水平变化波导中的简正波耦合与能量转移*

莫亚枭 朴胜春† 张海刚 李丽

(哈尔滨工程大学, 水声技术重点实验室, 哈尔滨 150001)

(哈尔滨工程大学, 水声工程学院, 哈尔滨 150001)

(2014 年 1 月 22 日收到; 2014 年 7 月 2 日收到修改稿)

针对海底地形水平变化对声场能量传播和声场干涉结构的影响, 对简正波之间的耦合和能量转移进行了研究. 建立了一种二维大步长格式的耦合简正波模型和三维楔形波导耦合简正波模型, 以便快速有效地分析简正波之间的耦合和能量转移. 基于耦合简正波模型, 阐述了前向声场能量在水平变化波导中传播时的转移过程. 并根据射线简正波理论, 解释了海底地形变化对声场能量分布的影响机理. 水平变化波导中声场的仿真计算表明, 当本征值虚部发生剧烈变化时声场存在着较强的简正波耦合和能量转移, 且海底地形变化将导致声场能量的水平传播方向偏转至海水深度增加的方向. 在声场能量转移和传播方向变化中, 声场的能量趋于保留在波导中而不向海底泄漏. 同时, 声场能量分布受到类似于压缩或稀疏的作用, 从而形成椭圆状的干涉结构.

关键词: 简正波耦合, 能量转移, 水平变化波导

PACS: 43.30.Bp, 43.20.El **DOI:** 10.7498/aps.63.214302

1 引 言

水平变化波导中的声传播问题一直是水声学研究的热点问题之一, 近几十年发展了众多针对水平变化波导的声场计算模型[1]. 对于水平波导, 简正波理论[2]以干涉的形式有效地描述了声场的能量传播形式, 以及声矢量场的特性[3]; 而对于非水平波导, Pierce[4] 和 Milder[5] 通过引入简正波耦合的概念来反映海洋环境的水平变化对声场的影响. 与其他模型相比, 简正波和耦合简正波模型可直观地表征声场的能量分布及其变化, 物理意义明确.

近几十年, 国内外创造出了多种耦合简正波模型. Abawi 等通过忽略高阶耦合项和反向场, 将耦合简正波模型与抛物方程方法相结合推导得到了 CMPE 模型[6], 有效地实现了耦合微分方程的求解. 针对本地本征值和本征函数的计算速度慢的问题, 彭朝晖等[7,8] 将 WKBZ 方法与 CMPE 模型相结合, 实现了水平变化波导中声场的快速计算. 考虑耦合简正波模型中高阶微分方程化简时所引入的误差, Stotts[9] 基于 U-K 理论, 采用迭代求积分方程的方法对耦合微分方程进行直接求解. 前文所描述的模型均为单向模型, 而双向模型最初由 Evans[10] 基于阶梯近似推导得到, 并由此建立了标准耦合简正波程序 COUPLE. 但由于不合理的归一化距离解, COUPLE 模型中存在数值不稳定的现象. 为此, 骆文于等[11−16] 考虑了合理的声场表述形式, 并引入全局矩阵方法, 实现了双向耦合简正波模型的快速稳定计算. 同时, 以稳健的双向模型为基础, 骆文于等建立了适应于锥形海底山波导中声场计算的三维耦合简正波模型[17,18]. 在耦合微分方程的推导中, 通常采用垂直位移连续作为水平变化海底的边界条件, 该方法将导致所计算的声场不满足能量守恒. 为此, Fawcett[19] 和 Godin[20] 直接采用了法向位移连续这一严格的边界条件进行推导, 获得了满足能量守恒的耦合简正波模型.

* 国防科技重点实验室基金 (批准号: 9140C200103120C2001) 和国家自然科学基金重点项目 (批准号: 11234002) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: piaoshengchun@hrbeu.edu.cn

随着耦合简正波模型的不断完善，以耦合简正波模型为基础的声场特性分析也逐渐开展. Godin [20] 根据参考波导法推导得到了由环境参数的水平变化来表示的耦合系数，直观地体现了环境参数的水平变化对声场的作用. 通过介质虚像方法和光学的半波带法，王宁 [21] 讨论了水体环境的扰动对声场的影响机理. 与理论研究相比，McDonald 等 [22] 和 Ballard [23,24] 则分别通过实验研究了声能量在非水平分层波导中的传播变化.

通过对现有的文献进行整理，我们可以发现，目前关于水平变化波导的研究多停留在模型的建立和修正方面. 针对环境参数水平变化对于声场能量传播和能量分布影响的研究相对较少，其中海底地形对声场能量传播和声场干涉结构影响的研究更是少之又少. 因此，有必要系统地分析和研究海底地形对声场能量传播和分布的影响以及相关机理.

本文将依据耦合简正波模型，从简正波耦合和能量转化的角度，给出海底地形对声传播的作用结果和相关物理机理.

2 理论分析

对于如图 1 所示的海洋波导，建立适当的直角坐标系，为有效快速地实现简正波耦合、能量转移和三维声场特性分析，并避免复杂不稳定的声场计算问题，假定环境参数与 y 方向无关，而仅随单一的水平坐标变化. 在此波导下，考虑线源和点源所激发的声场，即文中所阐述的二维和三维问题，分别建立相应的耦合简正波模型，具体推导过程如下所述.

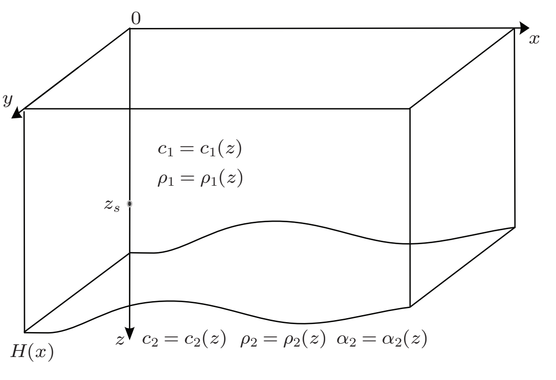

图 1 海洋波导示意图

2.1 二维线源耦合简正波模型

对于二维线源问题，取时间因子为 exp (-iωt) 的无限长线源与 y 轴平行，且考虑到环境参数与 y 轴无关，则声压 $p = p(x,\ z)$ 所满足的亥姆霍兹方程为

$$\frac{\partial^2 p(x,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p(x,z)}{\partial z^2} + k_{1,2}^2(x,z)p(x,z) = 0. \quad (1)$$

相应的海底边界条件为

$$p|_{z=H^-} = p_{z=H^+},$$
$$\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}p|_{z=H^-} = \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}p|_{z=H^+},$$

其中，取 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 分别表示 x 和 z 方向上的单位矢量，$\hat{\boldsymbol{n}} = -\hat{\boldsymbol{z}} + H'(x)\hat{\boldsymbol{x}}$ 表示海底界面的外法向矢量.

