi)]}{R[\mp\sqrt{a}+\sqrt{c}z_n^2(\xi)]+\sqrt{c}Qz_n(\xi)},$$

$$z_n^2(\xi)=\frac{a\big[-bM_0\pm\sqrt{(b^2-4ac)M_0^2}-2cM_0z_{n-1}^2(\xi)\big]}{c\big[2aM_0\mp\big(\mp bM_0+\sqrt{(b^2-4ac)M_0^2}\big)z_{n-1}^2(\xi)\big]},$$
$$(n=1,2,\cdots).\tag{52}$$

这里 Q, R, M_0 和 L 是非零任意常数. a, b 和 c 是第一种椭圆方程 (5) 的系数.

当叠加 (52) 式中把 $z_0(\xi)$ 分别取为解 (22)—(24) 时, 获得 sine-Gordon 方程的 Riemannθ 函数型无穷序列新解.

当叠加 (52) 式中把 $z_0(\xi)$ 分别取为解 (25)—(37) 时, 获得 sine-Gordon 方程的 Jacobi 椭圆函数型无穷序列新解. 这里包括光滑孤立子解和紧孤立子解.

当 $k=1$ 时, 解 (25)—(37) 转化为双曲函数型解. 叠加 (52) 式中把 $z_0(\xi)$ 分别取为此类解时, 获得 sine-Gordon 方程的无穷序列光滑孤立子解和紧孤立子解.

情况 2 当 $A=2c_0-\frac{1}{2\mu\omega}$, $B=8mc_0-\frac{2m}{\mu\omega}$, $C=4c_0+12c_0m^2-\frac{3m^2}{\mu\omega}$, $D=8mc_0+8c_0m^3-\frac{2m^3}{\mu\omega}$ 和 $E=2c_0+4c_0m^2+2c_0m^4+\frac{1}{2\mu\omega}-\frac{m^4}{2\mu\omega}$, 满足第二节第一部分的情况 1 时, 通过下列叠加公式, 获得 sine-Gordon 方程的无穷序列新精确解:

$$u_n(\xi)=2\arctan\big(v_n(\xi)+m\big),$$
$$(n=0,1,2,\cdots),$$
$$v_n(\xi)=\frac{L[\mp\sqrt{a}+\sqrt{c}z_n^2(\xi)]}{R[\mp\sqrt{a}+\sqrt{c}z_n^2(\xi)]+\sqrt{c}Qz_n(\xi)},$$
$$(n=1,2,\cdots),$$
$$z_n^2(\xi)=\frac{1}{4c}\big[-b+2cz_{n-1}^2(\xi)\mp2\sqrt{c}z'_{n-1}(\xi)\big],$$
$$(n=1,2,\cdots).\tag{53}$$

这里 Q, R 和 L 是非零任意常数. a, b 和 c 是第一种椭圆方程 (5) 的系数. 而且 $b^2-4ac=0$.

当叠加 (53) 式中 $z_0(\xi)$ 取为解 (38) 时, 获得 sine-Gordon 方程的三角函数型无穷序列尖锋孤立子新解.

当叠加 (53) 式中 $z_0(\xi)$ 取为解 (39) 时, 获得 sine-Gordon 方程的双曲函数型无穷序列尖锋孤立子新解.

情况 3 当 $A=2c_0-\frac{1}{2\mu\omega}$, $B=8mc_0-\frac{2m}{\mu\omega}$, $C=4c_0+12c_0m^2-\frac{3m^2}{\mu\omega}$, $D=8mc_0+8c_0m^3-\frac{2m^3}{\mu\omega}$ 和 $E=2c_0+4c_0m^2+2c_0m^4+\frac{1}{2\mu\omega}-\frac{m^4}{2\mu\omega}$, 满足第二节第一部分的情况 2 时, 通过下列叠加公式, 获得 sine-Gordon 方程的无穷序列新精确解:

