

双层周期加肋有限长圆柱壳声散射精细特征研究

潘安¹⁾²⁾ 范军^{1)†} 王斌¹⁾ 陈志刚²⁾ 郑国垠³⁾

1)(上海交通大学, 海洋工程国家重点实验室, 上海 200240)

2)(中国舰船研究设计中心, 武汉 430064)

3)(武汉第二船舶设计研究所, 武汉 430064)

(2014年3月24日收到; 2014年6月9日收到修改稿)

研究了双层周期性加肋有限长圆柱壳在水中的声散射特性. 壳体振动用薄壳理论的 Donnell 方程描述, 环肋振动用相互独立的薄板纯弯曲振动和平面应力状态下的振动方程描述, 忽略弦间流体对环肋轴向力的作用. 数值计算给出远场收发合置情况下的周向目标强度和角度-频率谱图, 并据此进行机理分析. 计算结果表明远场散射声场中除壳体弹性贡献外, 弦间流体以及环肋与内外壳的相互作用对散射声场的贡献也是很重要的, 并且在角度-频率谱中出现了弦间流体引起的流体附加波以及周期环肋引起的 Bragg 散射等回波精细特征, 其中流体附加波是双层加肋圆柱壳声散射最重要的散射精细特征, 是以往单层圆柱壳声散射所不具有的现象. 最后通过实验对理论推导进行了验证, 实验与理论基本符合.

关键词: 声散射, 圆柱壳, 环肋, 流体附加波

PACS: 43.20.+g, 43.30.+m

DOI: 10.7498/aps.63.214301

1 引言

由于我国多数水下大型潜器的基本结构可以简化为双层加肋圆柱壳体, 所以研究水下双层加肋圆柱壳的声散射精细特征有重要应用价值. 通过分析声散射精细特征可以将双层加肋圆柱壳体的回波从水下诸多目标回波中辨识出来, 从而为水下目标识别、鱼雷精确制导以及潜器隐身等技术提供理论依据和指导. 由于西方国家的水下大型潜器基本结构大多是单层圆柱壳体, 所以国外对双层加肋圆柱壳的声散射研究比较少见, Skelton^[1]对无限长加单隔板圆柱壳声散射进行了理论研究, 然后其又将公式推广到了无限长双层加单隔板圆柱壳声散射中, 但未给出数值计算结果与实验验证, Skelton^[2-4]的方法随着肋板个数的增加, 计算量将成平方关系增长, 并不利于工程预报推广. 国内郑国垠^[5,6]对双层加肋圆柱壳体声散射进行了一系列的理论和实验研究, 但其未给出理论推导, 只是

提出了一种近似数值算法, 将内外壳体单独应用薄壳理论 Donnell 方程进行计算, 然后利用修正板块元方法描述环肋与内壳的相互作用, 最后将内外壳弹性散射声场和环肋与内壳相互作用的散射声场进行能量叠加得到总散射声场. 近似理论缺陷在于对环肋振动的描述是将其考虑才刚性体或者阻抗边界条件, 对环肋的振动描述不准确也描述不出环肋与内外壳在连接处的相互作用, 所以近似理论只适用于高频.

本文主要研究双层周期性加肋圆柱壳的声散射回波精细特征, 用薄壳理论的 Donnell 方程描述壳体振动, 用相互独立的薄板纯弯曲振动和平面应力状态下的振动方程描述隔板振动^[7], 并考虑轴向、切向、径向三个方向的力和弯矩共同作用, 最后导出散射声场的解析表示式. 值得注意的是, 当环肋处于真空状态下时, 文献^[7]的(14)式是没有问题的. 而当环肋处于弦间流体(一般为水)中时公式右端不应该为0, 而应该是弦间流体作用于环肋的轴向力. 但依然采用文献^[7]的(14)式对环肋轴向振

† 通讯作者. E-mail: fanjun@sytu.edu.cn

动进行描述是因为便于工程应用忽略了弦间流体对环肋轴向振动的影响. 本文首先给出了双层周期加肋有限长圆柱壳声散射的理论推导, 然后计算了双层周期加肋有限长圆柱壳轴向目标强度以及角度-频率谱, 并将计算结果和实验结果作对比, 最后在实验验模正确基础上计算了具有真实水下潜器近似尺寸的双层周期加肋有限长圆柱壳声散射场, 得到了散射精细特征.

2 理论分析

考虑同心同轴等长的有限长双层圆柱壳体, 内外壳之间横向加载多个圆环形弹性肋板, 外部流体密度为 ρ_{f1} 、声速为 c_{f1} , 弦间填充流体的密度为 ρ_{f2} 、声速为 c_{f2} , 以双层圆柱壳中心为坐标原点 O , 圆柱壳轴向方向为 z 轴建立直角坐标系, 如图 1 所示. 轴线上一点到中心点 O 的距离为 τ , 接收点到原点 O 的距离为 ρ_0 , 到轴线垂直距离为 r , 到轴线上一点距离为 ρ , $\rho = \sqrt{(z - \tau)^2 + r^2}$.

设外层圆柱壳半径为 a , 总长度为 $2L$, 厚度为 h_1 , 内层圆柱壳半径为 b , 总长度为 $2L$, 厚度为 h_2 . 环形肋板连接内外壳体, 所以环肋的外半径为 a , 内半径为 b , 厚度为 l_r , 环肋之间间距为 d , 环肋坐标为 $z = z_Q (Q = 1 : M_Q, M_Q \text{ 为环肋总个数})$. 平面波沿 xOz 平面入射与轴线夹角为 θ_i . 假设双层有限长圆柱壳的两端满足简支条件, 忽略圆柱壳两端面对散射声场的影响, 圆柱壳为细长体 ($a/L \gg 1$), 圆柱壳壳厚满足 Donnell 薄壳理论, 肋板厚度满足薄板理论.

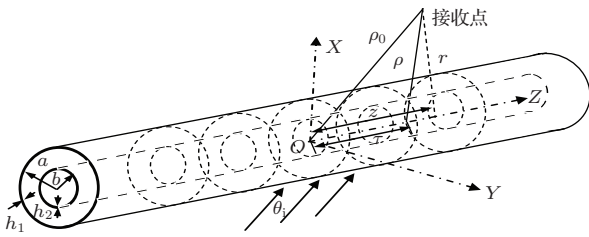


图 1 双层加肋有限长圆柱壳声散射示意图

2.1 外部流体声场

外层圆柱壳外部流体声场 p_e 可以写成如下形式:

$$p_e = p_i + p_{\text{rig}} + p_{\text{res}}, \quad (1)$$

其中 p_i 为入射声场, $p_i = e^{i(k_z z + k_x x - \omega t)}$, p_{rig} 为刚性引起的散射声场, p_{res} 为弹性引起的散射声场. ω

为角频率, $k_z = k \cos \theta_i$, $k_x = k \sin \theta_i$, $k = \omega/c_f$ 为外部流体波数, 其中时间因子 $e^{-i\omega t}$ 在后面推导中一概省略.

在柱坐标系下 $p_i, p_{\text{rig}}, p_{\text{res}}$ 取如下形式 [8]:

$$p_i = e^{ik_z z} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n \cos n\phi J_n(k_x a), \quad (2)$$

$$p_{\text{rig}} = -\frac{k}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n \frac{\cos n\phi}{\sin^n \theta_i} \left[\frac{J'_n}{H'_n} \right] (k_x a) \times \int_{-L}^L h_n(k\rho) \left(\frac{r}{\rho} \right)^n e^{ik_z \tau} d\tau, \quad (3)$$

$$p_{\text{res}} = \frac{k}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon_n i^n \cos n\phi b_{np} \times \int_{-L}^L h_n(k\rho) \left(\frac{r}{\rho} \right)^n \Phi_p(\tau) d\tau, \quad (4)$$

其中 J_n 是第一类柱贝塞尔函数, H_n 和 h_n 分别是第一类柱汉克尔函数和第一类球汉克尔函数, ε_n 为 Neumann 因子, 当 $n = 0$ 时, $\varepsilon_n = 1$, 当 $n > 0$ 时 $\varepsilon_n = 2$. $\Phi_p(\tau) = \sin[k_p(\tau + L)]$, $k_p = p\pi/2L$, $p = 1, 2, \dots, \infty$. b_{npj} 是由壳体振动方程和隔板振动方程并通过二者边界位移连续条件确定的未知数.

2.2 内外壳体振动

内外壳体振动均用薄壳 Donnell 方程描述, 其中下脚标 1 代表外壳的各参数, 下脚标 2 代表内壳的各参数.

$$r = a:$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \frac{1 - \mu_{1s}}{2a^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \phi^2} + \frac{1 + \mu_{1s}}{2a} \frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial \phi} + \frac{\mu_{1s}}{a} \frac{\partial w_1}{\partial z} + k_s^2 u_1 = -\frac{P_{1z}}{\rho_s c_s^2 h_1},$$

$$\frac{1 + \mu_{1s}}{2a} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial \phi} + \frac{1 - \mu_{1s}}{2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \phi^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial w_1}{\partial \phi} + k_s^2 v_1 = -\frac{P_{1\phi}}{\rho_s c_s^2 h_1},$$

$$\frac{\mu_{1s}}{a} \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial v_1}{\partial \phi} + \frac{w_1}{a^2} + \frac{h_1^2}{12} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)^2 w_1 - k_s^2 w_1 = -\frac{p_i + p_{\text{rig}} + p_{\text{res}} - p_{\text{in}} - P_{1r} - M_{1B}}{\rho_s c_s^2 h_1}; \quad (5a)$$

$$r = b:$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \frac{1 - \mu_{2s}}{2b^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \phi^2} + \frac{1 + \mu_{2s}}{2b} \frac{\partial^2 v_2}{\partial z \partial \phi} + \frac{\mu_{2s}}{b} \frac{\partial w_2}{\partial z} + k_s^2 u_2 = -\frac{P_{2z}}{\rho_s c_s^2 h_2},$$

$$\begin{aligned} & \frac{1 + \mu_{2s}}{2b} \frac{\partial^2 u_2}{\partial z \partial \phi} + \frac{1 - \mu_{2s}}{2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} + \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial \phi^2} \\ & + \frac{1}{b^2} \frac{\partial w_2}{\partial \phi} + k_s^2 v_2 = -\frac{P_{2\phi}}{\rho_s c_s^2 h_2}, \\ & \frac{\mu_{2s}}{b} \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{1}{b^2} \frac{\partial v_2}{\partial \phi} + \frac{w_2}{b^2} \\ & + \frac{h_2^2}{12} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)^2 w_2 - k_s^2 w_2 \\ & = -\frac{p_{in} + P_{2r} + M_{2B}}{\rho_s c_s^2 h_2}. \end{aligned} \quad (5b)$$

值得说明的是在Donnell方程中 p_i , p_{rig} , p_{res} 是在圆柱壳体附近的声场, 而当在圆柱壳体附近有 $r \ll L$, p_{rig} 可以用无限长刚性圆柱的散射声压近似, 并且对于在圆柱壳表面附近的弹性散射声场 p_{res} , 应用流体与壳体的位移连续条件也可求得, 具体推导见文献 [8]. 对于Donnell方程中弦间流体声场 p_{in} 有如下形式:

$$P_{in} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon_n i^n \cos n\phi \times [C_{np} J_n(\alpha_p r) + D_{np} Y_n(\alpha_p r)] \Phi_p, \quad (6)$$