根据简正波理论，并参照抛物方程方法 [1,25]，设水平距离 x 处的声压场为

$$p(x,z) = \sum_{n=1}^{N} \varphi_n(x)\phi_n(z;x)\exp(\mathrm{i}k_0 x), \quad (2)$$

其中，$\exp(\mathrm{i}k_0 x)$ 为获得较大的水平步长而引入的相位因子，$\phi_n(z;x)$ 对应于第 n 阶本地本征值 k_n 的本地本征函数，其满足方程

$$\frac{\partial^2 \phi_n}{\partial z^2} + (k_{1,2}^2 - k_n^2)\phi_n = 0. \quad (3)$$

相应本地本征函数所满足的海底边界条件和归一化条件为

$$\phi_n|_{z=H^-} = \phi_n|_{z=H^+},$$
$$\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial}{\partial z}\phi_n|_{z=H^-} = \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial}{\partial z}\phi_n\Big|_{z=H^+},$$
$$\int_0^\infty \frac{1}{\rho}\phi_m\phi_n\,\mathrm{d}z = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

考虑声压 $p(x,\ z)$ 的表达式和海底边界条件，则有

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{1}{\rho}\phi_m \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\mathrm{d}z \\
&= \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)\phi_m \frac{\partial p}{\partial z}\Big|_{z=H} - \int_0^\infty \frac{1}{\rho}\frac{\partial \phi_m}{\partial z}\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z \\
&= H'(x)\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)\phi_m \frac{\partial p}{\partial x}|_{z=H} \\
&\quad + \int_0^\infty \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 \phi_m}{\partial z^2} p\,\mathrm{d}z. \qquad (4)
\end{aligned}$$

根据方程 (4) 和本地本征函数的正交归一性，进行运算 $\int_0^\infty \frac{1}{\rho}\phi_m \cdot (1)\mathrm{d}z$，可得

$$\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} + 2\mathrm{i}k_0\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} + (k_m^2 - k_0^2)\varphi_m$$

$$+\sum_{n=1}^{N}2B_{mn}\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}+\sum_{n=1}^{N}A_{mn}\varphi_n+2\mathrm{i}k_0\sum_{n=1}^{N}B_{mn}\varphi_n=0, \tag{5}$$

其中, B_{mn} 和 A_{mn} 为表征各阶简正波能量交换的耦合系数, 其表达式为

$$B_{mn}=\int_0^\infty\frac{1}{\rho}\phi_m\frac{\partial\phi_n}{\partial x}\mathrm{d}z+\frac{1}{2}H'(x)\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)\times\phi_m(H)\phi_n(H), \tag{6}$$

$$A_{mn}=\int_0^\infty\frac{1}{\rho}\phi_m\frac{\partial^2\phi_n}{\partial x^2}\mathrm{d}z+H'(x)\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)\times\phi_m(H)\frac{\partial\phi_n(H)}{\partial x}. \tag{7}$$

从耦合系数表达式(6)和(7)中, 可以看出: 当环境参数的水平变化程度不是十分剧烈时, 耦合系数 A_{mn} 为 B_{mn} 的高阶小量. 因此, 采用矩阵形式, 并忽略高阶耦合项, 有

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{\Psi}}{\partial x^2}+2\mathrm{i}k_0\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial x}+(\boldsymbol{k}^2-k_0^2\boldsymbol{I})\boldsymbol{\Psi}+2\boldsymbol{B\Psi}+2\mathrm{i}k_0\boldsymbol{B\Psi}=0, \tag{8}$$

其中, $\boldsymbol{\Psi}=[\varphi_1\ \ \varphi_2\ \ \cdots\ \ \varphi_N]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{B}$ 表示以 B_{mn} 为元素的矩阵, $\boldsymbol{k}$ 表示以 k_n 为主对角元素的对角矩阵.

忽略高阶耦合项 $\boldsymbol{BB}$ 的作用, 取前向波, 可得

$$\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial x}=-\boldsymbol{B\Psi}+\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-k_0\boldsymbol{I})\boldsymbol{\Psi}. \tag{9}$$

方程(9)具有抛物方程的形式, 可按照抛物方程方法进行计算, 如采用文献[7]中的Crank-Nicolson公式. 但根据文献[6]和[25]中的讨论, 由于声场方程进行了抛物方程形式的化简, 为保证声场能量的守恒和声场的互易, 需补充相应的互易项, 令

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{k_n(x)}}u_n(x), \tag{10}$$

而 $u_n(x)$ 所满足的耦合微分方程为

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x}=-\boldsymbol{Bu}+\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-k_0\boldsymbol{I})\boldsymbol{u}, \tag{11}$$

其中, $\boldsymbol{u}(x)=[u_1\ \ u_2\ \ \cdots\ \ u_N]^{\mathrm{T}}$.

根据方程(6), 可得耦合系数矩阵为反对称矩阵, 即

$$\begin{aligned}&B_{mn}+B_{nm}\\&=\int_0^\infty\frac{1}{\rho}\phi_m\frac{\partial\phi_n}{\partial x}\mathrm{d}z+\int_0^\infty\frac{1}{\rho}\phi_n\frac{\partial\phi_m}{\partial x}\mathrm{d}z\\&\quad+H'(x)\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)\phi_m(H)\phi_n(H)\\&=\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty\frac{1}{\rho}\phi_m\phi_n\mathrm{d}z=\frac{\partial}{\partial x}\delta_{mn}\\&=0.\end{aligned} \tag{12}$$

以上耦合微分方程的推导中, 通过引入相位因子, 获得了一种大步长格式的二维耦合简正波模型. 虽然该模型是在二维直角坐标下获得的, 但很容易推广至二维柱坐标系下的点源问题. 同时, 由于耦合系数满足反对称性, 根据文献[20]可知, 该模型所计算的声场在传播过程中满足能量守恒. 并且, 由于所有阶简正波皆采用了统一的相位因子, 便于在后文根据二维线源叠加方法计算三维楔形波导声场, 且不会因方位角的不同而引入计算误差.

若不考虑引入相位因子 $\exp(\mathrm{i}k_0x)$, 则根据上文的推导, 可得如文献[6]所叙述的CMPE 模型, 其耦合系数也满足反对称形式, 声压表达式和耦合微分方程为

$$p(x,z)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{k_{xn}}}u_n(x)\phi_n(z;x), \tag{13}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x}=-\boldsymbol{Bu}+\mathrm{i}\boldsymbol{ku}. \tag{14}$$

根据二维直角坐标系下的绝热简正波理论[1], 无论是否引入相位因子, 耦合微分方程的初始场皆取为

$$u_n(0)=\frac{2\pi\mathrm{i}}{\sqrt{k_n(0)}}\phi_n(z;0). \tag{15}$$

2.2 三维楔形波导耦合简正波模型

与二维线源问题不同, 针对三维非水平分层波导中的点源问题, 需在水平方向上考虑海底地形变化所引起的能量传播形式和干涉结构的变化, 即声场的三维效应. 在图1所示的点源问题中, 最具代表性的为楔形波导的情况, 故将所建立的模型称之为三维楔形波导耦合简正波模型. 考虑时间因子为 exp(-iωt) 的点源所激发的声压场 $p(x,\ y,\ z)$, 相应的亥姆霍兹方程为

$$\frac{\partial^2p(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2p(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2p(x,y,z)}{\partial z^2}+k_{1,2}^2(z)p(x,y,z)=0. \tag{16}$$

声压 $p(x,\ y,\ z)$ 所满足的海底边界条件为

$$p|_{z=H^-}=p|_{z=H^+},$$

$$\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial}{\partial\hat{\boldsymbol{n}}}p|_{z=H^-}=\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial}{\partial\hat{\boldsymbol{n}}}p|_{z=H^+},$$

其中, 由于环境参数与坐标 y 无关, 海底界面的外法向矢量 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 为 $\hat{\boldsymbol{n}} = -\hat{\boldsymbol{z}} + H'(x)\hat{\boldsymbol{x}}$.

