

色关联的乘性和加性色噪声激励下 分段非线性模型的随机共振*

靳艳飞[†] 李贝

(北京理工大学宇航学院力学系, 北京 100081)

(2014年5月16日收到; 2014年6月17日收到修改稿)

研究了色关联的乘性和加性高斯色噪声与外周期信号共同激励下, 分段非线性系统的随机共振. 利用一致有色噪声近似和两态模型理论, 推导出系统稳态概率密度和信噪比的解析表达式, 分析了色噪声和周期信号对随机共振的影响, 发现系统中存在传统的随机共振和真实的随机共振现象. 同时, 系统的信噪比曲线的峰值随着噪声互关联系数和互关联时间的增加而减小.

关键词: 色噪声, 分段非线性系统, 随机共振

PACS: 05.40.-a, 02.50.-r

DOI: 10.7498/aps.63.210501

1 引言

1981年, Benzi等^[1]和Nicolis等^[2]提出了随机共振的概念并用来解释第四纪全球气象冰川期问题. 此后, 随机共振及其相关问题的研究成为物理、生物、化学、电子等各领域研究的热点问题^[3-8]. 在随机共振的研究中, 噪声对动力系统演化起决定性作用. 高斯噪声是实际研究中常用的噪声, 一般分为高斯白噪声和高斯色噪声. 然而, 真正的高斯白噪声是不存在的, 因为它需要无穷大的功率才能产生出来, 故在实际问题中大多是具有非零关联时间的高斯色噪声^[9-19]. Jung等^[9]对乘性色噪声激励下的双稳模型进行了研究并提出了一致有色噪声近似. Hängg等^[10]指出在色噪声驱动的过阻尼系统中, 噪声的有色性会抑制随机共振, 而对于欠阻尼系统, 色噪声能提高系统的随机共振. Cao等^[11]将噪声之间的互关联性引入双稳系统的研究, 给出了相应的一致有色噪声近似并推导出系统稳态概率密度的表达式. Luo等^[13]讨论了由两种不同色噪声和周期信号激励下双稳系统的

随机共振现象. 靳艳飞等^[14,15]研究了色噪声参数激励和周期调制噪声外激励联合作用下线性系统的随机共振, 发现系统中存在三种不同形式的随机共振. Xu等^[17,18]分别研究了Duffing-Van der pol系统和三势阱系统中由色噪声诱导动力学现象, 如随机分岔和随机共振.

在实际中, 由于系统中的物理限制, 系统的状态往往在状态空间的不同区域之间进行切换, 此时需要用分段系统来描述系统的动力学方程, 比如, 饱和系统、继电器系统、电子元件、超导器件等的数学模型都是分段模型. Liang^[20]研究了加性色噪声激励下具有抛物线势能分段系统的随机共振. Wang等^[21]研究了互关联乘性和加性高斯白噪声激励下分段锯齿系统的随机共振, 发现加性和乘性噪声强度对信噪比的影响是不同的. You等^[22]和Xie等^[23]将噪声之间的互关联性引入, 分别研究了对称和非对称分段锯齿系统的逃逸问题, 发现噪声关联性能诱导平均首次穿越时间的曲线出现共振和抑制现象. Fiasconaro等^[24]研究了高斯白噪声和分段噪声共同激励下, 非对称分段线性系统的激活共振现象. 作者^[25]研究了色关联的乘性和加性高

* 国家自然科学基金(批准号: 11272051)资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: jinyf@bit.edu.cn

斯色噪声驱动的分段非线性系统的平均首次穿越时间,发现系统平均首次穿越时间的大小与噪声关联系数的正负有关.

以往随机共振的研究大多集中于经典双稳系统,针对具有色关联的色噪声激励的分段动力系统的研究较少.本文研究了色关联的乘性和加性色噪声与外周期激励联合作用下的分段非线性系统的随机共振.利用一致有色噪声近似和两态模型理论,推导出系统信噪比的解析表达式,讨论了色噪声强度、噪声互关联系数、互关联时间以及周期信号的频率和幅值对系统随机共振的影响.