其中

$$\alpha_p = \begin{cases} [k^2 - k_p^2]^{1/2}, & k > |k_p|, \\ i[k_p^2 - k^2]^{1/2}, & k < |k_p|. \end{cases}$$

2.3 内外壳体与弦间流体之间的边界条件

根据在 $r = a$ 和 $r = b$ 处的内外壳体与外部流体和弦间流体之间的径向位移连续条件如下:

$$\frac{\partial p_{res}}{\partial r} = \rho_f \omega^2 w_1, \quad r = a, \quad (7a)$$

$$\frac{\partial p_{in}}{\partial r} = \rho_f \omega^2 w_1, \quad r = a, \quad (7b)$$

$$\frac{\partial p_{in}}{\partial r} = \rho_f \omega^2 w_2, \quad r = b. \quad (7c)$$

可以得到

$$B_{np} = b_{np} \left(\frac{\alpha_p}{k} \right)^n, \quad (8a)$$

$$B_{np} = \frac{\rho_f \omega^2 a}{\alpha_p a H'_n(\alpha_p a)} w_{1np}, \quad (8b)$$

$$C_{np} = \frac{\rho_f \omega^2 a}{\alpha_p a} \times \frac{w_{1np} Y'_n(\alpha_p b) - w_{2np} Y'_n(\alpha_p a)}{J'_n(\alpha_p a) Y'_n(\alpha_p b) - J'_n(\alpha_p b) Y'_n(\alpha_p a)}, \quad (8c)$$

$$D_{np} = \frac{\rho_f \omega^2 a}{\alpha_p a}$$

2.4 环肋振动

对于环肋的力与弯矩有如下形式:

$r = a$:

$$\begin{aligned} P_{1z} &= \sum_{Q=1}^{M_Q} P_{1z}^Q \delta(z - z_Q), \\ P_{1\phi} &= \sum_{Q=1}^{M_Q} P_{1\phi}^Q \delta(z - z_Q), \\ P_{1r} &= \sum_{Q=1}^{M_Q} P_{1r}^Q \delta(z - z_Q), \\ M_{1B} &= \sum_{Q=1}^{M_Q} M_{1B}^Q \delta'(z - z_Q); \end{aligned} \quad (9a)$$

$r = b$:

$$\begin{aligned} P_{2z} &= \sum_{Q=1}^{M_Q} P_{2z}^Q \delta(z - z_Q), \\ P_{2\phi} &= \sum_{Q=1}^{M_Q} P_{2\phi}^Q \delta(z - z_Q), \\ P_{2r} &= \sum_{Q=1}^{M_Q} P_{2r}^Q \delta(z - z_Q), \\ M_{2B} &= \sum_{Q=1}^{M_Q} M_{2B}^Q \delta'(z - z_Q). \end{aligned} \quad (9b)$$

其中上角标 Q 代表环肋编号 ($Q = 1 : M_Q$), M_Q 为环肋个数, z_Q 为环肋位置坐标. 对 P_{1z} , $P_{1\phi}$, P_{1r} , M_{1B} , P_{2z} , $P_{2\phi}$, P_{2r} , M_{2B} 中的 $\delta(z - z_Q) \delta'(z - z_Q)$, 分别做 $\cos[k_p(z_Q + L)]$, $\sin[k_p(z_Q + L)]$, $\sin[k_p(z_Q + L)]$, $\sin[k_p(z_Q + L)]$, $\cos[k_p(z_Q + L)]$, $\sin[k_p(z_Q + L)]$, $\sin[k_p(z_Q + L)]$, $\sin[k_p(z_Q + L)]$ 傅里叶展开可得

$r = a$:

$$\begin{aligned} P_{1z} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{Q=1}^{M_Q} \varepsilon_n i^n \cos n\phi \cos[k_p(z_Q + L)] \\ &\quad \times \cos[k_p(z + L)] P_{1zn}^Q / L, \\ P_{1\phi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{Q=1}^{M_Q} \varepsilon_n i^n \sin n\phi \sin[k_p(z_Q + L)] \\ &\quad \times \sin[k_p(z + L)] P_{1\phi n}^Q / L, \\ P_{1r} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{Q=1}^{M_Q} \varepsilon_n i^n \cos n\phi \sin[k_p(z_Q + L)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \sin[k_p(z+L)]P_{1rn}^Q/L, \\
 M_{1B} = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{Q=1}^{M_Q} \varepsilon_n i^n \cos n\phi \cos[k_p(z_Q+L)] \\
 & \times \sin[k_p(z+L)](-k_p)M_{1Bn}^Q/L; \quad (10a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \sin[k_p(z+L)]P_{2rn}^Q/L, \\
 M_{2B} = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{Q=1}^{M_Q} \varepsilon_n i^n \cos n\phi \cos[k_p(z_Q+L)] \\
 & \times \sin[k_p(z+L)](-k_p)M_{2Bn}^Q/L. \quad (10b)
 \end{aligned}$$

$r = b$:

$$\begin{aligned}
 P_{2z} = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{Q=1}^{M_Q} \varepsilon_n i^n \cos n\phi \cos[k_p(z_Q+L)] \\
 & \times \cos[k_p(z+L)]P_{2zn}^Q/L, \\
 P_{2\phi} = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{Q=1}^{M_Q} \varepsilon_n i^n \sin n\phi \sin[k_p(z_Q+L)] \\
 & \times \sin[k_p(z+L)]P_{2\phi n}^Q/L, \\
 P_{2r} = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{Q=1}^{M_Q} \varepsilon_n i^n \cos n\phi \sin[k_p(z_Q+L)]
 \end{aligned}$$

应用薄板理论, 环肋的振动可以分解为相互独立的弯曲振动与伸缩振动, 弯曲振动产生轴向力和弯矩, 伸缩振动产生切向力和径向力. 通过 (10) 式以及在 $z = md, r = a, r = b$ 处壳体与环肋的边界位移连续条件:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ u_1, v_1, w_1, \frac{\partial w_1}{\partial z}, u_2, v_2, w_2, \frac{\partial w_2}{\partial z} \right\} \\
 = & \left\{ \eta_1, z_{1\phi}, z_{1r}, \frac{\partial \eta_1}{\partial r}, \eta_2, z_{2\phi}, z_{2r}, \frac{\partial \eta_2}{\partial r} \right\}
 \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} P_{1znp}^Q \\ P_{1\phi np}^Q \\ P_{1rnp}^Q \\ M_{1Bnp}^Q \\ P_{2znp}^Q \\ P_{2\phi np}^Q \\ -P_{2rnp}^Q \\ -M_{2Bnp}^Q \end{bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} RT_{11} & 0 & 0 & RT_{12} & RT_{13} & 0 & 0 & RT_{14} \\ 0 & AB_{22} & AB_{21} & 0 & 0 & AB_{24} & AB_{23} & 0 \\ 0 & AB_{12} & AB_{11} & 0 & 0 & AB_{14} & AB_{13} & 0 \\ RT_{21}(-k_p) & 0 & 0 & RT_{22}(-k_p) & RT_{23}(-k_p) & 0 & 0 & RT_{24}(-k_p) \\ RT_{31} & 0 & 0 & RT_{32} & RT_{33} & 0 & 0 & RT_{34} \\ 0 & AB_{42} & AB_{41} & 0 & 0 & AB_{44} & AB_{43} & 0 \\ 0 & -AB_{32} & -AB_{31} & 0 & 0 & -AB_{34} & -AB_{33} & 0 \\ -RT_{41}(-k_p) & 0 & 0 & -RT_{42}(-k_p) & -RT_{43}(-k_p) & 0 & 0 & -RT_{44}(-k_p) \end{bmatrix} \\
 & \times \begin{bmatrix} \sum_{p'=1}^{\infty} \sum_{Q=1}^{M_Q} u_{1np'} \cos[k_{p'}(z_Q+L)] \cos[k_p(z_Q+L)] \\ \sum_{p'=1}^{\infty} \sum_{Q=1}^{M_Q} v_{1np'} \sin[k_{p'}(z_Q+L)] \sin[k_p(z_Q+L)] \\ \sum_{p'=1}^{\infty} \sum_{Q=1}^{M_Q} w_{1np'} \sin[k_{p'}(z_Q+L)] \sin[k_p(z_Q+L)] \\ \sum_{p'=1}^{\infty} \sum_{Q=1}^{M_Q} k_{p'} w_{1np'} \cos[k_{p'}(z_Q+L)] \cos[k_p(z_Q+L)] \\ \sum_{p'=1}^{\infty} \sum_{Q=1}^{M_Q} u_{2np'} \cos[k_{p'}(z_Q+L)] \cos[k_p(z_Q+L)] \\ \sum_{p'=1}^{\infty} \sum_{Q=1}^{M_Q} v_{2np'} \sin[k_{p'}(z_Q+L)] \sin[k_p(z_Q+L)] \\ \sum_{p'=1}^{\infty} \sum_{Q=1}^{M_Q} w_{2np'} \sin[k_{p'}(z_Q+L)] \sin[k_p(z_Q+L)] \\ \sum_{p'=1}^{\infty} \sum_{Q=1}^{M_Q} k_{p'} w_{2np'} \cos[k_{p'}(z_Q+L)] \cos[k_p(z_Q+L)] \end{bmatrix}, \quad (11)
 \end{aligned}$$

其中 $\{\eta, z_\varphi, z_r\}$ 分别代表环肋的板外振动的横向位移、板内振动的径向与剪切位移, 矩阵 RT 与矩阵 AB 各元素以及推导参见附录 (A1)—(A19) 式.