考虑 $k_y - y$ 傅里叶变换:

$$p(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}(x, z; k_y)\exp(\mathrm{i}k_y y)\,\mathrm{d}k_y, \tag{17}$$

则三维波导中的点源声场问题可转化为二维线源声场问题[26], 即

$$\frac{\partial^2 \bar{p}(x, z; k_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}(x, z; k_y)}{\partial z^2} + [k_{1,2}^2(z) - k_y^2]\bar{p}(x, z; k_y) = 0. \tag{18}$$

相应的海底边界条件为

$$\bar{p}(x, z; k_y)|_{z=H^-} = \bar{p}(x, z; k_y)|_{z=H^+},$$
$$\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}\bar{p}(x, z; k_y)|_{z=H^-} = \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}\bar{p}(x, z; k_y)|_{z=H^+}.$$

当 y 方向的水平波数分量为 k_y 时, 根据上文二维直角坐标系中的耦合简正波理论, 结合抛物方程因子, 并考虑声场的互易性, 令

$$\bar{p}(x, z; k_y) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{k_{xn}}}u_n(x; k_y) \times \phi_n(z; x, k_y)\exp(\mathrm{i}k_0 x), \tag{19}$$

其中, $\phi_n\ (z;\ x,\ k_y)$ 是对应于第 n 阶本地本征值 $k_n = \sqrt{k_{xn}^2 + k_y^2}$ 且满足正交归一化的本地本征函数, 相应的耦合微分方程和初始条件为

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = -\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \mathrm{i}(\boldsymbol{k_x} - k_0\boldsymbol{I})\boldsymbol{u}, \tag{20}$$

$$u_n(0; k_y) = \frac{2\pi i}{\sqrt{k_{xn}(0)}}\phi_n(z_s; 0, k_y). \tag{21}$$

对于每一离散 k_y, 按照耦合微分方程(20)和初始条件(21), 可计算得到不同水平距离 x 和深度 z 处积分核函数 $\bar{p}(x,\ z;\ k_y)$ 的值. 最后按照Fourier变换, 即可得到点源在三维波导中所激发的声场. 虽然这一方法需假定环境参数仅随单一的水平坐标变化, 在实际使用中所受到的限制较大. 但考虑到本文的研究目的, 采用这一简单却行之有效的快速三维波导声场计算方法, 足以分析海底地形对声场能量传播和干涉结构分布的影响, 以及解释相关的物理机理.

3 大步长格式的耦合简正波模型验证

本文通过引入抛物方程方法中相位因子获得了一种大步长格式耦合简正波模型, 为验证该模型的正确性, 以倾斜角度 $\alpha = 2.86°$ 的二维倾斜波导为例, 环境参数和几何参数如图2所示. 与文献[6]中不同水平步长情况下的CMPE 理论进行比较, 计算结果如图3所示.

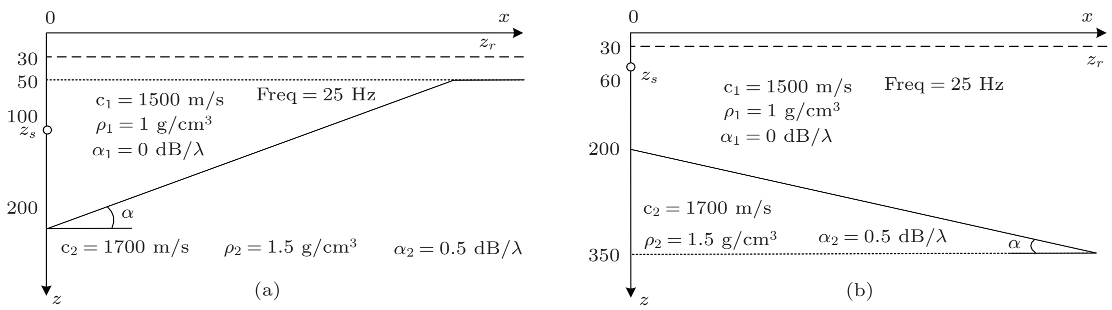

图2 $\alpha = 2.86°$ 时具有倾斜海底的海洋波导示意图 (a) 上倾斜海底情况; (b) 下倾斜海底情况

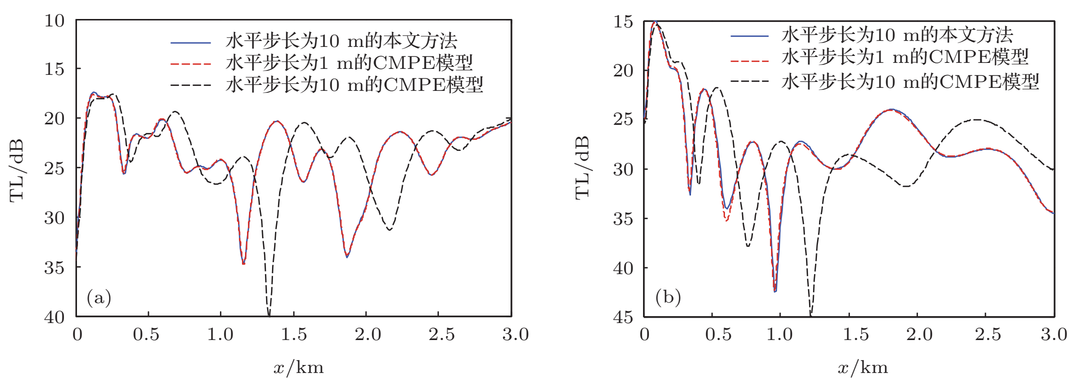

图3 $\alpha = 2.86°$ 时不同步长下的声压传播损失曲线比对 (a) 上倾斜海底; (b) 下倾斜海底

根据声压场传播损失的计算, 本文通过引入抛物方程的相位因子 $\exp(\mathrm{i}k_0x)$ 可有效地加大数值计算中的水平步长, 在保证计算精度的同时提高计算效率. 通过引入相位因子, 使得声压场表达式中的函数 $u_n(x)$ 仅表征波导中环境参数水平变化引起的各阶简正波幅度变化和相位变化的修正. 由此, 可表明水平变化波导中的声场传播能量变化情况要远比相位变化稳定.