2 分段非线性系统的信噪比

考虑在外加周期信号作用下,色关联的乘性和加性色噪声共同激励的分段非线性系统的随机微分方程为

$$\dot{x}(t) = -U'(x) + x(t)\xi(t) + \eta(t) + \varepsilon \cos \Omega t, \quad (1)$$

式中, ε 和 Ω 分别为外周期信号的幅值和频率.分段非线性双稳系统的势函数为

$$U(x) = \begin{cases} \frac{a}{2}(x+1)^2 + \frac{k}{2}, & x < -\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \frac{b}{2}x^2, & -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \frac{a}{2}(x-1)^2 + \frac{k}{2}, & x > \frac{1}{\sqrt{3}}, \end{cases} \quad (2)$$

其中参数 $a > 0, b < 0, k$ 为常数. $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 是具有零均值和非零自关联时间 τ_1, τ_2 的色噪声,其统计性质如下:

$$\langle \xi(t) \rangle = \langle \eta(t) \rangle = 0,$$

$$\tilde{U}(x) = \begin{cases} \frac{a \ln e_1}{2m} - \frac{1}{e_2} \left[\sqrt{\frac{p}{q}} (\varepsilon \cos \Omega t - a) + \frac{ad}{m} \right] \arctan \left(\frac{e_3}{e_2} \right), & x < -\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \frac{b \ln e_1}{2m} - \frac{1}{e_2} \left[\sqrt{\frac{p}{q}} \varepsilon \cos \Omega t + \frac{bd}{m} \right] \arctan \left(\frac{e_3}{e_2} \right), & |x| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \frac{a \ln e_1}{2m} - \frac{1}{e_2} \left[\sqrt{\frac{p}{q}} (\varepsilon \cos \Omega t + a) + \frac{ad}{m} \right] \arctan \left(\frac{e_3}{e_2} \right), & x > \frac{1}{\sqrt{3}}, \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} e_1 &= mp x^2(t) + 2d\sqrt{pq}x(t) + qn, \\ e_2 &= \sqrt{mn - d^2}, \\ e_3 &= \sqrt{p/q}mx(t) + d, \\ m &= \frac{1}{1 + 2\tau_1}, \quad n = \frac{1}{1 + 2\tau_2}, \quad d = \frac{\lambda}{1 + 2\tau_3}. \end{aligned}$$

考虑绝热近似条件和分段函数的对称性,粒子

$$\begin{aligned} \langle \xi(t)\xi(t') \rangle &= \frac{p}{\tau_1} \exp \left[-\frac{|t-t'|}{\tau_1} \right], \\ \langle \eta(t)\eta(t') \rangle &= \frac{q}{\tau_2} \exp \left[-\frac{|t-t'|}{\tau_2} \right], \\ \langle \xi(t)\eta(t') \rangle &= \langle \eta(t)\xi(t') \rangle \\ &= \frac{\lambda\sqrt{pq}}{\tau_3} \exp \left[-\frac{1}{\tau_3}|t-t'| \right], \end{aligned} \quad (3)$$

其中, p 和 q 分别是乘性和加性噪声的噪声强度,参数 λ 为 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 之间的互关联系数, τ_3 是 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 之间的互关联时间.

根据(2)式,势函数 $U(x)$ 有两个稳定点 $x_1 = -1, x_2 = 1$ 和一个不稳定点 $x_3 = 0$.应用 Novikov 理论和一致有色噪声近似^[9,11],可得相应的 FPK 方程为

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} A(x)P(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x)P(x,t), \quad (4)$$

其中,

$$\begin{aligned} A(x) &= -U'(x) + \varepsilon \cos \Omega t + \frac{1}{2}B'(x), \\ B(x) &= \frac{px^2}{1 + 2\tau_1} + \frac{2\lambda\sqrt{pq}}{1 + 2\tau_3}x + \frac{q}{1 + 2\tau_2}. \end{aligned} \quad (5)$$

由(4)式可得系统的稳态概率函数为

$$P(x,t) = \frac{N}{\sqrt{B(x)}} \exp \left[-\frac{\tilde{U}(x)}{p} \right], \quad (6)$$