$$u_n(\xi)=2\arctan\big(v_n(\xi)+m\big),\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$v_n(\xi)=\frac{QRN-Q^2L+2PRL\mp\sqrt{\Delta_2}+2R^2[Nz_n(\xi)+Lz_n^2(\xi)]}{2R^2[P+Qz_n(\xi)+Rz_n^2(\xi)]},$$
$$(n=1,2,\cdots),$$

$$z_n(\xi)=\mp\frac{H^2-aL^2z_{n-1}^2(\xi)}{L\sqrt{a^2L^2+bH^2}z_{n-1}(\xi)\mp HL\sqrt{a+bz_{n-1}^2(\xi)}},$$
$$(c=0,n=1,2,\cdots).\tag{54}$$

这里 P, Q, R, N, H 和 L 是非零任意常数. a, b 和 c 是第一种椭圆方程 (5) 的系数.

当 $k=0$ 时, 解 (25)—(32) 转化为三角函数型解. 在叠加 (53) 式中 $z_0(\xi)$ 取为这些解后获得 sine-Gordon 方程的三角函数型无穷序列光滑孤立子解和紧孤立子新解.

3.2 sinh-Gordon 方程的无穷序列新精确解

将 $u(x,t)=u(\xi)$, $\xi=\mu x+\omega t$ 代入 sinh-Gordon 方程 (2) 后得到下列常微分方程:

$$\mu\omega u''(\xi)=\alpha\sinh\big(u(\xi)\big).\tag{55}$$

通过下列变换, 把常微分方程 (55) 转化为常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}u(\xi)}{\mathrm{d}\xi}=Y(\xi),$$
$$\frac{\mathrm{d}Y(\xi)}{\mathrm{d}\xi}=\frac{\alpha}{\mu\omega}\sinh\big(u(\xi)\big).\tag{56}$$

经计算获得了常微分方程组的如下首次积分:

$$Y^2(\xi)=\frac{2\alpha}{\mu\omega}\cosh\big(u(\xi)\big)+c_1.\tag{57}$$

c_1 是积分常数.

把首次积分 (57) 代入常微分方程组 (56) 的第一方程后得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}u(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=\frac{2\alpha}{\mu\omega}\cosh\big(u(\xi)\big)+c_1.\tag{58}$$

常微分方程 (58), 通过函数变换 (59) 转化为常微分方程 (60):

$$u(\xi)=\ln\big(l+v(\xi)\big). \tag{59}$$

这里 l 是任意非零常数.

$$\left(\frac{\mathrm{d}v(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=c_1l^2+\frac{\alpha l+\alpha l^3}{\mu\omega}+\left(2c_1l+\frac{\alpha}{\mu\omega}+\frac{3\alpha l^2}{\mu\omega}\right)v(\xi)+\left(c_1+\frac{3\alpha l}{\mu\omega}\right)v^2(\xi)+\frac{\alpha}{\mu\omega}v^3(\xi). \tag{60}$$

当 $A=0,\ B=\dfrac{\alpha}{\mu\omega},\ C=c_1+\dfrac{3\alpha l}{\mu\omega},\ D=2c_1l+\dfrac{\alpha}{\mu\omega}+\dfrac{3\alpha l^2}{\mu\omega}$ 和 $E=c_1l^2+\dfrac{\alpha l+\alpha l^3}{\mu\omega}$, 满足第二节第一部分中给出的情况 3 时, 通过下列叠加公式, 获得 sinh-Gordon 方程的由 Riemann θ 函数、Jacobi 椭圆函数和双曲函数组成的无穷序列新精确解:

$$\begin{aligned}u_n(\xi)=&\ \ln\big(l+v_n(\xi)\big),\quad (n=0,1,2,\cdots),\\ v_n(\xi)=&\ \frac{L\big[R^2(bL+\sqrt{\Delta_0L^2})-2c(Q^2L\pm\sqrt{2\Delta_1}R^2)+2cR^2Lz_n^2(\xi)\big]}{R^2\big[R(bL+\sqrt{\Delta_0L^2}\mp\sqrt{2\Delta_1}c)+2cL[Q+Rz_n(\xi)]z_n(\xi)\big]},\quad (n=1,2,\cdots),\\ z_n^2(\xi)=&\ \frac{a\big[-bM_0\pm\sqrt{(b^2-4ac)M_0^2}-2cM_0z_{n-1}^2(\xi)\big]}{c\big[2aM_0\mp\big(\mp bM_0+\sqrt{(b^2-4ac)M_0^2}\big)z_{n-1}^2(\xi)\big]},\quad (n=1,2,\cdots).\end{aligned} \tag{61}$$