4 海底地形变化对声场的影响

4.1 简正波耦合和声场能量再分配

为分析波导中环境参数的水平变化所引起的各阶简正波之间耦合效应和声场能量再分配, 令

$$u_m(x) = C_m(x)\exp\left[\mathrm{i}\int_0^x (k_m - k_0)\,\mathrm{d}s\right]. \tag{22}$$

根据方程 (22), 声压场和耦合微分方程可化为比较直观的形式

$$\begin{aligned} p(x,z) = {} & \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{k_n(x)}}C_n(x)\phi_n(z;x) \\ & \times \exp\left(\mathrm{i}\int_0^x k_n\,\mathrm{d}s\right), \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_m}{\partial x} = {} & -\sum_{n=1 n\neq m}^{N} B_{mn}C_n \\ & \times \exp\left[\mathrm{i}\int_0^x (k_n - k_m)\,\mathrm{d}s\right]. \end{aligned} \tag{24}$$

在方程 (23) 中, 环境参数的水平变化对各阶简正波的幅度和相位的影响得到分离, 但由于耦合微分方程中 e 指数的存在和非波导简正波的影响, 所计算的声场存在着发散现象. 考虑到 $|C_m| = |u_m|$, 可采用方程 (23) 和 (24) 来对简正波之间耦合效应和能量转化进行理论分析, 通过方程 (11) 来进行数值计算. 在水平距离 x 处, 声场中任意一阶简正波可表述成

$$\begin{aligned} & p_m(x,z) \\ & = C_m(x)\phi_m(z;x)\exp\left[\mathrm{i}\int_0^x k_m(x)\,\mathrm{d}s\right]. \end{aligned} \tag{25}$$

根据耦合微分方程 (24) 和一阶有限差分, 可得在 $x+\Delta x$ 处的 $p_m(x+\Delta x)$ 为

$$\begin{aligned} & p_m(x+\Delta x, z) \\ & = \phi_m(z;x+\Delta x)\Bigg[C_m(x)\exp\left(\mathrm{i}\int_0^{x+\Delta x} k_m\,\mathrm{d}s\right) \\ & \quad - \Delta x\exp\left(\mathrm{i}\int_x^{x+\Delta x} k_m\,\mathrm{d}s\right) \\ & \quad \times \sum_{n=1 n\neq m}^{N} B_{mn}(x)C_n(x) \\ & \quad \times \exp\left(\mathrm{i}\int_0^x k_n\,\mathrm{d}s\right)\Bigg]. \end{aligned} \tag{26}$$

在耦合方程推导中, 考虑了海底地形变化所引起的海底边界条件的修正, 因此, 方程 (26) 可有效地反映环境参数的水平变化对各阶简正波的影响. 由方程 (26) 可以看出: 方程右侧第一项表示了由于环境参数的水平变化所引起的各阶简正波本身变化; 而方程右侧第二项则表示了各阶简正波之间的耦合以及能量的转移. 在方程右侧第二项中, 耦合系数 $B_{mn}(x)$ 表征了水平距离 x 的邻域内各阶简正波之间耦合强弱和能量转移能力.

由于文献 [21] 分析了水体不均匀性对声场的影响, 因此本文着重分析海底地形变化所引起的各阶简正波的耦合. 以图 2 (a) 所示的上坡波导为例, 当 $\alpha = 2.86°$ 时, $x = 20$ m 和 $x = 770$ m (第 3 阶简正波转化为非波导简正波的水平距离), 耦合系数 B_{mn} (x) 模值的计算结果如图 4 所示.

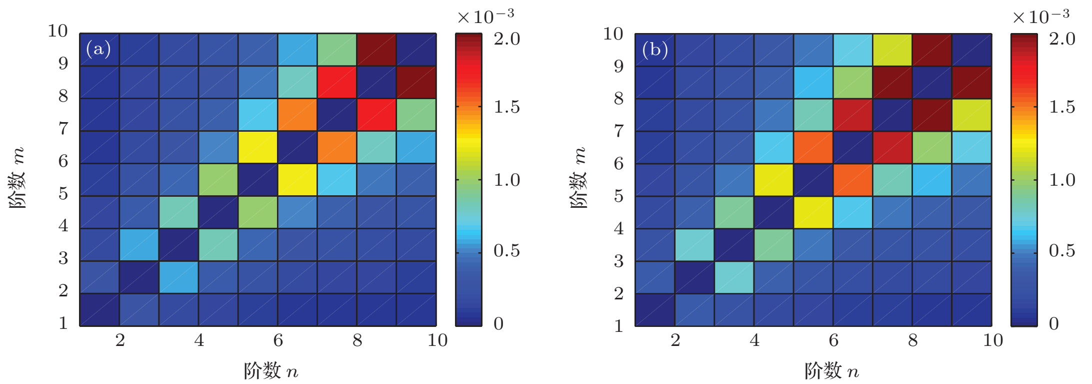

图 4 $\alpha = 2.86°$ 时上坡波导不同水平距离下耦合系数 $B_{mn}(x)$ 幅度随简正波阶数的分布 (a) $x = 20$ m; (b) $x = 770$ m (每一方块对应于其左下角所表示的阶数值)

根据图4所示, 可得: 高阶耦合简正波之间的耦合和能量转移要大于低阶耦合简正波之间的耦合和能量转移; 阶数相差较小的简正波之间耦合和能量转移能力要强于阶数相差较大的情况; 简正波之间的耦合满足对称性. 根据方程(26), 耦合系数仅表征了简正波之间的耦合能力和能量的转移能力, 若要定量分析简正波之间的耦合和能量转移, 则需考虑各阶简正波的激发强度以及各阶简正波在传播过程中的衰减情况.

取倾角 $\alpha = 2.86°$ 的上倾斜波导, 环境参数和几何参数如图2(a)所示, 水平间隔 $\Delta x = 10$ m、水平距离点 $x = 20$ m 和 $x = 770$ m(第3阶简正波转化为非波导简正波的水平距离), 则各阶简正波幅度函数 $C_n(x)$ 所引起的 $x + \Delta x$ 处 $C_m(x + \Delta x)/C_m(0)$ 模值分布如图5所示, 相应 x 距离处本地本征值的计算结果如图6所示.