其中 N 是归一化常数,广义势函数 $\tilde{U}(x)$ 的表达式为

$$\tilde{U}(x) = -p \int \frac{-U'(x) + \varepsilon \cos \Omega t}{B(x)} dx, \quad (7)$$

由 x_1 所在的势阱跃迁到 x_2 所在的势阱的跃迁率以及相应的逆跃迁率 W_{\pm} 的表达式为

$$W_{\pm} = \frac{\sqrt{|ab|}}{2\pi} \times \exp\{E_1 + E_2 + E_3 + E_4\}, \quad (8)$$

其中

$$E_1 = \frac{1}{2mp} \ln \left[\frac{(pm \pm 2d\sqrt{pq} + qn)^a}{(pm/3 \pm 2d\sqrt{pq}/\sqrt{3} + qn)^{a-b} \cdot (qn)^b} \right],$$

$$E_2 = \frac{\pm a + (a - b)d/m}{pe_2} \arctan\left(\frac{\pm m\sqrt{p/3q} + d}{e_2}\right),$$

$$E_3 = -\frac{\sqrt{p/q}(\varepsilon \cos(\Omega t) \pm a) + ad/m}{pe_2} \times \arctan\left(\frac{\pm m\sqrt{p/q} + d}{e_2}\right),$$

$$E_4 = \frac{\sqrt{p/q}\varepsilon \cos(\Omega t) + bd/m}{pe_2} \arctan\left(\frac{d}{e_2}\right).$$

在弱周期信号 ($\varepsilon \ll 1$) 作用下, 根据两态模型理论, 可以推导出系统信噪比的解析表达式如下:

$$R_{SN} = \frac{\pi W_1 \varepsilon^2}{4W_0} \left[1 - \frac{W_1 \varepsilon^2}{2(W_0^2 + \Omega^2)} \right]^{-1}, \quad (9)$$

其中

$$\frac{1}{2}W_0 = W_{\pm}|_{\varepsilon \cos \Omega t=0},$$

$$\frac{1}{2}W_1 = -\left. \frac{dW_{\pm}}{d(A \cos \Omega t)} \right|_{\varepsilon \cos \Omega t=0}.$$

3 讨论

根据信噪比 R_{SN} 的表达式 (9), 下面我们分析外激励噪声和周期信号对信噪比的影响。

图 1 给出了系统信噪比 R_{SN} 分别作为乘性噪声强度 p 和加性噪声强度 q 的函数随不同的噪声关联系数 λ 变化的曲线. 由图 1(a) 可见, 信噪比曲线随着 p 的增加出现两个极值. 首先, 随着 p 的增加, R_{SN} 逐渐减小达到一个极小值, 出现抑制现象, 然后随着 p 的增加, R_{SN} 逐渐增大达到一个极大值, 此时系统出现了随机共振现象. 随着 λ 的增大, 峰值逐渐减小. 在图 1(b) 中, 信噪比 R_{SN} 随着 q 的增加出现明显的单峰曲线, 即传统的随机共振现象. 同时, 共振峰的位置随着 λ 的增加逐渐左移, 峰值的大小随着 λ 的增加而减小.

图 2 给出了系统信噪比 R_{SN} 分别作为乘性噪声强度 p 的函数随外周期信号频率 Ω 和幅值 ε 变化的曲线. 由图 2(a) 可见, 随着 p 的增加, 信噪比曲线出现两个极值. 且随着 Ω 的增大, 峰值逐渐减小. 如图 2(b) 所示, 信噪比 R_{SN} 随着 q 的增加出现随机共振现象. 同时, 共振峰值的大小随着 ε 的增加而增加, 这与物理直观是相符的.