当 $A=0,\ B=\dfrac{\alpha}{\mu\omega},\ C=c_1+\dfrac{3\alpha l}{\mu\omega},D=2c_1l+\dfrac{\alpha}{\mu\omega}+\dfrac{3\alpha l^2}{\mu\omega}$ 和 $E=c_1l^2+\dfrac{\alpha l+\alpha l^3}{\mu\omega}$, 满足第二节第一部分中给出的情况 4 时, 通过下列叠加公式, 获得 sinh-Gordon 方程的由双曲函数和三角函数组成的光滑孤立子与紧孤立子无穷序列新精确解:

$$\begin{aligned}u_n(\xi)=&\ \ln\big(l+v_n(\xi)\big),\quad (n=0,1,2,\cdots),\\ v_n(\xi)=&\ \frac{\sqrt{a}L[L+Rz_n^2(\xi)]}{\sqrt{a}LP\mp\sqrt{-(\sqrt{b}L+\sqrt{a}R)^2P^2z_n(\xi)-P\sqrt{b}Rz_n^2(\xi)}},\quad (n=1,2,\cdots),\\ z_n(\xi)=&\ \mp\frac{H^2-aL^2z_{n-1}^2(\xi)}{L\sqrt{a^2L^2+bH^2}z_{n-1}(\xi)\mp HL\sqrt{a+bz_{n-1}^2(\xi)}},\quad (c=0,\ n=1,2,\cdots).\end{aligned} \tag{62}$$

当 $A=0,\ B=\dfrac{\alpha}{\mu\omega},\ C=c_1+\dfrac{3\alpha l}{\mu\omega},\ D=2c_1l+\dfrac{\alpha}{\mu\omega}+\dfrac{3\alpha l^2}{\mu\omega}$ 和 $E=c_1l^2+\dfrac{\alpha l+\alpha l^3}{\mu\omega}$, 满足第二节第一部分中给出的情况 5 时, 通过下列叠加公式, 获得 sinh-Gordon 方程的由双曲函数和三角函数组成的尖锋孤立子无穷序列新精确解:

$$\begin{aligned}u_n(\xi)=&\ \ln\big(l+v_n(\xi)\big),\quad (n=0,1,2,\cdots),\\ v_n(\xi)=&\ \frac{\sqrt{a}L[L+Rz_n^2(\xi)]}{\sqrt{a}LP\mp\sqrt{-(\sqrt{b}L+\sqrt{a}R)^2P^2z_n(\xi)-P\sqrt{b}Rz_n^2(\xi)}},\quad (n=1,2,\cdots),\\ z_n^2(\xi)=&\ \frac{1}{4c}\big[-b+2cz_{n-1}^2(\xi)\mp2\sqrt{c}z_{n-1}'(\xi)\big],\quad (b^2-4ac=0,\ n=1,2,\cdots).\end{aligned} \tag{63}$$

在叠加 (61)—(63) 式中 $z_0(\xi)$ 由第一种椭圆方程 (5) 来确定. $P,\ Q,\ R,\ L$ 和 M_0 是非零任意常数.

4 结　论

文献 [1—4] 利用几种求解方法, 获得了 sin-Gordon 方程与 sinh-Gordon 方程的由 Jacobi 椭圆函数、三角函数、有理函数和双曲函数组成的有限多个新精确解. 实际上, 非线性偏微分方程存在无穷多个解. 因此, 本文研究了用辅助方程法, 构造 sin-Gordon 方程与 sinh-Gordon 方程的无穷序列新解问题, 获得了新结论.