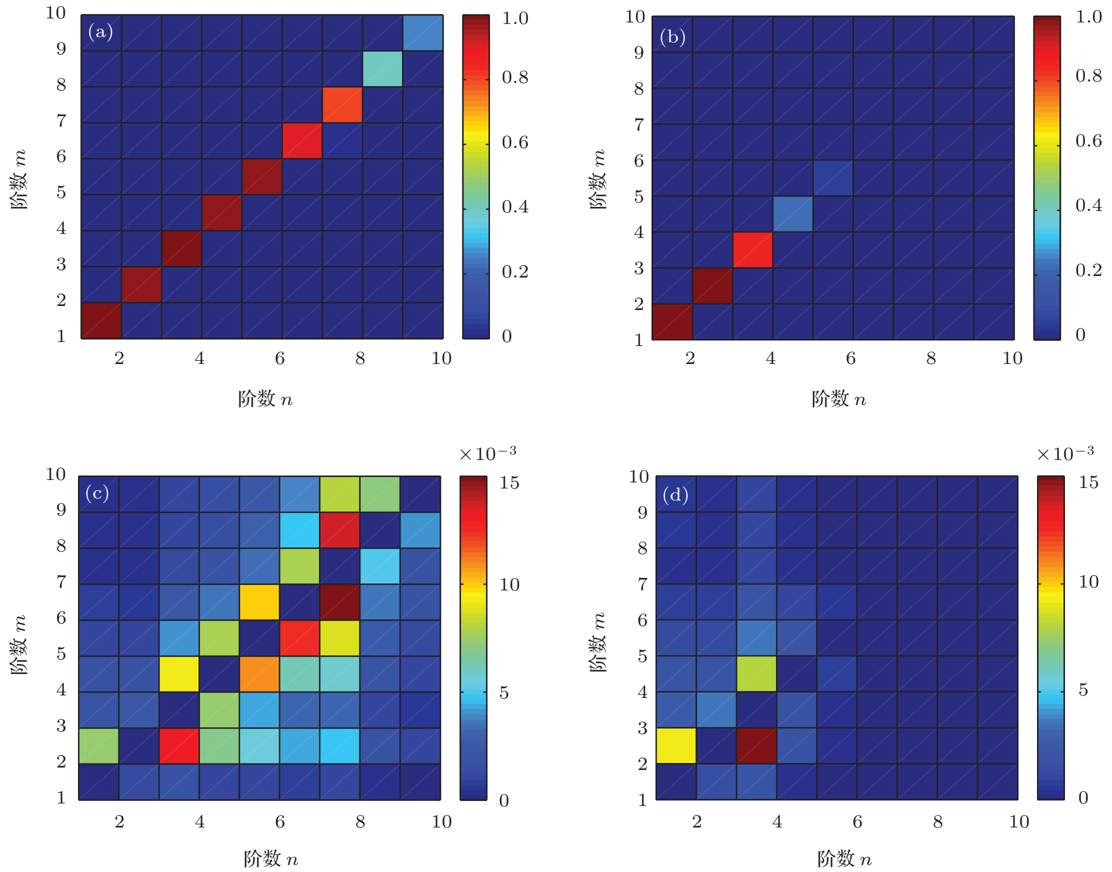

图5 $\alpha = 2.86°$ 时上坡波导不同水平距离下各阶简正波幅度函数 $C_n(x)$ 所引起的 $C_m(x + \Delta x)/C_m(0)$ 模值分布 (a) $x = 20$ m; (b) $x = 770$ m; (c) $x = 20$ m 去除对角元素后的结果; (d) $x = 770$ m 去除对角元素后的结果 (每一方块对应于其左下角所表示的阶数值, 即 $C_n(x)$ 的下标和 $C_m(x + \Delta x)/C_m(0)$ 的下标)

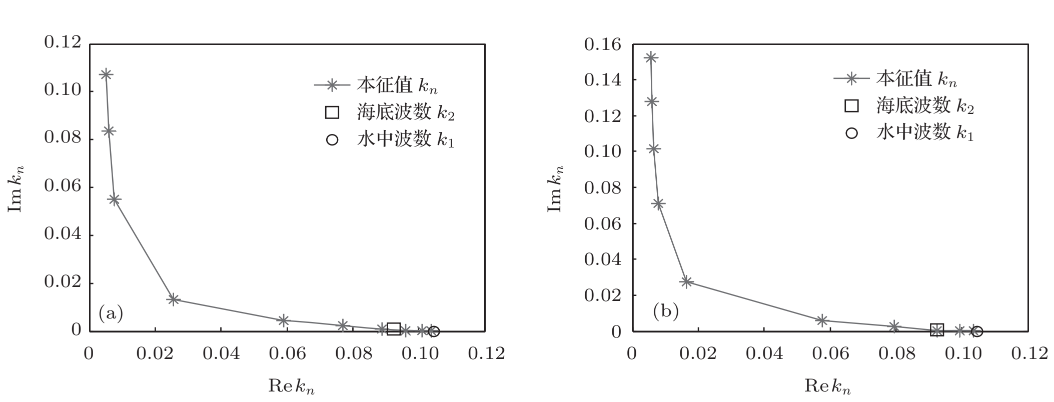

图6 $\alpha = 2.86°$ 时上坡波导不同水平距离下本地本征值分布 (a) $x = 20$ m; (b) $x = 770$ m

根据图5所示的计算结果, 可以看出: 各阶简正波之间的耦合和能量转移要远小于环境参数水平变化所导致的各阶简正波自身的变化; 高阶简正波之间的耦合能力和能量转移能力虽然要强于低阶简正波, 但高阶简正波随着水平距离的增加而衰减, 在远距离处实际的耦合效果和能量转移效果要弱于低阶简正波.

虽然各阶简正波的激发强度不同, 但考虑到各阶简正波传播过程中的衰减和波导简正波与非波导简正波之间的转化, 则研究环境参数的水平变化所导致的各阶简正波幅度函数变化有着较大的物理意义. 在图5(c)中, 可以看出$x = 20$ m处的第7阶简正波向$x + \Delta x$处第6阶简正波耦合较多能量; 在图5(d)中, 可以看出$x = 770$ m处的第3阶简正波向$x + \Delta x$ 处第2阶简正波耦合较多能量. 根据图6(a)和(b)所示, 可知: $x = 20$ m处的第7阶简正波为最后一阶满足Re (k_n)>Im(k_n) 的简正波(Re和Im分别表示实部和虚部), $x = 770$ m处的第3阶简正波为最后一阶波导简正波. 在接下来的传播过程中, 随着海水深度的变浅, $x = 20$ m处的第7阶简正波即将因虚部较大而具有较大的损耗, 而$x = 770$ m处的第3阶简正波转化为非波导简正波且具有较大的传播损失. 因此由图6和图7所示的计算结果, 可以说明: 本征值虚部将大幅度增加的简正波倾向于将能量耦合至低阶能量损耗小的邻近简正波中, 从而将更多的能量趋于保留至波导中.

当倾角$\alpha = 12.86°$时, 考虑如图2(a)所示的环境参数和几何参数, $x = 20$ m处的耦合系数$B_{mn}(x)$幅度计算结果和$x + \Delta x$处$C_m(x + \Delta x)/C_m(0)$模值非对角元素分布如图7所示. 与图4(a)和图5(c)相比, 可得: 对于上坡情况, 简正波之间的耦合能力随着海底倾斜角度的增加而大幅度的提高.