图 3 描述了系统信噪比 R_{SN} 分别作为外周期信号频率 Ω 和乘性噪声强度 p 的函数变化的曲线. 在图 3(a) 中, 信噪比曲线随着 Ω 的增加出现漂亮

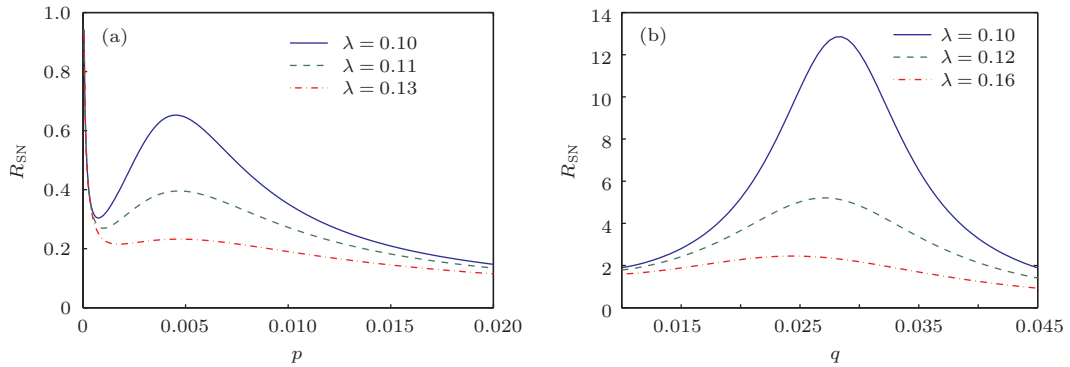


图 1 (网刊彩色) 信噪比 R_{SN} 随不同噪声关联系数 λ 变化的曲线 ($a = 0.07, b = -0.07, \tau_1 = 0.2, \tau_2 = 0.1, \tau_3 = 0.3, \varepsilon = 0.05, \Omega = 0.003$) (a) $R_{SN}-p$ 曲线, $q = 0.5$; (b) $R_{SN}-q$ 曲线, $p = 0.5$

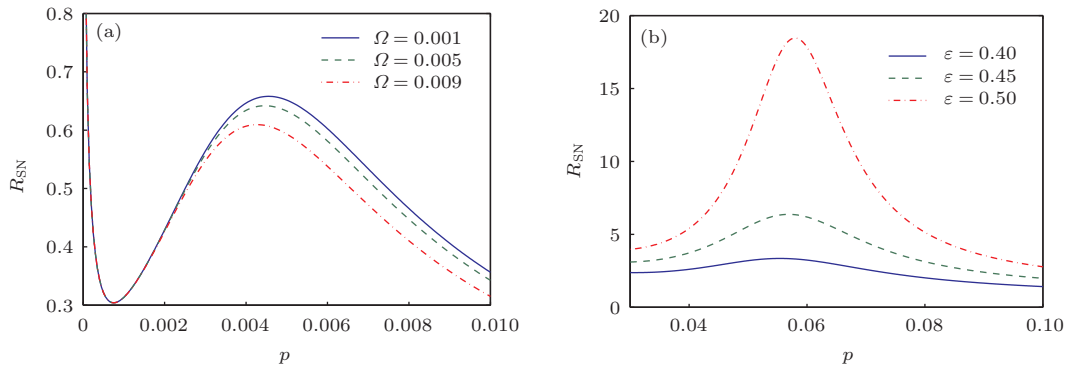


图 2 (网刊彩色) 信噪比 R_{SN} 作为乘性噪声强度 p 的函数 ($a = 0.07, b = -0.07, q = 0.5, \lambda = 0.1, \tau_1 = 0.2, \tau_2 = 0.1, \tau_3 = 0.3$) (a) 随信号频率 Ω 变化的曲线, $\varepsilon = 0.05$; (b) 随信号幅值 ε 变化的曲线, $\Omega = 0.8$