2.5 散射声场

将 (11) 式代入内外壳体的 Donnell 方程中得到

$$\begin{bmatrix} u_{1np} \\ v_{1np} \\ w_{1np} \\ k_p w_{1np} \\ u_{2np} \\ v_{2np} \\ w_{2np} \\ k_p w_{2np} \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho_s c_s^2 h_1 L} F A \begin{bmatrix} \sum_{Q=1}^{M_Q} U S_{1nQ} \cos[k_p(z_Q + L)] \\ \sum_{Q=1}^{M_Q} V S_{1nQ} \sin[k_p(z_Q + L)] \\ \sum_{Q=1}^{M_Q} W S_{1nQ} \sin[k_p(z_Q + L)] \\ \sum_{Q=1}^{M_Q} K W S_{1nQ} \cos[k_p(z_Q + L)] \\ \sum_{Q=1}^{M_Q} U S_{2nQ} \cos[k_p(z_Q + L)] \\ \sum_{Q=1}^{M_Q} V S_{2nQ} \sin[k_p(z_Q + L)] \\ \sum_{Q=1}^{M_Q} W S_{2nQ} \sin[k_p(z_Q + L)] \\ \sum_{Q=1}^{M_Q} K W S_{2nQ} \cos[k_p(z_Q + L)] \end{bmatrix} - \frac{1}{\rho_s c_s^2 h_1} \begin{bmatrix} F F_{13} P_{np} \\ F F_{23} P_{np} \\ F F_{33} P_{np} \\ k_p F F_{33} P_{np} \\ F F_{43} P_{np} \\ F F_{53} P_{np} \\ F F_{63} P_{np} \\ k_p F F_{63} P_{np} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} U S_{1nQ} \\ V S_{1nQ} \\ W S_{1nQ} \\ K W S_{1nQ} \\ U S_{2nQ} \\ V S_{2nQ} \\ W S_{2nQ} \\ K W S_{2nQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{q=1}^{\infty} u_{1nq} \cos[k_q(z_Q + L)] \\ \sum_{q=1}^{\infty} v_{1nq} \sin[k_q(z_Q + L)] \\ \sum_{q=1}^{\infty} w_{1nq} \sin[k_q(z_Q + L)] \\ \sum_{q=1}^{\infty} k_q w_{1nq} \cos[k_q(z_Q + L)] \\ \sum_{q=1}^{\infty} u_{2nq} \cos[k_q(z_Q + L)] \\ \sum_{q=1}^{\infty} v_{2nq} \sin[k_q(z_Q + L)] \\ \sum_{q=1}^{\infty} w_{2nq} \sin[k_q(z_Q + L)] \\ \sum_{q=1}^{\infty} k_q w_{2nq} \cos[k_q(z_Q + L)] \end{bmatrix}. \quad (13)$$

矩阵 FF , FA 各元素见附录 (A20)—(A26) 式. 为求 u_{1np} , v_{1np} , w_{1np} , $k_p w_{1np}$, u_{2np} , v_{2np} , w_{2np} , $k_p w_{2np}$ 需要先求 US_{1nQ} , VS_{1nQ} , WS_{1nQ} , KWS_{1nQ} , US_{2nQ} , VS_{2nQ} , WS_{2nQ} , KWS_{2nQ} , 将上式每行各乘以 $\cos[k_p(z_j + L)]$, $\sin[k_p(z_j + L)]$,

$\sin[k_p(z_j + L)]$, $\cos[k_p(z_j + L)]$, $\cos[k_p(z_j + L)]$, $\sin[k_p(z_j + L)]$, $\sin[k_p(z_j + L)]$, $\cos[k_p(z_j + L)]$. 然后将上式按 $p = 1 : \infty$ 叠加, 然后在按 $j = 1 : M_Q$ 展开, 得到 $8M_Q \times 8M_Q$ 的线性系统:

$$\begin{bmatrix} US_{1nj} \\ VS_{1nj} \\ WS_{1nj} \\ KWS_{1nj} \\ US_{2nj} \\ VS_{2nj} \\ WS_{2nj} \\ KWS_{2nj} \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho_s c_s^2 h_1 L} \times E_{8 \times 8} \times \begin{bmatrix} \cos[k_p(z_j + L)] \\ \sin[k_p(z_j + L)] \\ \sin[k_p(z_j + L)] \\ \cos[k_p(z_j + L)] \\ \cos[k_p(z_j + L)] \\ \sin[k_p(z_j + L)] \\ \sin[k_p(z_j + L)] \\ \cos[k_p(z_j + L)] \end{bmatrix} FA \times \begin{bmatrix} \sum_{Q=1}^{M_Q} US_{1nQ} \cos[k_p(z_Q + L)] \\ \sum_{Q=1}^{M_Q} VS_{1nQ} \sin[k_p(z_Q + L)] \\ \sum_{Q=1}^{M_Q} WS_{1nQ} \sin[k_p(z_Q + L)] \\ \sum_{Q=1}^{M_Q} KWS_{1nQ} \cos[k_p(z_Q + L)] \\ \sum_{Q=1}^{M_Q} US_{2nQ} \cos[k_p(z_Q + L)] \\ \sum_{Q=1}^{M_Q} VS_{2nQ} \sin[k_p(z_Q + L)] \\ \sum_{Q=1}^{M_Q} WS_{2nQ} \sin[k_p(z_Q + L)] \\ \sum_{Q=1}^{M_Q} KWS_{2nQ} \cos[k_p(z_Q + L)] \end{bmatrix} - \frac{1}{\rho_s c_s^2 h_1} \begin{bmatrix} FF_{13} P_{np} \cos[k_p(z_j + L)] \\ FF_{23} P_{np} \sin[k_p(z_j + L)] \\ FF_{33} P_{np} \sin[k_p(z_j + L)] \\ k_p FF_{33} P_{np} \cos[k_p(z_j + L)] \\ FF_{43} P_{np} \cos[k_p(z_j + L)] \\ FF_{53} P_{np} \sin[k_p(z_j + L)] \\ FF_{63} P_{np} \sin[k_p(z_j + L)] \\ k_p FF_{63} P_{np} \cos[k_p(z_j + L)] \end{bmatrix} \quad (14)$$

最终可以得到 $8M_Q \times 8M_Q$ 的线性方程组:

$$\{\rho_s c_s^2 h_1 L \times E_{8M_Q \times 8M_Q} - [UVW]_{8M_Q \times 8M_Q}\} \times S_{8M_Q \times 1}^- = -L \times [\bar{\Delta}]_{8M_Q \times 1}, \quad (15)$$

其中 (15) 式中的矩阵 E 为单位矩阵下角标为阶数, 矩阵 $[UVW]_{8M_Q \times 8M_Q}$, $[S_{8M_Q \times 1}^-]$, $[\bar{\Delta}_{8M_Q \times 1}]$ 各元素见附录 (A27)—(A31) 式. 通过 (15) 式

$$\begin{aligned} & [\bar{S}]_{8M_Q \times 1} \\ & = [US_{1nj}, VS_{1nj}, WS_{1nj}, KWS_{1nj}, \\ & \quad US_{2nj}, VS_{2nj}, WS_{2nj}, KWS_{2nj}]^T \\ & (j = 1 : M_Q) \end{aligned}$$

可解, 进而 w_{1np} 和 b_{np} 可求.

$$\begin{aligned}
 w_{1np} = & -\frac{1}{\rho_s c_s^2 h_1} P_{np} F F_{33} + \frac{1}{\rho_s c_s^2 h_1 L} \\
 & \times \left\{ \sum_{Q=1}^{M_Q} F A_{31} U S_{1nQ} \cos[k_p(z_Q + L)] \right. \\
 & + \sum_{Q=1}^{M_Q} F A_{32} V S_{1nQ} \sin[k_p(z_Q + L)] \\
 & + \sum_{Q=1}^{M_Q} F A_{33} W S_{1nQ} \sin[k_p(z_Q + L)] \\
 & + \left. \sum_{Q=1}^{M_Q} F A_{34} K W S_{1nQ} \cos[k_p(z_Q + L)] \right\} \\
 & + \frac{1}{\rho_s c_s^2 h_1 L} \\
 & \times \left\{ \sum_{Q=1}^{M_Q} F A_{35} U S_{2nQ} \cos[k_p(z_Q + L)] \right. \\
 & + \sum_{Q=1}^{M_Q} F A_{36} V S_{2nQ} \sin[k_p(z_Q + L)] \\
 & + \sum_{Q=1}^{M_Q} F A_{37} W S_{2nQ} \sin[k_p(z_Q + L)] \\
 & + \left. \sum_{Q=1}^{M_Q} F A_{38} K W S_{2nQ} \right. \\
 & \left. \times \cos[k_p(z_Q + L)] \right\}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

将(16)式代入(8)式中求出 b_{np} , 再将 b_{np} 代入(4)式, 最后将(3)式与(4)式同取球汉克尔函数在 $k\rho \gg 1$ 时的渐近式, 从而得到散射远场表示式

$$p_s = \frac{e^{ik\rho_0}}{\rho_0} (D_{\text{rig}} + D_{\text{res}}^{\text{ucs}} + D_{\text{res}}^a + D_{\text{res}}^b), \quad (17)$$

其中 D_{rig} 代表壳体刚性散射声场, $D_{\text{res}}^{\text{ucs}}$ 代表单纯圆柱壳体的弹性散射声场, D_{res}^a 与 D_{res}^b 分别是环肋与内外壳的相互作用产生的散射声场. 下面着重讨论收发合置情况, $\theta = \pi - \theta_i$, $\varphi = \pi$, 可得

$$\begin{aligned}
 D_{\text{rig}} = & \frac{i}{\pi k} \frac{\sin[2kL \cos \theta_i]}{\cos \theta_i} \\
 & \times \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-1)^n \frac{J'_n(k_x a)}{H'_n(k_x a)}, \quad (18a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{\text{res}}^{\text{ucs}} = & \frac{2L}{(\pi k_x a)^2} \frac{\rho_f \omega^2 a}{\rho_s c_s^2 h_1} \\
 & \times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{p \in p_l} \varepsilon_n (-1)^n \frac{F^2(k_z L, k_p L)}{[H'_n(k_x a)]^2} F F_{33}, \\
 p_l = & \left\{ k_p < k : |k_z - k_p| L < \pi \right\}, \quad (18b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{\text{res}}^a = & -\frac{1}{\pi} \frac{\rho_f \omega^2 a}{\rho_s c_s^2 h_1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p \in p_l} \sum_{Q=1}^{M_Q} \varepsilon_n (-1)^n \\
 & \times \frac{F(k_z L, k_p L)}{k_x a H'_n(k_x a)} \times \left\{ F A_{31} U S_{1nQ} \right. \\
 & \times \cos[k_p(z_Q + L)] + F A_{32} V S_{1nQ} \\
 & \times \sin[k_p(z_Q + L)] + F A_{33} W S_{1nQ} \\
 & \times \sin[k_p(z_Q + L)] + F A_{34} K W S_{1nQ} \\
 & \left. \times \cos[k_p(z_Q + L)] \right\}, \quad (18c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{\text{res}}^b = & -\frac{1}{\pi} \frac{\rho_f \omega^2 a}{\rho_s c_s^2 h_1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p \in p_l} \sum_{Q=1}^{M_Q} \varepsilon_n (-1)^n \\
 & \times \frac{F(k_z L, k_p L)}{k_x a H'_n(k_x a)} \times \left\{ F A_{35} U S_{2nQ} \right. \\
 & \times \cos[k_p(z_Q + L)] + F A_{36} V S_{2nQ} \\
 & \times \sin[k_p(z_Q + L)] + F A_{37} W S_{2nQ} \\
 & \times \sin[k_p(z_Q + L)] + F A_{38} K W S_{2nQ} \\
 & \left. \times \cos[k_p(z_Q + L)] \right\}. \quad (18d)
 \end{aligned}$$

3 数值结果

数值计算采用的模型参数如下: 外层圆柱壳半径 $a = 8$ cm, 总长度 $2L = 0.6$ m, 外壳壳体厚度 $h_1 = 0.8$ mm, 内层圆柱壳半径 $a = 4.5$ cm, 总长度 $2L = 0.6$ m, 内壳壳体厚度 $h_2 = 1$ mm. 环肋厚度 $l_r = 1$ mm, 环肋间距 $d = 6$ cm, 共11根环肋. 环肋与内外壳体采用同种材料, 杨氏模量 $E_s = E_r = 2.1 \times 10^{11}$ Pa, 泊松比 $\mu_s = \mu_r = 0.3$, 密度 $\rho_s = \rho_r = 8800$ kg/m³. 外部流体与内外壳之间弦间流体声速都为 $c_f = 1500$ m/s, 密度 $\rho_f = 1000$ kg/m³.