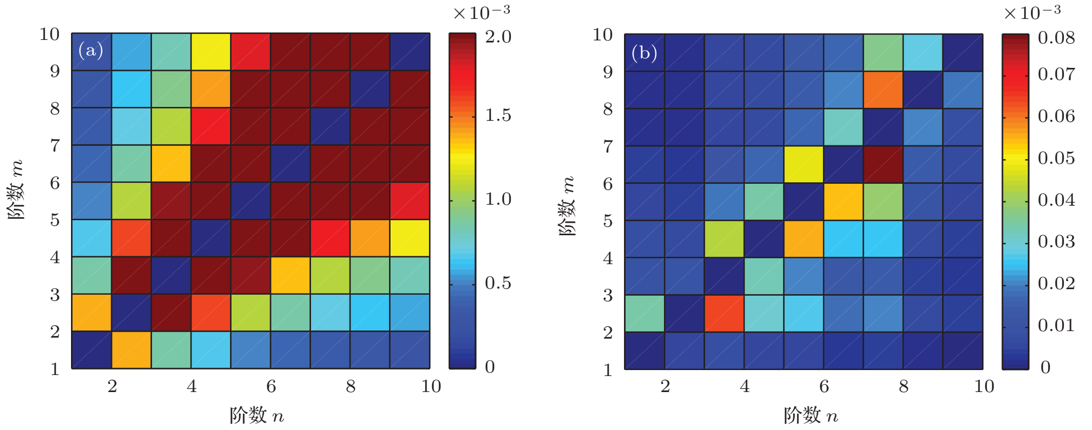

图7 $\alpha = 12.86°$ 时上坡波导$x = 20$ m的简正波耦合分布 (a)$B_{mn}(x)$模值; (b) 非对角$C_m(x+\Delta x)/C_m(0)$模值

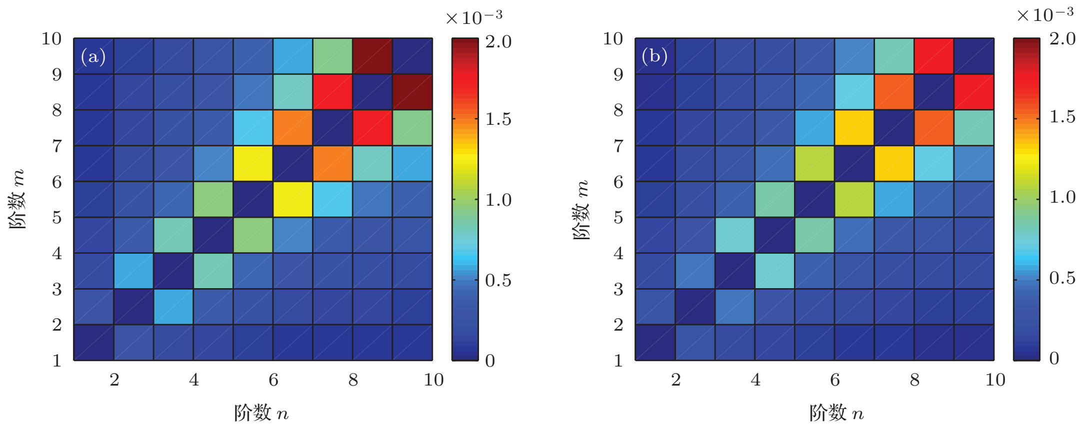

图8 $\alpha = 2.86°$ 时下坡波导不同水平距离下耦合系数$B_{mn}(x)$ 幅度随简正波阶数的分布 (a) $x = 20$ m; (b) $x = 510$ m (每一方块对应于其左下角所表示的阶数值)

对于下坡波导, 考虑图2(b)所示的环境参数和几何参数, 当倾斜角度 $\alpha = 2.86°$ 时, $x = 20$ m 和 $x = 510$ m (第4阶简正波转化为波导简正波的水平距离), 耦合系数 $B_{mn}(x)$ 模值的计算结果如图8所示.

根据图8所示, 可以看出: 与上坡波导相同, 高阶耦合简正波之间的耦合强度和能量转移能力要更强; 阶数相差较小的简正波之间耦合和能量转移要强于阶数相差较大的情况; 简正波之间的耦合满足对称性. 考虑水平间隔 Δx =10 m、水平距离点 $x = 20$ m 和 $x = 510$ m (第4阶简正波转化为波导简正波的水平距离), 参照图8的计算参数, 则下坡情况下各阶简正波幅度函数 $C_n(x)$ 所引起的 $x + \Delta x$ 处 $C_m(x + \Delta x)/C_m(0)$ 模值分布如图9所示.

与图5所示的上坡计算结果相比, 从图9中可以看出, 相同点为: 各阶简正波之间的耦合和能量转移要远小于环境参数水平变化所导致的各阶简正波自身的变化; 高阶简正波随着水平距离的增加而衰减, 在远距离处实际的耦合和能量转移效果要弱于低阶简正波. 但也存在着不同点: 在图9(c)中, $x = 20$ m时, $x+\Delta x$ 处的第7阶简正波从 x 处的第6阶和第8阶简正波耦合了较多能量; 在图9(d)中, $x = 510$ m时, $x + \Delta x$ 处的第4阶简正波从 x 处的第3阶和第5阶简正波耦合了较多能量.

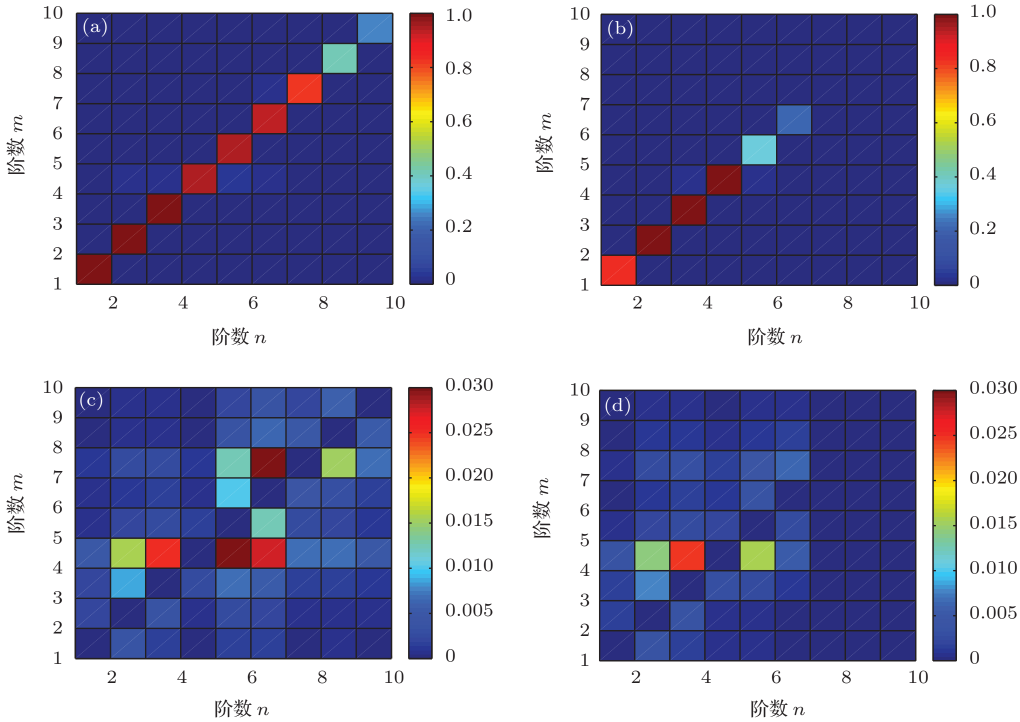

图9 (网刊彩色) $\alpha = 2.86°$ 时下坡波导不同水平距离下各阶简正波幅度函数 $C_n(x)$ 所引起的 $C_m(x + \Delta x)/C_m(0)$ 模值分布 (a) $x = 20$ m; (b) $x = 510$ m; (c) $x = 20$ m 去除对角元素后的结果; (d) $x = 510$ m 去除对角元素后的结果 (每一方块对应于其左下角所表示的阶数值, 即 $C_n(x)$ 的下标和 $C_m(x + \Delta x)/C_m(0)$ 的下标)