在研究的过程中这两种方程, 通过函数变换都转化为辅助方程 (4) 的形式. 根据辅助方程 (4) 右端函数的解的情况, 通过初等积分法, 可以获得该

辅助方程的有限多个解. 但是, 为了达到本文的研究目的首先给出了辅助方程(4)与第一种椭圆方程的拟Bäcklund变换. 然后分几种情况, 利用第一种椭圆方程与Riccati方程解的非线性叠加公式等相关结论, 构造了sin-Gordon 方程与sinh-Gordon方程的无穷序列新解.

本文改进了辅助方程法[5−15], 已获得了sin-Gordon方程与sinh-Gordon方程的由Riemannθ函数、Jacobi椭圆函数、三角函数和双曲函数组成的无穷序列新精确解. 这些解包括了光滑孤立子解、紧孤立子解和尖锋孤立子解.

参考文献

[1] Sirendaoerji, Sun J 2002 *Phys. Lett. A* **298** 133

[2] Xie Y X, Tang J S 2005 *Chin. Phys.* **14** 1303

[3] Liu C S 2008 *Commun. Theor. Phys.* **49** 153

[4] Xu Z H, Chen H L, Xian D Q 2012 *Commun. Theor. Phys.* **57** 400

[5] Taogetusang, Bai Y M 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 100201 (in Chinese) [套格图桑, 白玉梅 2013 物理学报 **62** 100201]

[6] Sirendaoreji, Sun J 2003 *Phys. Lett. A* **309** 387

[7] Chen Y, Li B, Zhang H Q 2003 *Chin. Phys.* **12** 940

[8] LÜ Z S, Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* **39** 405

[9] Li D S, Zhang H Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 984

[10] Ma S H, Fang J P 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 180505 (in Chinese) [马松华, 方建平 2012 物理学报 **61** 180505]

[11] Liu S K, Fu Z T, Liu S D 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1923 (in Chinese) [刘式适, 付遵涛, 刘式达 2002 物理学报 **51** 1923]

[12] Lu D C, Hong B J, Tian L X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5617 (in Chinese) [卢殿臣, 洪宝剑, 田立新 2006 物理学报 **55** 5617]

[13] Wang M L, Li X Z, Zhang J L 2008 *Phys. Lett. A* **372** 417

[14] Taogetusang, Sirendaoerji, Li S M 2011 *Commun. Theor. Phys.* **55** 949

[15] Taogetusang, Sirendaoerji, Li S M 2010 *Chin. Phys. B* **19** 080303

New infinite sequence solutions to equations of sine-Gordon type*

Taogetusang† Yi Li-Na

(*The College of Mathematical Science, Inner Mongolia Normal University, Huhhot 010022, China*)

(Received 6 May 2014; revised manuscript received 13 June 2014)

Abstract

The following steps are given to search for new solutions to equations of sine-Gordon type. Step one, according to function transformation, the solving of sine-Gordon equation and sinh-Gordon equation is changed into the solving of two kinds of nonlinear ordinary differential equations. Step two, two kinds of nonlinear ordinary differential equations and quasi-Bäcklund transformation of the first kind of elliptic equation are obtained. Finally, new infinite sequence solutions to equations of sine-Gordon type are constructed by applying Bäcklund transformation and new solutions of the first kind of elliptic equation.

Keywords: function transformation, equations of sine-Gordon type, the first kind of elliptic equation, new infinite sequence solutions

PACS: 02.30.Ik, 02.30.Jr **DOI:** 10.7498/aps.63.210202

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11361040), the Science Research Foundation of Institution of Higher Education of Inner Mongolia Autonomous Region, China (Grant No. NJZY12031), and the Natural Science Foundation of Inner Mongolia Autonomous Region China (Grant No. 2010MS0111).

† Corresponding author. E-mail: tgts@imnu.edu.cn