首先计算频点为30 kHz, 收发合置情况下双层加肋有限长圆柱壳声散射的目标强度随入射角 θ_i 变化结果, 分析弦间水层以及壳体弹性对远场声散射的影响. 然后计算双层加肋有限长圆柱壳背向声散射的角度-频率谱, 横坐标为角度 θ_i 从10°—170°步长为1°, 纵坐标为归一化频率 ka (k 是外部流体波数)从10—70, 步长为 $f_r/40$, f_r 为圆柱壳的环频率, 幅度范围-25 dB—5 dB, 并据此进行机理分析.

3.1 目标强度分析

通过图2可以看出以下几点:

1) 双层加肋圆柱壳声散射的目标强度随入射角的变化中, 在正横点处的目标强度值几何回波的

目标强度、壳体弹性的目标强度与整体的目标强度值基本一致, 说明双层加肋圆柱壳声散射中正横点处的目标强度是由壳体回波起主要作用.

2) 图 2(a) 在其他大部分角度范围内整体的目标强度要比几何回声的目标强度高 20 dB 到 40 dB 不等, 这表明当双层加肋圆柱壳在斜入射时目标强度是由弹性成分引起的, 并且强度远远高于几何散射回波. 而通过图 2(b) 可以看出单纯壳体弹性引起的散射声场比整体的散射声场也要低 5 dB 到 10 dB, 这说明斜入射时整体的目标强度中除单纯壳体弹性引起的成分外, 由弦间流体、环肋弹性以及环肋与内外壳的相互作用也对散射声场有很强的影响. 这也是双层加肋圆柱壳声散射的重要散射特征.

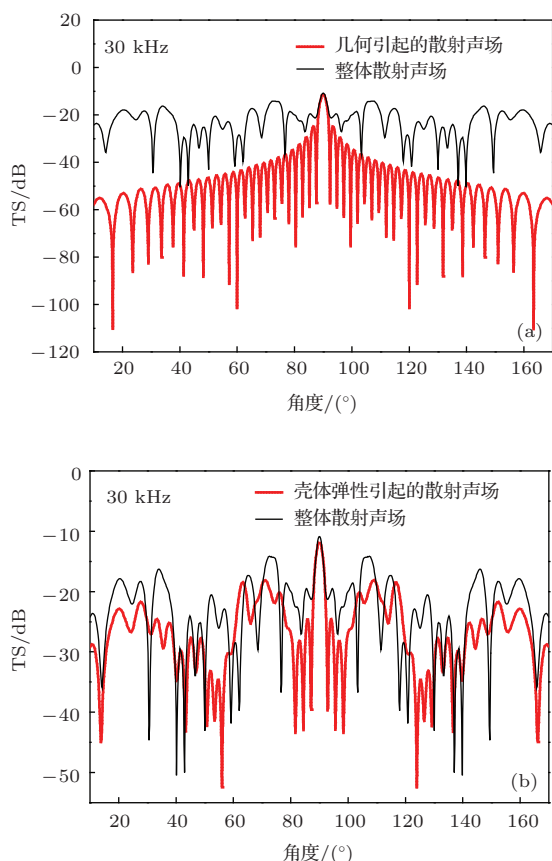


图 2 (网刊彩色) 目标强度随入射角变化 (a) 几何散射与整体对比; (b) 壳体弹性与整体对比

3.2 频率-角度谱分析

图 3 给出了双层加肋有限长圆柱壳声散射的频率-角度谱, 可以直观地分析双层加肋有限长圆柱壳声散射的回波精细特征以及频谱结构.

通过图 3 可以看出双层加肋有限长圆柱壳声散射的以下精细回波特征:

1) ka 较小时即低频段正横附近存在较为明显的由壳体弹性引起的纵波和剪切波共振现象, 这些共振亮线存在明显的截止角, 并且随着频率升高这些共振亮条纹出现了衰减, 这是因为随着频率升高圆柱壳体向刚性体趋近.

2) 在频率-角度谱中大部分角度范围之内出现了以外八字形式存在的亮条纹, 这些亮条纹是由于周期排列的环肋引起的 Bragg 散射.

3) 当入射角在 20° 到 60° 范围内, 出现了以碗形形式存在的亮条纹, 这些亮条纹可以说是双层加肋有限长圆柱壳声散射频率-角度谱中最明显的散射特征, 也是在斜入射时对散射声场贡献最为重要的散射特征. 这些碗形亮条纹是由于声波透过外壳后在弦间流体之间以回音廊形式传递的回波, 具体形成机理与理论分析可以参见文献 [9] 和 [10].

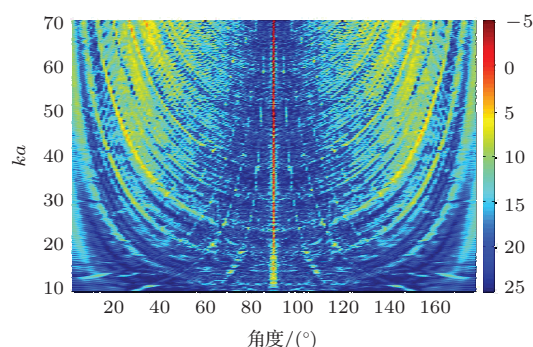


图 3 (网刊彩色) 双层加肋有限长圆柱壳频率-角度谱

4 实验

在中船重工 726 研究所试验站 (德清县对河口水库) 完成了验模实验, 实验水域水深 20 m. 实验模型如图 4 所示, 模型参数为外层圆柱壳半径 $a = 8$ cm, 总长度 $2L = 0.6$ m, 外壳壳体厚度 $h_1 = 0.8$ mm, 内层圆柱壳半径 $b = 4.5$ cm, 总长度 $2L = 0.6$ m, 内壳壳体厚度 $h_2 = 1$ mm. 环肋厚度 $l_r = 1$ mm, 环肋间距 $d = 6$ cm, 共 11 根环肋. 模型材料为不锈钢. 实验布放图如图 5 所示, 发射换能器和目标之间距离为 6 m, 二者保持同一水平位置深度为 4 m, 换能器开角 $\theta = 9^\circ$, 可以保证主波束覆盖整个模型. 另外目标与发射换能器之间放一铅球, 旨在利用比较法测试双层加肋有限长圆柱壳的目标强度, 但由于铅球位于中间, 利用对比法时需要对比铅球的回波做传递损失修正.

图 6 给出在单频脉冲声信号激励下双层加肋

有限长圆柱壳目标强度随入射角变化的理论与实验对比结果, 其中脉冲频率为 30 kHz, 脉宽为 1 ms.



图4 (网刊彩色) 实验所用模型照片

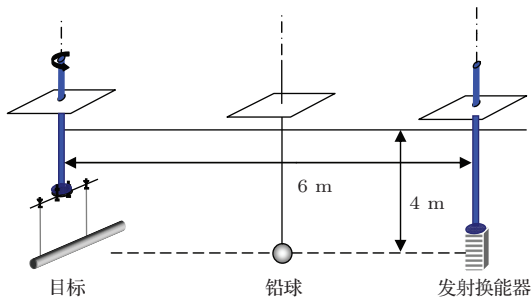


图5 (网刊彩色) 实验布放

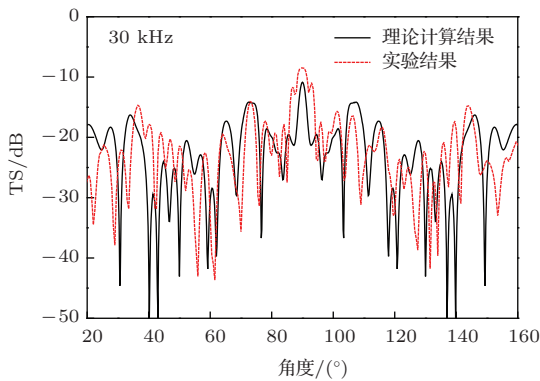


图6 (网刊彩色) 30 kHz 时理论计算与实验结果对比

通过图 6 可以看出理论计算得到的目标强度与实验得到的目标强度基本符合, 可以有效的预报双层加肋有限长圆柱壳的目标强度. 但从对比图可以看出正横位置时实验的目标强度要比理论计算的目标强度高, 这是因为为了减弱端面效应对散射声场的影响, 在双层加肋圆柱壳的两端加了长度为 30 cm PVC 材料的套管, 所以正横位置时由于套管

也是圆柱形, 所以其对目标强度的影响不能忽略.

图 7 给出的是脉宽 0.5 ms、带宽 20—200 kHz ($ka \approx 6.5—65$) 的线性调频信号激励下的双层加肋有限长圆柱壳声散射的频率-角度谱. 图 8 给出的是理论计算得到的双层加肋有限长圆柱壳声散射的角度频率谱.

通过图 7 和图 8 对比可以看出理论预报与实验基本符合, $ka = 10—40$ 范围内以外八字形式存在的 Bragg 散射条纹实验和理论符合较好, 并且二者都是低阶次的 Bragg 散射共振较为强烈, 而高阶次的 Bragg 散射衰减比较严重. 另外, 实验在大部分角度范围内也出现了以碗形亮线, 并且也有分簇的现象, 与理论计算基本符合. 所以理论计算基本可以有效的预报双层加肋有限长圆柱壳声散射的频谱特征, 对双层加肋有限长圆柱壳的声散射研究提供理论基础.

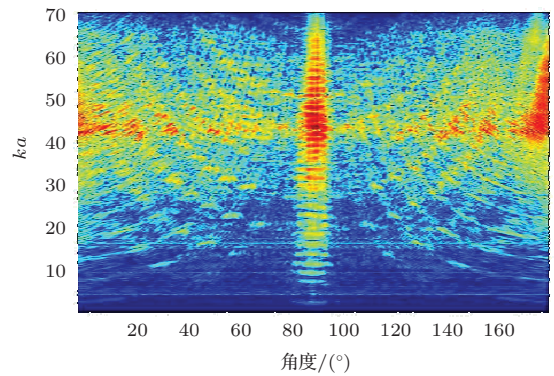


图7 (网刊彩色) 实验测得的后向散射声场频率-角度谱

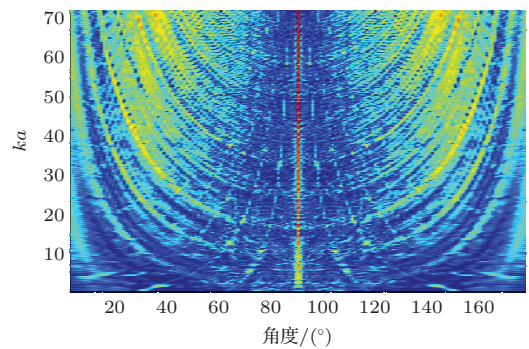


图8 (网刊彩色) 理论仿真的双层加肋有限长圆柱壳频率-角度谱

5 工程应用

根据实验与理论对比验证了整套理论体系基本可以预报双层加肋圆柱壳声射的特性. 由于水下大型潜器主体结构都可以简化为双层加肋圆柱

壳, 所以将模型的基本参数按大型实际潜器的尺寸设置, 旨在预报实际尺寸下的双层加肋圆柱壳声散射的一些特性, 为工程提取双层壳体潜器的回波精细特征打下理论基础, 提供理论依据. 模型参数参考文献 [11, 12], 模型具体参数如下: 外层圆柱壳半径 $a = 4.3$ m, 总长度 $2L = 60$ m, 外壳壳体厚度 $h_1 = 0.01$ m, 内层圆柱壳半径取两种情况 $b = 3.5$ m 和 $b = 2.5$ m, 总长度 $2L = 60$ m, 内壳壳体厚度 $h_2 = 0.028$ m. 环肋厚度 $l_r = 0.01$ m, 环肋间距 $d = 3$ m, 共 21 根环肋. 环肋与内外壳体采用同种材料, 杨氏模量 $E_s = E_r = 2.1 \times 10^{11}$ Pa, 泊松比 $\mu_s = \mu_r = 0.3$, 密度 $\rho_s = \rho_r = 8800$ kg/m³. 外部流体与内外壳之间弦间流体声速都为 $c_f = 1500$ m/s, 密度 $\rho_f = 1000$ kg/m³.