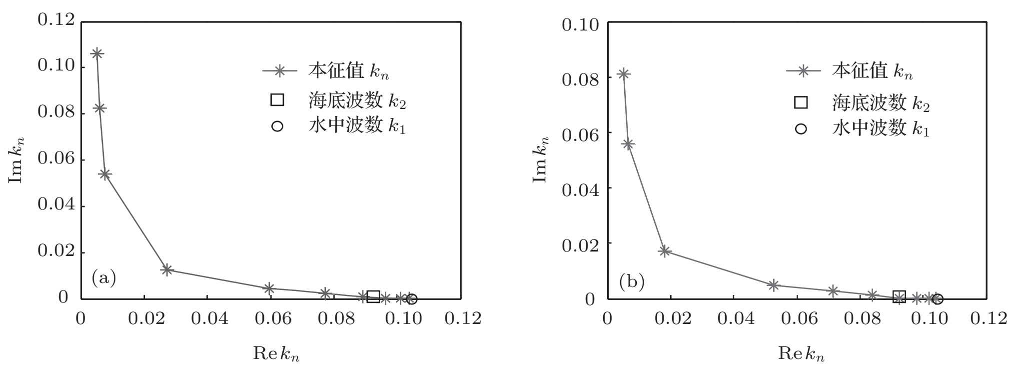

图10 $\alpha = 2.86°$ 时下坡波导不同水平距离下本地本征值分布 (a) $x = 20$ m; (b) $x = 510$ m

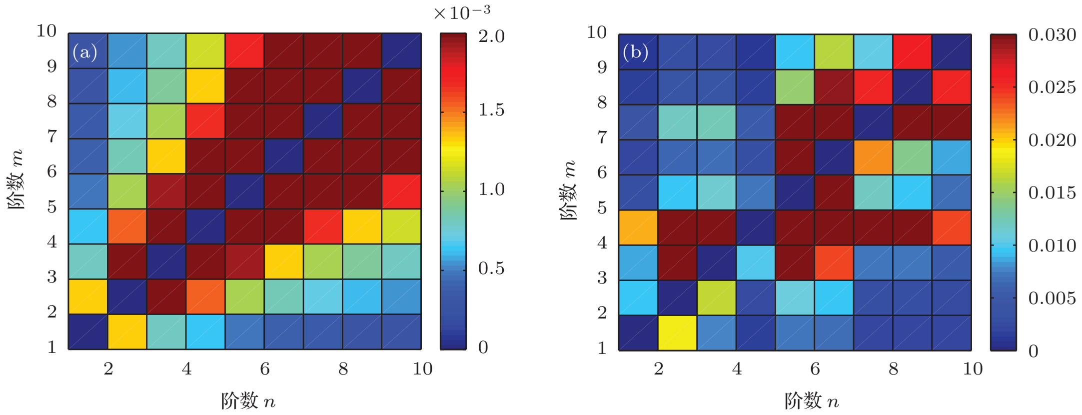

图 11 (网刊彩色) $\alpha = 12.86°$ 时下坡波导 $x = 20$ m 的简正波耦合分布 (a) $B_{mn}(x)$ 模值; (b) 非对角 $C_m(x + \Delta x)/C_m(0)$ 模值

根据 $x = 20$ m 和 $x = 510$ m 处的本地本征值计算, 如图 10 所示, $x = 20$ m 处的第 7 阶简正波为最后一阶满足 $\mathrm{Re}(k_n) > \mathrm{Im}(k_n)$ 的简正波 (Re 和 Im 分别表示实部和虚部), $x = 510$ m 处的第 4 阶简正波为第一阶非波导简正波. 在接下来的传播过程中, 随着海水深度的变深, $x = 20$ m 处的第 7 阶简正波的本征值虚部将大幅度的变小, 而 $x = 510$ m 处的第 4 阶简正波将转化为波导简正波, 具有较小的传播损耗. 因此, 根据图 9 和图 10 的计算, 可以说明: 本征值虚部将大幅度减小的简正波倾向于从邻近简正波中耦合获得较多能量, 即趋于将更多的能量保留至波导中.

当倾角 $\alpha = 12.86°$ 时, 考虑如图 2 (b) 所示的环境参数和几何参数, $x = 20$ m 处的耦合系数 $B_{mn}(x)$ 幅度计算结果和 $x + \Delta x$ 处 $C_m(x + \Delta x)/C_m(0)$ 模值非对角元素分布如图 11 所示. 与图 8 (a) 和图 9 (c) 相比, 可得: 对于下坡波导情况, 简正波之间的耦合能力随着海底倾斜角度的增加而大幅度的提高.

4.2 三维声场干涉结构的变化

对于三维楔形波导, 考虑环境参数仅随单一水平方向变化, 通过 Fourier 变换将三维点源问题转化为二维线源问题, 从而建立三维楔形波导耦合简正波模型. 在建立该模型时, 通过二维线源声场叠加的方法获得三维点源所激发的声场, 其有效性在文献 [26] 中进行了论证. 因此, 若二维线源声场计算结果正确, 则可保证三维楔形波导中声场计算的准确性. 此处, 将根据该三维楔形波导耦合简正波模型分析海底地形变化对声场能量传播和声场干涉结构的影响, 并结合射线-简正波理论阐述相应的物理机理.

对于环境参数和几何参数如图 12 所示的上坡楔形波导, 根据三维楔形耦合简正波模型, x-y 平面的声场能量分布如图 13 所示. 可以看出: 在具有水平海底的波导中, 点源激发的声场将在 x-y 平面内形成以点源为圆心的同心圆形状干涉条纹; 当海水深度沿 x 方向减小时, 则形成 x 方向为短轴的椭圆圆弧形状干涉条纹.