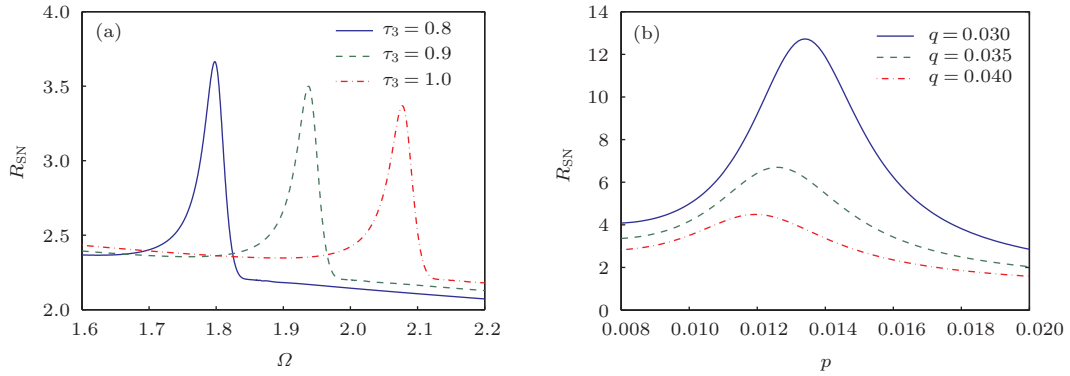


图3 (网刊彩色) 信噪比 R_{SN} 曲线 ($a = 0.01, b = -0.01, \lambda = 0.1, \tau_1 = 0.2, \tau_2 = 0.1$) (a) 作为频率 Ω 的函数随互关联时间 τ_3 变化, $p = q = 0.05, \varepsilon = 0.1$; (b) 作为乘性噪声强度 p 的函数随加性噪声强度 q 变化, $\tau_3 = 0.3, \varepsilon = 0.05, \Omega = 0.003$

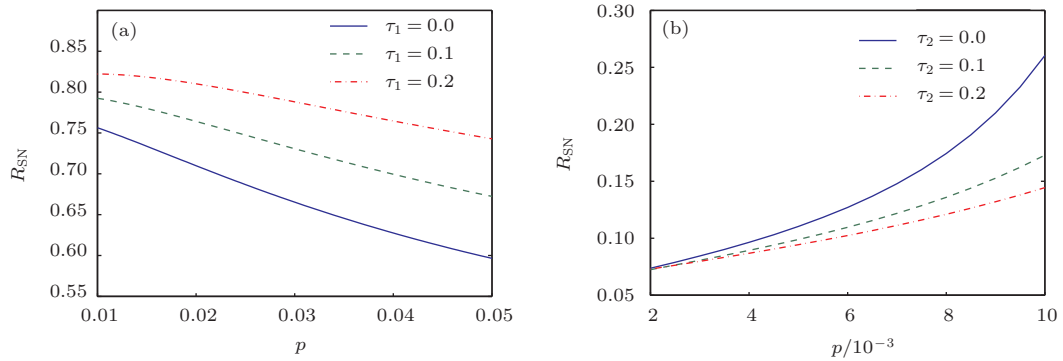


图4 (网刊彩色) 信噪比 R_{SN} 曲线作为乘性噪声强度 p 的函数 ($a = 0.07, b = -0.07, \lambda = 0.1, \tau_3 = 0.3, \varepsilon = 0.05, \Omega = 0.003$) (a) 随乘性噪声自关联时间 τ_1 变化, $q = 0.05, \tau_2 = 0.1$; (b) 随加性噪声自关联时间 τ_2 变化, $q = 0.5, \tau_1 = 0.2$

亮的单峰, 有真实的随机共振发生. 共振峰的位置随着噪声互关联时间 τ_3 的增加右移, 说明不同 τ_3 下, 随机共振发生时所需的最优 Ω 也是不同的. 由图3(b)可知, 信噪比曲线上共振峰的位置随着 q 的增加逐渐左移, 峰值的大小随着 q 的增加而减小. 说明系统随机共振的发生依赖于乘性和加性噪声强度的取值.

图4给出了信噪比 R_{SN} 作为乘性噪声强度 p 的函数随着不同的乘性噪声自关联时间 τ_1 和加性噪声自关联时间 τ_2 变化的曲线. 当加性噪声强度固定的情况下, 从图中看出三条曲线均为单调曲线, 说明系统在这组参数下没有随机共振发生. 随着 τ_1 的增大, R_{SN} 的值增大(见图4(a)). 在图4(b)中, 随着 τ_2 的增加, R_{SN} 的值减小. 说明乘性和加性噪声的有色程度影响着系统信噪比的大小.