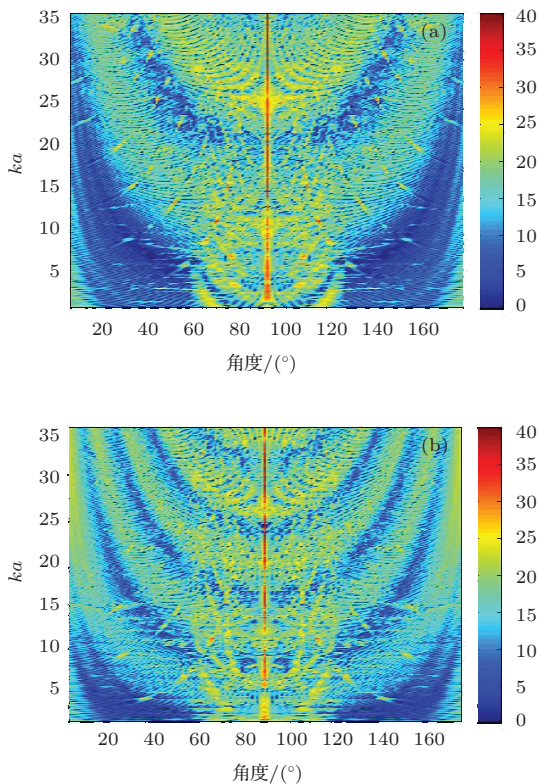


图 9 (网刊彩色) 不同内壳半径的双层加肋圆柱壳声散射场 (a) $b = 3.5$ m; (b) $b = 2.5$ m

图 9 给出按实艇尺寸设计下的外壳半径一定, 内壳半径变化时的双层加肋圆柱壳声散射的角度-频率谱, 纵坐标 ka 从 3.5—35, 频率相当于从 200 Hz—2 kHz. 通过此图可以看出按实艇尺寸设计后的双层加肋圆柱壳声散射中散射声场依然主要由三部分组成: 正横附近由壳体弹性引起的剪切波、纵波; 由周期排列的环肋引起的 Bragg 散射波; 由弦间流体引起的流体附加波.

通过对比图 9 (a), (b) 可以看出当外壳半径一定时, 内壳半径越小即弦间流体层越大时, 流体附加波的条纹分簇越多条纹越窄, 所以以碗形亮线存在的流体附加波在频谱图上的分布特征主要由弦间流体层的厚度有关. 可以想象当内壳半径无限趋近于外壳后双层加肋有限长圆柱壳的散射特征应该趋近于内部真空有限长圆柱壳声散射的特性, 而当内壳半径无限小的时候, 双层加肋有限长圆柱壳的散射特征应该趋近于内部充水有限长圆柱壳声散射的特性.

6 结 论

为了研究双层加肋有限长圆柱壳的声散射, 导出了双层加肋有限长圆柱壳声散射解析表达式. 内外壳的壳体振动均用薄壳理论的 Donnell 方程描述, 环肋的振动应用相互独立的薄板纯弯曲振动和平面应力状态下的振动方程描述, 同时考虑轴向、切向、径向三个方向的力和弯矩. 理论推导方面忽略了弦间水层对环肋在轴向方向上的影响, 即认为环肋在轴向上是完全透声的. 首先理论上针对收发合置情况下的双层加肋圆柱壳声散射的目标强度和背向散射的角度-频率谱进行研究. 然后通过实验对理论预报结果进行验证.

数值计算给出远场收发合置情况下的目标强度与角度-频率谱图, 通过分析研究了双层加肋有限长圆柱壳背向散射声场的特点, 包括:

1) 通过目标强度可以看出, 除正横位置以外的大部分角度范围内, 整体的目标强度都是由目标的弹性散射成分起主要作用, 并且在弹性散射成分中, 弦间流体与内外壳之间的耦合作用以及内壳和环肋之间的作用起主要贡献.

2) 通过频率-角度谱可以看出双层加肋圆柱壳背向散射声场, 主要分以下三部分, 分别是: 正横附近由壳体弹性引起的剪切波和纵波、由周期排列的环肋引起的 Bragg 散射以及弦间流体引起的流体附加波.

3) 通过实验对理论进行了验证, 证明理论基本可以预报双层加肋圆柱壳声散射的特征, 为提取双层加肋有限长圆柱壳的散射精细特征打下理论基础.

最后对实艇尺寸下的双层加肋有限长圆柱壳声散射进行了理论研究, 研究发现实艇尺寸下的双层加肋有限长圆柱壳散射声场中依旧由壳体弹性

波、Bragg 散射波和流体附加波三部分组成。并且流体附加波的条纹特征与弦间流体层厚度即内外壳半径差有关系。

附录

环肋的板外弯曲振动产生的轴向位移满足以下微分方程:

$$\nabla^4 \eta - \lambda^4 \eta = 0, \tag{A1}$$

其中 $\lambda^4 = \frac{\rho_r l_r \omega^2}{D}$, $D = \frac{E_r l_r^3}{12(1 - \mu_r^2)}$,

$$\eta^Q = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n [E_n J_n(\lambda r) + F_n I_n(\lambda r) + G_n Y_n(\lambda r) + L_n K_n(\lambda r)] \cos n\phi. \tag{A2}$$

板外弯曲振动产生轴向力如下形式:

$$P_{1z}^Q = D \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \eta^Q + \frac{1 - \mu_r}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \eta^Q}{\partial \phi} \right) \right] \right\},$$

$$P_{2z}^Q = -D \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \eta^Q + \frac{1 - \mu_r}{r} \times \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \eta^Q}{\partial \phi} \right) \right] \right\}. \tag{A3}$$

板外弯曲振动产生弯矩如下形式:

$$M_{1B}^Q = D \left[\frac{\partial^2 \eta^Q}{\partial r^2} + \mu_r \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \eta^Q}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta^Q}{\partial r} \right) \right],$$

$$M_{2B}^Q = -D \left[\frac{\partial^2 \eta^Q}{\partial r^2} + \mu_r \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \eta^Q}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta^Q}{\partial r} \right) \right], \tag{A4}$$

$$\begin{bmatrix} P_{1zn}^Q \\ M_{1Bn}^Q \\ P_{2zn}^Q \\ M_{2Bn}^Q \end{bmatrix} = RR \times TT^{-1} \begin{bmatrix} \eta_{1n}^Q \\ \frac{\partial \eta_{1n}^Q}{\partial r} \\ \eta_{2n}^Q \\ \frac{\partial \eta_{2n}^Q}{\partial r} \end{bmatrix}, \tag{A5}$$

其中 J, I 分别为第一类柱贝塞尔函数和第一类修正柱贝塞尔函数, Y, K 为第二类柱贝塞尔函数和第二类修正柱贝塞尔函数, E_n, F_n, G_n, L_n 为轴向位移的未知系数。对于 (A1) 式值得说明的一点就是严格来说环肋是处于弦间水中的所以其轴向振动方程右端不应该为 0, 而应该有一个力的表达形式, 这个力就是弦间水层作用于环肋的轴向力。依然采用 (A1) 式是由于忽略弦间水层对环肋的轴向作用, 认为环肋在轴向上是声透明的。矩阵 RR 各元素如下: 当 $r = a$ 处,

$$P_{1zn}^Q = RR_{11} E_n + RR_{12} F_n + RR_{13} G_n + RR_{14} L_n,$$

$$RR_{11} = D \left[\lambda^3 J_n'''(\lambda a) + \frac{\lambda^2}{a} J_n''(\lambda a) + J_n'(\lambda a) \left(-\frac{\lambda + (2 - \mu_r)\lambda n^2}{a^2} \right) + J_n(\lambda a) \frac{(3 - \mu_r)n^2}{a^3} \right], \tag{A6a}$$

$$RR_{12} = D \left[\lambda^3 I_n'''(\lambda a) + \frac{\lambda^2}{a} I_n''(\lambda a) + I_n'(\lambda a) \left(-\frac{\lambda + (2 - \mu_r)\lambda n^2}{a^2} \right) + I_n(\lambda a) \frac{(3 - \mu_r)n^2}{a^3} \right], \tag{A6b}$$

$$RR_{13} = D \left[\lambda^3 Y_n'''(\lambda a) + \frac{\lambda^2}{a} Y_n''(\lambda a) + Y_n'(\lambda a) \left(-\frac{\lambda + (2 - \mu_r)\lambda n^2}{a^2} \right) + Y_n(\lambda a) \frac{(3 - \mu_r)n^2}{a^3} \right], \tag{A6c}$$

$$RR_{14} = D \left[\lambda^3 K_n'''(\lambda a) + \frac{\lambda^2}{a} K_n''(\lambda a) + K_n'(\lambda a) \left(-\frac{\lambda + (2 - \mu_r)\lambda n^2}{a^2} \right) + K_n(\lambda a) \frac{(3 - \mu_r)n^2}{a^3} \right]. \tag{A6d}$$

当 $r = b$ 处,

$$P_{2zn}^Q = RR_{31} E_n + RR_{32} F_n + RR_{33} G_n + RR_{34} L_n,$$

$$RR_{31} = -D \left[\lambda^3 J_n'''(\lambda b) + \frac{\lambda^2}{b} J_n''(\lambda b) + J_n'(\lambda b) \left(-\frac{\lambda + (2 - \mu_r)\lambda n^2}{b^2} \right) + J_n(\lambda b) \frac{(3 - \mu_r)n^2}{b^3} \right], \tag{A7a}$$

$$RR_{32} = -D \left[\lambda^3 I_n'''(\lambda b) + \frac{\lambda^2}{b} I_n''(\lambda b) + I_n'(\lambda b) \left(-\frac{\lambda + (2 - \mu_r)\lambda n^2}{b^2} \right) + I_n(\lambda b) \frac{(3 - \mu_r)n^2}{b^3} \right], \tag{A7b}$$

$$RR_{33} = -D \left[\lambda^3 Y_n'''(\lambda b) + \frac{\lambda^2}{b} Y_n''(\lambda b) + Y_n'(\lambda b) \left(-\frac{\lambda + (2 - \mu_r)\lambda n^2}{b^2} \right) + Y_n(\lambda b) \frac{(3 - \mu_r)n^2}{b^3} \right], \tag{A7c}$$

$$RR_{34} = -D \left[\lambda^3 K_n'''(\lambda b) + \frac{\lambda^2}{b} K_n''(\lambda b) + K_n'(\lambda b) \left(-\frac{\lambda + (2 - \mu_r)\lambda n^2}{b^2} \right) + K_n(\lambda b) \frac{(3 - \mu_r)n^2}{b^3} \right]. \tag{A7d}$$

当 $r = a$ 处,

$$M_{1Bn}^Q = RR_{21} E_n + RR_{22} F_n + RR_{23} G_n + RR_{24} L_n,$$

$$RR_{21} = D \left[\lambda^2 J_n''(\lambda a) + \mu_r \frac{\lambda}{a} J_n'(\lambda a) - \mu_r \frac{n^2}{a^2} J_n(\lambda a) \right], \tag{A8a}$$

$$RR_{22} = D \left[\lambda^2 I_n''(\lambda a) + \mu_r \frac{\lambda}{a} I_n'(\lambda a) \right]$$

$$-\mu_r \frac{n^2}{a^2} I_n(\lambda a) \Big], \tag{A8b}$$

$$RR_{23} = D \left[\lambda^2 Y_n''(\lambda a) + \mu_r \frac{\lambda}{a} Y_n'(\lambda a) - \mu_r \frac{n^2}{a^2} Y_n(\lambda a) \right], \tag{A8c}$$

$$RR_{24} = D \left[\lambda^2 K_n''(\lambda a) + \mu_r \frac{\lambda}{a} K_n'(\lambda a) - \mu_r \frac{n^2}{a^2} K_n(\lambda a) \right]. \tag{A8d}$$

当 $r = b$ 处,

$$M_{2Bn}^Q = RR_{41} E_n + RR_{42} F_n + RR_{43} G_n + RR_{44} L_n, \tag{A9a}$$

$$RR_{41} = -D \left[\lambda^2 J_n''(\lambda b) + \mu_r \frac{\lambda}{b} J_n'(\lambda b) - \mu_r \frac{n^2}{b^2} J_n(\lambda b) \right],$$

$$RR_{42} = -D \left[\lambda^2 I_n''(\lambda b) + \mu_r \frac{\lambda}{b} I_n'(\lambda b) - \mu_r \frac{n^2}{b^2} I_n(\lambda b) \right], \tag{A9b}$$

$$RR_{43} = -D \left[\lambda^2 Y_n''(\lambda b) + \mu_r \frac{\lambda}{b} Y_n'(\lambda b) - \mu_r \frac{n^2}{b^2} Y_n(\lambda b) \right], \tag{A9c}$$

$$RR_{44} = -D \left[\lambda^2 K_n''(\lambda b) + \mu_r \frac{\lambda}{b} K_n'(\lambda b) - \mu_r \frac{n^2}{b^2} K_n(\lambda b) \right]. \tag{A9d}$$

矩阵 TT 各元素如下:

$$TT_{11} = J_n(\lambda a), \quad TT_{12} = I_n(\lambda a), \tag{A10a}$$

$$TT_{13} = Y_n(\lambda a), \quad TT_{14} = K_n(\lambda a),$$

$$TT_{21} = \lambda J_n'(\lambda a), \quad TT_{22} = \lambda I_n'(\lambda a), \tag{A10b}$$

$$TT_{23} = \lambda Y_n'(\lambda a), \quad TT_{24} = \lambda K_n'(\lambda a),$$

$$TT_{31} = J_n(\lambda b), \quad TT_{32} = I_n(\lambda b), \tag{A10c}$$

$$TT_{33} = Y_n(\lambda b), \quad TT_{34} = K_n(\lambda b),$$

$$TT_{41} = \lambda J_n'(\lambda b), \quad TT_{42} = \lambda I_n'(\lambda b), \tag{A10d}$$

$$TT_{43} = \lambda Y_n'(\lambda b), \quad TT_{44} = \lambda K_n'(\lambda b).$$

矩阵 $RT = RR \times TT^{-1}$. 环肋的板内伸缩振动产生的切向和径向位移满足以下微分方程:

$$Z_r^Q = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi},$$

$$Z_\phi^Q = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} - \frac{\partial \Psi}{\partial r};$$

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n [M_n J_n(k_a r) + N_n Y_n(k_a r)] \cos n\phi,$$

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n [V_n J_n(k_b r) + W_n Y(k_b r)] \sin n\phi. \tag{A11}$$

其中, M_n, N_n 是纵波势函数未知系数, V_n, W_n 是横波势函数未知系数.

$$k_a = \frac{\omega}{c_a}, \quad k_b = \frac{\omega}{c_b},$$

$$c_a = \sqrt{\frac{E_r}{\rho_r(1-\mu_r^2)}}, \quad c_b = \sqrt{\frac{E_r}{2\rho_r(1+\mu_r)}},$$

$$\begin{bmatrix} P_{1rn}^Q \\ P_{1\phi n}^Q \\ P_{2rn}^Q \\ P_{2\phi n}^Q \end{bmatrix} = A \times B^{-1} \begin{bmatrix} Z_{1rn}^Q \\ Z_{1\phi n}^Q \\ Z_{2rn}^Q \\ Z_{2\phi n}^Q \end{bmatrix}. \tag{A12}$$

板内伸缩振动产生径向力如下形式:

$$P_{1r}^Q = -\frac{El_r}{1-\mu_r^2} \left[\frac{\partial Z_r^Q}{\partial r} + \mu_r \left(\frac{Z_r^Q}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Z_\phi^Q}{\partial \phi} \right) \right],$$

$$P_{2r}^Q = \frac{El_r}{1-\mu_r^2} \left[\frac{\partial Z_r^Q}{\partial r} + \mu_r \left(\frac{Z_r^Q}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Z_\phi^Q}{\partial \phi} \right) \right]. \tag{A13}$$

板内伸缩振动产生切向力如下形式:

$$P_{1\phi}^Q = -\frac{E_r l_r}{1-\mu_r^2} \frac{1-\mu_r}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial Z_r^Q}{\partial \phi} + \frac{\partial Z_\phi^Q}{\partial r} - \frac{Z_\phi^Q}{r} \right),$$

$$P_{2\phi}^Q = \frac{E_r l_r}{1-\mu_r^2} \frac{1-\mu_r}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial Z_r^Q}{\partial \phi} + \frac{\partial Z_\phi^Q}{\partial r} - \frac{Z_\phi^Q}{r} \right). \tag{A14}$$

矩阵 A 各元素如下: 当 $r = a$ 处,

$$P_{1nr}^Q = A_{11} M_n + A_{12} N_n + A_{13} V_n + A_{14} W_n,$$

$$A_{11} = -\frac{El_r}{1-\mu_r^2} \left[k_a^2 J_n''(k_a a) + \mu_r \frac{k_a}{a} J_n'(k_a a) - \mu_r \frac{n^2}{a^2} J_n(k_a a) \right], \tag{A15a}$$

$$A_{12} = -\frac{El_r}{1-\mu_r^2} \left[k_a^2 Y_n''(k_a a) + \mu_r \frac{k_a}{a} Y_n'(k_a a) - \mu_r \frac{n^2}{a^2} Y_n(k_a a) \right], \tag{A15b}$$

$$A_{13} = -\frac{El_r}{1-\mu_r^2} (1-\mu_r)(n) \times \left[\frac{k_b}{a} J_n'(k_b a) - \frac{1}{a^2} J_n(k_b a) \right], \tag{A15c}$$

$$A_{14} = -\frac{El_r}{1-\mu_r^2} (1-\mu_r)(n) \times \left[\frac{k_b}{a} Y_n'(k_b a) - \frac{1}{a^2} Y_n(k_b a) \right]. \tag{A15d}$$

当 $r = b$ 处,

$$P_{2nr}^Q = A_{31} M_n + A_{32} N_n + A_{33} V_n + A_{34} W_n,$$

$$A_{31} = \frac{El_r}{1-\mu_r^2} \left[k_a^2 J_n''(k_a b) + \mu_r \frac{k_a}{b} J_n'(k_a b) - \mu_r \frac{n^2}{b^2} J_n(k_a b) \right], \tag{A16a}$$

$$A_{32} = \frac{El_r}{1-\mu_r^2} \left[k_a^2 Y_n''(k_a b) + \mu_r \frac{k_a}{b} Y_n'(k_a b) - \mu_r \frac{n^2}{b^2} Y_n(k_a b) \right], \tag{A16b}$$

$$A_{33} = \frac{El_r}{1-\mu_r^2} (1-\mu_r)(n)$$

$$\times \left[\frac{k_b}{b} J'_n(k_b b) - \frac{1}{b^2} J_n(k_b b) \right], \quad (A16c)$$

$$A_{34} = \frac{El_r}{1 - \mu_r^2} (1 - \mu_r)(n) \times \left[\frac{k_b}{b} Y'_n(k_b b) - \frac{1}{b^2} Y_n(k_b b) \right]. \quad (A16d)$$

当 $r = a$ 处,

$$P_{1n\phi}^Q = A_{21}M_n + A_{22}N_n + A_{23}V_n + A_{24}W_n, \quad (A17a)$$

$$A_{21} = -\frac{El_r}{1 - \mu_r^2} \frac{1 - \mu_r}{2} \left[\frac{2n}{a^2} J_n(k_a a) - \frac{2n}{a} k_a J'_n(k_a a) \right],$$

$$A_{22} = -\frac{El_r}{1 - \mu_r^2} \frac{1 - \mu_r}{2} \left[\frac{2n}{a^2} Y_n(k_a a) - \frac{2n}{a} k_a Y'_n(k_a a) \right], \quad (A17b)$$

$$A_{23} = -\frac{El_r}{1 - \mu_r^2} \frac{1 - \mu_r}{2} \left[-J''_n(k_b a) k_b^2 + \frac{1}{a} J'_n(k_b a) k_b - \frac{n^2}{a^2} J_n(k_b a) \right], \quad (A17c)$$

$$A_{24} = -\frac{El_r}{1 - \mu_r^2} \frac{1 - \mu_r}{2} \left[-Y''_n(k_b a) k_b^2 + \frac{1}{a} Y'_n(k_b a) k_b - \frac{n^2}{a^2} Y_n(k_b a) \right]. \quad (A17d)$$