4 结 论

本文研究了色关联的乘性和加性色噪声与外周期信号共同激励下, 分段非线性系统的随机共

振. 推导出信噪比的近似解析表达式并讨论了色噪声和周期信号对随机共振的影响. 通过分析发现: 在合适的系统参数选取的情况下, 系统会出现传统的随机共振和真实的随机共振, 且 $R_{SN}-p$ 曲线会出现先抑制后共振的现象. 噪声互关联系数、自关联时间以及互关联时间对信噪比的大小有影响. 文中得到的理论结果适用于弱噪声和弱周期信号的情形, 故对于较强噪声或强周期信号激励下, 分段系统的随机共振问题还有待于进一步的研究.

参考文献

- [1] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A 1981 *J. Phys. A* **14** L453
- [2] Nicolis C, Nicolis G 1981 *Tellus* **33** 225
- [3] Gammaitoni L, Hänggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
- [4] Hänggi P, Talkner P, Borkovec M 1990 *Rev. Mod. Phys.* **62** 251
- [5] Calvo O, Mirasso C R, Toral R 2001 *Electronics Lett.* **37** 1062
- [6] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear Systems* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Educa-

- tion Publishing House) (in Chinese) [胡岗 1994 随机力与非线性系统 (上海: 上海科技教育出版社)]
- [7] Yang J H, Liu X B 2010 *Chaos* **20** 033124
- [8] Xu C, Kang Y M 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 108701 (in Chinese) [徐超, 康艳梅 2011 物理学报 **60** 108701]
- [9] Jung P, Hänggi P 1987 *Phys. Rev. A* **35** 4464
- [10] Hänggi P, Jung P, Zerbe C, Moss F 1993 *J. Stat. Phys.* **70** 25
- [11] Cao L, Wu D J 1995 *Phys. Rev. E* **52** 3228
- [12] Xie C W, Mei D C 2003 *Chin. Phys.* **12** 1208
- [13] Luo X Q, Zhu S Q 2003 *Phys. Rev. E* **67** 021104
- [14] Jin Y F, Xu W, Xu M, Fang T 2005 *J. Phys. A* **38** 3733
- [15] Jin Y F, Hu H Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2895 (in Chinese) [靳艳飞, 胡海岩 2009 物理学报 **58** 2895]
- [16] Liu K H, Jin Y F 2013 *Physica A* **392** 5283
- [17] Xu Y, Gu R C, Zhang H Q, Xu W, Duan J Q 2011 *Phys. Rev. E* **83** 056215
- [18] Zhang H Q, Xu Y, Xu W, Li X 2012 *Chaos* **22** 043130
- [19] Wang K K, Liu X B 2014 *Chin. Phys. B* **23** 010502
- [20] Liang G Y 2003 *Chin. Phys.* **12** 377
- [21] Wang J, Cao L, Wu D J 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 1416
- [22] You J Y, Cao L, Ke S Z, Wu D J 2001 *Eur. Phys. J. B* **20** 397
- [23] Xie C W, Mei D C, Wu D J 2003 *Eur. Phys. J. B* **33** 83
- [24] Fiasconaro A, Spagnolo B 2011 *Phys. Rev. E* **83** 041122
- [25] Li B, Jin Y F 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 150503 (in Chinese) [李贝, 靳艳飞 2013 物理学报 **62** 150503]

Stochastic resonance in a piecewise nonlinear system driven by colored correlated additive and multiplicative colored noises*

Jin Yan-Fei[†] Li Bei

(Department of Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

(Received 16 May 2014; revised manuscript received 17 June 2014)

Abstract

In this paper, we study the stochastic resonance in a piecewise nonlinear system driven by a periodic signal and colored noises, which is described by multiplicative and additive colored noises with colored cross-correlation. Using the two-state theory and the unified colored approximation, we can derive the analytical expressions of the steady-state probability density and the signal-to-noise ratio (SNR). Effects of colored noises and the periodic signal on SNR are presented. It is found that the conventional stochastic resonance and bona-fide stochastic resonance may exist in this system. Moreover, the value of the SNR peak decreases with increasing correlation time and correlation between the additive and multiplicative noises.

Keywords: colored noise, a piecewise nonlinear system, stochastic resonance

PACS: 05.40.-a, 02.50.-r

DOI: 10.7498/aps.63.210501

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11272051).

† Corresponding author. E-mail: jinyf@bit.edu.cn