当 $r = b$ 处

$$P_{2n\phi}^Q = A_{41}M_n + A_{42}N_n + A_{43}V_n + A_{44}W_n, \quad (A18a)$$

$$A_{41} = \frac{El_r}{1 - \mu_r^2} \frac{1 - \mu_r}{2} \left[\frac{2n}{b^2} J_n(k_a b) - \frac{2n}{b} k_a J'_n(k_a b) \right],$$

$$A_{42} = \frac{El_r}{1 - \mu_r^2} \frac{1 - \mu_r}{2} \left[\frac{2n}{b^2} Y_n(k_a b) - \frac{2n}{b} k_a Y'_n(k_a b) \right], \quad (A18b)$$

$$A_{43} = \frac{El_r}{1 - \mu_r^2} \frac{1 - \mu_r}{2} \left[-J''_n(k_b b) k_b^2 + \frac{1}{b} J'_n(k_b b) k_b - \frac{n^2}{b^2} J_n(k_b b) \right], \quad (A18c)$$

$$A_{44} = \frac{El_r}{1 - \mu_r^2} \frac{1 - \mu_r}{2} \left[-Y''_n(k_b b) k_b^2 + \frac{1}{b} Y'_n(k_b b) k_b - \frac{n^2}{b^2} Y_n(k_b b) \right]. \quad (A18d)$$

矩阵 B 各元素如下:

$$B_{11} = k_a J'_n(k_a a), \quad B_{12} = k_a Y'_n(k_a a), \quad (A19a)$$

$$B_{13} = \frac{n}{a} J_n(k_b a), \quad B_{14} = \frac{n}{a} Y_n(k_b a),$$

$$B_{21} = -\frac{n}{a} J_n(k_a a), \quad B_{22} = -\frac{n}{a} Y_n(k_a a), \quad (A19b)$$

$$B_{23} = -k_b J'_n(k_b a), \quad B_{24} = -k_b Y'_n(k_b a),$$

$$B_{31} = k_a J'_n(k_a b), \quad B_{32} = k_a Y'_n(k_a b), \quad (A19c)$$

$$B_{33} = \frac{n}{b} J_n(k_b b), \quad B_{34} = \frac{n}{b} Y_n(k_b b),$$

$$B_{41} = -\frac{n}{b} J_n(k_a b), \quad B_{42} = -\frac{n}{b} Y_n(k_a b), \quad (A19d)$$

$$B_{23} = -k_b J'_n(k_b b), \quad B_{24} = -k_b Y'_n(k_b b).$$

矩阵 $AB = A \times B^{-1}$. 矩阵 FF 是内外壳体 Donnell 方程联立后系数矩阵 SS 的逆矩阵, 内外壳体联立后的 Donnell 方程有如下形式:

$$\begin{bmatrix} SS_{11}^1 & SS_{12}^1 & SS_{13}^1 & 0 & 0 & 0 \\ SS_{21}^1 & SS_{22}^1 & SS_{23}^1 & 0 & 0 & 0 \\ SS_{31}^1 & SS_{32}^1 & SS_{33}^1 & 0 & 0 & SS_{36}^2 \\ 0 & 0 & 0 & SS_{11}^2 & SS_{12}^2 & SS_{13}^2 \\ 0 & 0 & 0 & SS_{21}^2 & SS_{22}^2 & SS_{23}^2 \\ 0 & 0 & SS_{63}^1 & SS_{31}^2 & SS_{32}^2 & SS_{33}^2 \end{bmatrix}_{SS} \begin{bmatrix} u_{1np} \\ v_{1np} \\ w_{1np} \\ u_{2np} \\ v_{2np} \\ w_{2np} \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho_s c_s^2 h_1} \begin{bmatrix} P_{1znp} \\ P_{1\phi np} \\ P_{1rnp} + M_{1Bnp} \\ \frac{h_2}{h_1} P_{2znp} \\ \frac{h_2}{h_1} P_{2\phi np} \\ \frac{h_2}{h_1} (-P_{2rnp} - M_{2Bnp}) \end{bmatrix} - \frac{1}{\rho_s c_s^2 h_1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_{np} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (A20)$$

$$SS_{11}^1 = \left(k_p^2 + \frac{1 - \mu_s}{2a^2} n^2 - k_s^2 \right),$$

$$SS_{12}^1 = -\frac{1 + \mu_s}{2a} k_p n, \quad SS_{13}^1 = -\frac{\mu_s}{a} k_p,$$

$$SS_{21}^1 = -\frac{1 + \mu_s}{2a} k_p n,$$

$$SS_{22}^1 = \frac{1 - \mu_s}{2} k_p^2 + \frac{n^2}{a^2} - k_s^2, \quad SS_{23}^1 = \frac{n}{a^2},$$

$$SS_{31}^1 = -\frac{\mu_s}{a} k_p, \quad SS_{32}^1 = \frac{n}{a^2},$$

$$SS_{33}^1 = \frac{1}{a^2} + \beta_s^2 \left(a^2 k_p^4 + 2k_p^2 n^2 + \frac{n^4}{a^2} \right) - k_s^2$$

$$- \frac{\rho_f \omega^2 a}{\rho_s c_s^2 h \alpha_p a} \left[G_{1np} - \frac{H_n(\alpha_p a)}{H'_n(\alpha_p a)} \right],$$

$$SS_{36}^1 = \frac{\rho_f \omega^2 a}{\rho_s c_s^2 h(\alpha_p a)} G_{2np}. \quad (A21)$$

其中

$$G_{1np} = \frac{J_n(\alpha_p a) Y'_n(\alpha_p b) - J'_n(\alpha_p b) Y_n(\alpha_p a)}{J'_n(\alpha_p a) Y'_n(\alpha_p b) - J_n(\alpha_p b) Y'_n(\alpha_p a)}, \quad (A22a)$$

$$G_{2np} = \frac{J_n(\alpha_p a) Y'_n(\alpha_p a) - J'_n(\alpha_p a) Y_n(\alpha_p a)}{J'_n(\alpha_p a) Y'_n(\alpha_p b) - J_n(\alpha_p b) Y'_n(\alpha_p a)}. \quad (A22b)$$

$$\begin{aligned}
 SS_{11}^2 &= \left(k_p^2 + \frac{1-\mu_s}{2b^2} n^2 - k_s^2 \right), & SS_{33}^2 &= \frac{1}{b^2} + \beta_s^2 (b^2 k_p^4 + 2k_p^2 n^2 + \frac{n^4}{b^2}) - k_s^2 \\
 SS_{12}^2 &= -\frac{1+\mu_s}{2b} k_p n, & SS_{13}^2 &= -\frac{\mu_s}{b} k_p, & & + \frac{\rho_f \omega^2 b}{\rho_s c_s^2 h \alpha_p b} G_{4np}.
 \end{aligned} \tag{A23}$$

$$SS_{21}^2 = -\frac{1+\mu_s}{2b} k_p n, \quad \text{其中}$$

$$SS_{22}^2 = \frac{1-\mu_s}{2} k_p^2 + \frac{n^2}{b^2} - k_s^2, \quad SS_{23}^2 = \frac{n}{b^2}, \quad G_{3np} = \frac{J_n(\alpha_p b) Y'_n(\alpha_p b) - J'_n(\alpha_p b) Y_n(\alpha_p b)}{J'_n(\alpha_p a) Y'_n(\alpha_p b) - J'_n(\alpha_p b) Y_n(\alpha_p a)}, \tag{A24}$$

$$SS_{63}^2 = \frac{\rho_f \omega^2 a}{\rho_s c_s^2 h(\alpha_p a)} G_{3np}, \quad G_{4np} = \frac{J'_n(\alpha_p a) Y_n(\alpha_p b) - J_n(\alpha_p b) Y'_n(\alpha_p a)}{J'_n(\alpha_p a) Y'_n(\alpha_p b) - J'_n(\alpha_p b) Y_n(\alpha_p a)}. \tag{A25}$$

$$SS_{31}^2 = -\frac{\mu_s}{b} k_p, \quad SS_{32}^2 = \frac{n}{b^2},$$

矩阵 FA 有如下形式:

$$\begin{aligned}
 FA &= \begin{bmatrix} FF_{11} & FF_{12} & FF_{13} & -k_p FF_{13} & FF_{14} & FF_{15} & FF_{16} & -k_p FF_{16} \\ FF_{21} & FF_{22} & FF_{23} & -k_p FF_{23} & FF_{24} & FF_{25} & FF_{26} & -k_p FF_{26} \\ FF_{31} & FF_{32} & FF_{33} & -k_p FF_{33} & FF_{34} & FF_{35} & FF_{36} & -k_p FF_{36} \\ k_p FF_{31} & k_p FF_{32} & k_p FF_{33} & -k_p^2 FF_{33} & k_p FF_{34} & k_p FF_{35} & k_p FF_{36} & -k_p^2 FF_{36} \\ FF_{41} & FF_{42} & FF_{43} & -k_p FF_{43} & FF_{44} & FF_{45} & FF_{46} & -k_p FF_{46} \\ FF_{51} & FF_{52} & FF_{53} & -k_p FF_{53} & FF_{54} & FF_{55} & FF_{56} & -k_p FF_{56} \\ FF_{61} & FF_{62} & FF_{63} & -k_p FF_{63} & FF_{64} & FF_{65} & FF_{66} & -k_p FF_{66} \\ k_p FF_{61} & k_p FF_{62} & k_p FF_{63} & -k_p^2 FF_{63} & k_p FF_{64} & k_p FF_{65} & k_p FF_{66} & -k_p^2 FF_{66} \end{bmatrix} \\
 &\times \begin{bmatrix} RT_{11} & 0 & 0 & RT_{12} & RT_{13} & 0 & 0 & RT_{14} \\ 0 & AB_{22} & AB_{21} & 0 & 0 & AB_{24} & AB_{23} & 0 \\ 0 & AB_{12} & AB_{11} & 0 & 0 & AB_{14} & AB_{13} & 0 \\ RT_{21} & 0 & 0 & RT_{22} & RT_{23} & 0 & 0 & RT_{24} \\ RT_{31} \frac{h_1}{h_2} & 0 & 0 & RT_{32} \frac{h_1}{h_2} & RT_{33} \frac{h_1}{h_2} & 0 & 0 & RT_{34} \frac{h_1}{h_2} \\ 0 & AB_{42} \frac{h_1}{h_2} & AB_{41} \frac{h_1}{h_2} & 0 & 0 & AB_{44} \frac{h_1}{h_2} & AB_{43} \frac{h_1}{h_2} & 0 \\ 0 & AB_{32} \frac{h_1}{h_2} & AB_{31} \frac{h_1}{h_2} & 0 & 0 & AB_{34} \frac{h_1}{h_2} & AB_{33} \frac{h_1}{h_2} & 0 \\ RT_{41} \frac{h_1}{h_2} & 0 & 0 & RT_{42} \frac{h_1}{h_2} & RT_{43} \frac{h_1}{h_2} & 0 & 0 & RT_{44} \frac{h_1}{h_2} \end{bmatrix}. \tag{A26}
 \end{aligned}$$

矩阵 $[UVW]_{8M_Q \times 8M_Q}$ 的形式如下:

$$[UVW]_{8M_Q \times 8M_Q} = \begin{bmatrix} [UVW_1]_{M_Q \times 8M_Q} \\ [UVW_2]_{M_Q \times 8M_Q} \\ [UVW_3]_{M_Q \times 8M_Q} \\ [UVW_4]_{M_Q \times 8M_Q} \\ [UVW_5]_{M_Q \times 8M_Q} \\ [UVW_6]_{M_Q \times 8M_Q} \\ [UVW_7]_{M_Q \times 8M_Q} \\ [UVW_8]_{M_Q \times 8M_Q} \end{bmatrix}_{8M_Q \times 8M_Q}. \tag{A27}$$

$$\begin{aligned}
 [UVW_1]_{M_Q \times 8M_Q} &= \left[\sum_{p=1}^{\infty} FA_{11} \times T_1 \quad \sum_{p=1}^{\infty} FA_{12} \times T_2 \quad \sum_{p=1}^{\infty} FA_{13} \times T_2 \right. \\ &\times \sum_{p=1}^{\infty} FA_{14} \times T_1 \quad \sum_{p=1}^{\infty} FA_{15} \times T_1 \quad \sum_{p=1}^{\infty} FA_{16} \times T_2 \\ &\times \sum_{p=1}^{\infty} FA_{17} \times T_2 \quad \left. \sum_{p=1}^{\infty} FA_{18} \times T_1 \right], \tag{A28a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [UVW_2]_{M_Q \times 8M_Q} &= \left[\sum_{p=1}^{\infty} FA_{21} \times T_3 \quad \sum_{p=1}^{\infty} FA_{22} \times T_4 \quad \sum_{p=1}^{\infty} FA_{23} \times T_4 \right. \\ &\times \sum_{p=1}^{\infty} FA_{24} \times T_3 \quad \sum_{p=1}^{\infty} FA_{25} \times T_3 \quad \left. \sum_{p=1}^{\infty} FA_{26} \times T_4 \right]
 \end{aligned}$$

矩阵 $[UVW_{1-8}]_{M_Q \times 8M_Q}$ 如下形式:

$$\begin{aligned} & \times \sum_{p=1}^{\infty} FA_{27} \times T_4 \sum_{p=1}^{\infty} FA_{28} \times T_3 \Big], \quad (A28b) \\ & [UVW_3]_{M_Q \times 8M_Q} \\ & = \left[\sum_{p=1}^{\infty} FA_{31} \times T_3 \sum_{p=1}^{\infty} FA_{32} \times T_4 \sum_{p=1}^{\infty} FA_{33} \times T_4 \right. \\ & \quad \times \sum_{p=1}^{\infty} FA_{34} \times T_3 \sum_{p=1}^{\infty} FA_{35} \times T_3 \sum_{p=1}^{\infty} FA_{36} \times T_4 \\ & \quad \left. \times \sum_{p=1}^{\infty} FA_{37} \times T_4 \sum_{p=1}^{\infty} FA_{38} \times T_3 \right], \quad (A28c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [UVW_4]_{M_Q \times 8M_Q} \\ & = \left[\sum_{p=1}^{\infty} FA_{41} \times T_1 \sum_{p=1}^{\infty} FA_{42} \times T_2 \sum_{p=1}^{\infty} FA_{43} \times T_2 \right. \\ & \quad \times \sum_{p=1}^{\infty} FA_{44} \times T_1 \sum_{p=1}^{\infty} FA_{44} \times T_1 \sum_{p=1}^{\infty} FA_{45} \times T_1 \\ & \quad \times \sum_{p=1}^{\infty} FA_{46} \times T_2 \sum_{p=1}^{\infty} FA_{47} \times T_2 \\ & \quad \left. \times \sum_{p=1}^{\infty} FA_{48} \times T_1 \right], \quad (A28d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [UVW_5]_{M_Q \times 8M_Q} \\ & = \left[\sum_{p=1}^{\infty} FA_{51} \times T_1 \sum_{p=1}^{\infty} FA_{52} \times T_2 \sum_{p=1}^{\infty} FA_{53} \times T_2 \right. \\ & \quad \times \sum_{p=1}^{\infty} FA_{54} \times T_1 \sum_{p=1}^{\infty} FA_{55} \times T_1 \sum_{p=1}^{\infty} FA_{56} \times T_2 \\ & \quad \left. \times \sum_{p=1}^{\infty} FA_{57} \times T_2 \sum_{p=1}^{\infty} FA_{58} \times T_1 \right], \quad (A28e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [UVW_6]_{M_Q \times 8M_Q} \\ & = \left[\sum_{p=1}^{\infty} FA_{61} \times T_3 \sum_{p=1}^{\infty} FA_{62} \times T_4 \sum_{p=1}^{\infty} FA_{63} \times T_4 \right. \\ & \quad \times \sum_{p=1}^{\infty} FA_{64} \times T_3 \sum_{p=1}^{\infty} FA_{65} \times T_3 \sum_{p=1}^{\infty} FA_{66} \times T_4 \\ & \quad \left. \times \sum_{p=1}^{\infty} FA_{67} \times T_4 \sum_{p=1}^{\infty} FA_{68} \times T_3 \right], \quad (A28f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [UVW_7]_{M_Q \times 8M_Q} \\ & = \left[\sum_{p=1}^{\infty} FA_{71} \times T_3 \sum_{p=1}^{\infty} FA_{72} \times T_4 \sum_{p=1}^{\infty} FA_{73} \times T_4 \right. \\ & \quad \times \sum_{p=1}^{\infty} FA_{74} \times T_3 \sum_{p=1}^{\infty} FA_{75} \times T_3 \sum_{p=1}^{\infty} FA_{76} \times T_4 \\ & \quad \left. \times \sum_{p=1}^{\infty} FA_{77} \times T_4 \sum_{p=1}^{\infty} FA_{78} \times T_3 \right], \quad (A28g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [UVW_8]_{M_Q \times 8M_Q} \\ & = \left[\sum_{p=1}^{\infty} FA_{81} \times T_1 \sum_{p=1}^{\infty} FA_{82} \times T_2 \sum_{p=1}^{\infty} FA_{83} \times T_2 \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{p=1}^{\infty} FA_{84} \times T_1 \sum_{p=1}^{\infty} FA_{84} \times T_1 \sum_{p=1}^{\infty} FA_{85} \times T_1 \\ & \times \sum_{p=1}^{\infty} FA_{86} \times T_2 \sum_{p=1}^{\infty} FA_{87} \times T_2 \\ & \left. \times \sum_{p=1}^{\infty} FA_{88} \times T_1 \right]. \quad (A28h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_1 &= \cos[k_p(z_j + L)] \cos[k_p(z_Q + L)], \\ T_2 &= \sin[k_p(z_j + L)] \cos[k_p(z_Q + L)], \\ T_3 &= \cos[k_p(z_j + L)] \sin[k_p(z_Q + L)], \\ T_4 &= \sin[k_p(z_j + L)] \sin[k_p(z_Q + L)]. \quad (A29) \end{aligned}$$

其中 $j = 1 : M_Q, Q = 1 : M_Q$. 矩阵 $\bar{S}_{8M_Q \times 1}$ 的形式如下:

$$\begin{aligned} & [\bar{S}]_{8M_Q \times 1} \\ & = [US_{1nj}, VS_{1nj}, WS_{1nj}, KWS_{1nj}, \\ & \quad US_{2nj}, VS_{2nj}, WS_{2nj}, KWS_{2nj}]^T, \\ & (j = 1 : M_Q). \quad (A30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [\bar{\Delta}]_{8M_Q \times 1} \\ & = \left[\sum_{p \in p_l} FF_{13} P_{np} \cos[k_p(z_j + L)], \right. \\ & \quad \sum_{p \in p_l} FF_{23} P_{np} \sin[k_p(z_j + L)], \\ & \quad \sum_{p \in p_l} FF_{33} P_{np} \sin[k_p(z_j + L)], \\ & \quad \sum_{p \in p_l} FF_{33} k_p P_{np} \cos[k_p(z_j + L)], \\ & \quad \sum_{p \in p_l} FF_{43} P_{np} \cos[k_p(z_j + L)], \\ & \quad \sum_{p \in p_l} FF_{53} P_{np} \sin[k_p(z_j + L)], \\ & \quad \sum_{p \in p_l} FF_{63} P_{np} \sin[k_p(z_j + L)], \\ & \quad \left. \sum_{p \in p_l} FF_{63} k_p P_{np} \cos[k_p(z_j + L)] \right]^T. \quad (A31) \end{aligned}$$

参考文献

- [1] Skelton E A 1991 *J. Sound Vib.* **148** 243
- [2] Skelton E A 1992 *J. Sound Vib.* **154** 205
- [3] Skelton E A 1992 *J. Sound Vib.* **154** 221
- [4] Skelton E A 1995 *J. Sound Vib.* **181** 635
- [5] Zheng G Y, Fan J, Tang W L 2011 *Journal of Ship Mechanics* **15** 1451
- [6] Zheng G Y, Fan J, Tang W L 2011 *Acta Acustica* **36** 377 (in Chinese) [郑国垠, 范军, 汤渭霖 2011 声学学报 **36** 377]
- [7] Guo Y P 1994 *J. Acoustic. Soc. Am.* **95** 2550
- [8] Tran-Van-Nhieu M 2001 *J. Acoustic. Soc. Am.* **110** 2858

- [9] Zheng G Y, Fan J, Tang W L 2009 *Acta Acustica* **34** 490 (in Chinese) [郑国垠, 范军, 汤渭霖 2009 声学学报 **34** 490]
 [10] Zheng G Y, Fan J, Tang W L 2010 *Acta Acustica* **35** 32 (in Chinese) [郑国垠, 范军, 汤渭霖 2010 声学学报 **35** 32]
 [11] Chen M X, Luo D P, Chen X N, Shen R X 2009 *Acta Acustica* **29** 209 (in Chinese) [陈美霞, 骆东平, 陈小宁, 沈瑞喜, 2009 声学学报 **29** 209]
 [12] Chen M X, Chen J L, Guan S S, Luo D P 2005 *Chinese Journal of Ship Research* **27** 27 (in Chinese) [陈美霞, 陈乐佳, 关珊珊, 骆东平 2005 舰船科学技术 **27** 27]

Acoustic scattering from the finite periodically ribbed two concentric cylindrical shells

Pan An¹⁾²⁾ Fan Jun^{1)†} Wang Bin¹⁾ Chen Zhi-Gang²⁾ Zheng Guo-Yin³⁾

1) (*State Key Laboratory of Ocean Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China*)

2) (*China Ship Development and Design Center, Wuhan 430064, China*)

3) (*Wuhan No.2 Shipbuilding Institute, Wuhan 430064, China*)

(Received 24 March 2014; revised manuscript received 9 June 2014)

Abstract

Acoustic scattering from the submerged finite periodically ribbed two concentric cylindrical shells, insonified by an incident plane wave, is studied. Motion of the shell is described by Donnell equations, while the motion of the disks is described by thin plate motion equations and plane stress equations ignoring the effects of axial forces on the disks. Through angle-frequency spectra, besides the elastic waves of the shells, the contributions of the fluid between the inner and outer shells and the interaction of the inner and outer shells with the disks play an important role in the far scattering field. There are fine echo waves such as Bragg scattering and fluid-added waves excited on the angle-frequency spectra. Finally the theories are verified by experiments.

Keywords: acoustic scattering, cylindrical shell, disk, fluid-added waves

PACS: 43.20.+g, 43.30.+m

DOI: 10.7498/aps.63.214301

† Corresponding author. E-mail: fanjun@sjtu.edu.cn