按照文献 [2] 和 [22] 中关于简正波模型和广义射线理论的叙述, 在一定水平距离后每阶简正波可看作一系列广义射线相长干涉的结果, $\{\mathrm{Re}(k_{xn}), k_y\}$ 则表明该系列广义声线的水平传播方向. 根据图 6 所示的上坡波导中不同水平距离处本地本征值

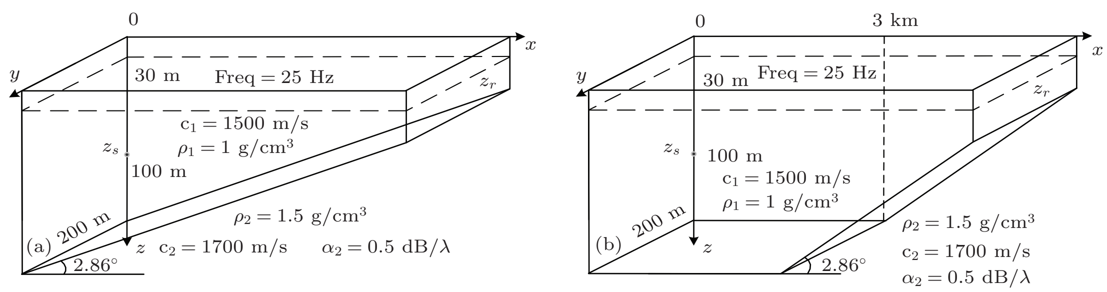

图 12 $\alpha = 2.86°$ 时上倾斜楔形波导示意图 (a) 上倾斜波导 I; (b) 上倾斜波导 II

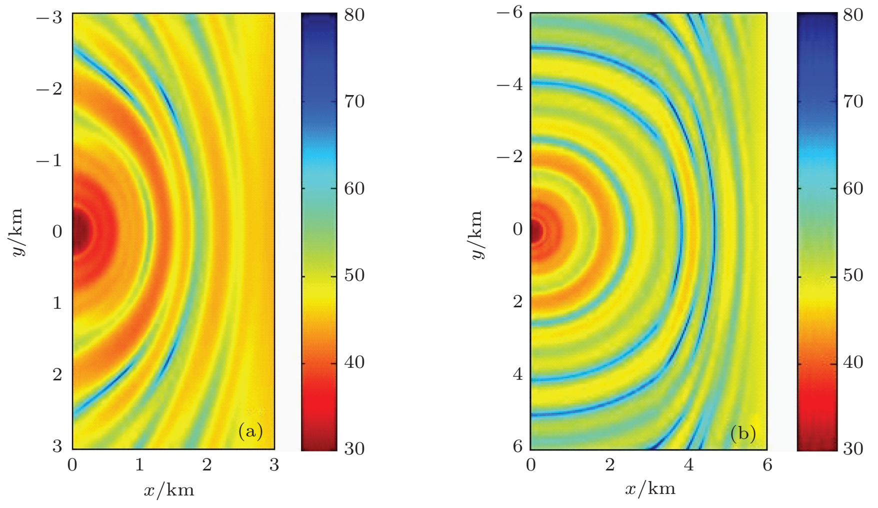

图 13 (网刊彩色) $\alpha = 2.86°$ 时上倾斜楔形波导 x-y 平面声场能量分布 (a) 上倾斜波导 I; (b) 上倾斜波导 II

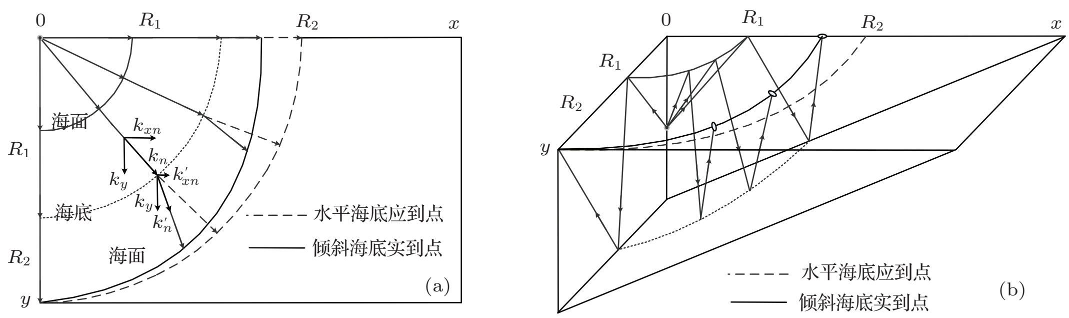

图 14 上倾斜楔形波导声传播示意图 (a) x-y 平面示意图; (b) 三维示意图

值的计算结果, 可知: 每阶简正波本征值 k_n 的实部随着海水变浅而减小. 考虑 k_y-y 的 Fourier 变化方程 (17), 对于每一恒定 ky, 根据恒等式 $k_{xn}^2 + k_y^2 = k_n^2$ 可得 k_{xn} 的实部随着 k_n 实部的减小而减小. 由于 k_n 和 k_{xn} 的实部表明了声场的传播方向, 因此对于上坡楔形波导, 携带着声场能量的广义射线将向 y 轴偏转, 即海水深度增加的方向, 如图 14 (a) 所示. 考虑到海水深度增加的方向可存在更多阶波导简正波, 从而更多的声场能量趋于保留在波导中而不向海底泄漏.

同样, 按照简正波和广义射线的理论, 声场 x-y 平面的声场能量分布形式可看作是广义射线在波导中传播时经海面和海底多次反射叠加所形成的明暗相间的干涉条纹. 参照图 14 (a) 和 (b), 考虑投射角由 k_n 实部确定且依次经过海面-海底-海面作用的广义射线. 经海底作用时, 由于海水深度的减小, 在同一深度处, 越靠近 x 轴的广义射线的水平间隔将越小, 类似于声场能量在传播过程中越靠近 x 轴时越得到压缩, 从而形成 x 轴为短轴的椭圆圆弧形干涉结构.

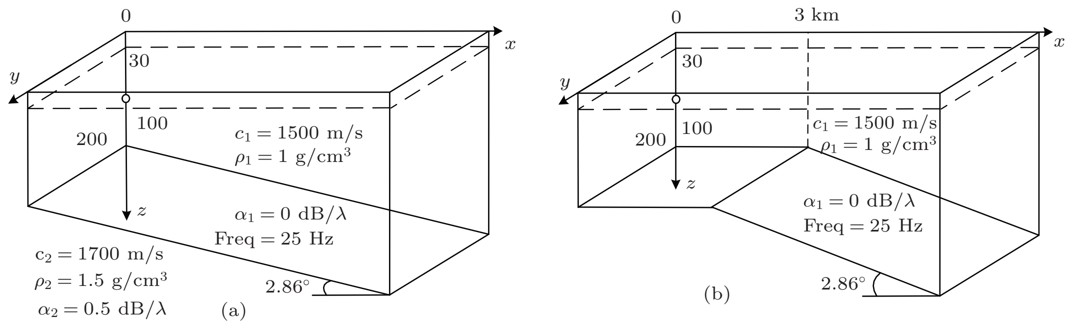

图 15 $\alpha = 2.86°$ 时下倾斜楔形波导示意图 (a) 下倾斜波导 I; (b) 下倾斜波导 II

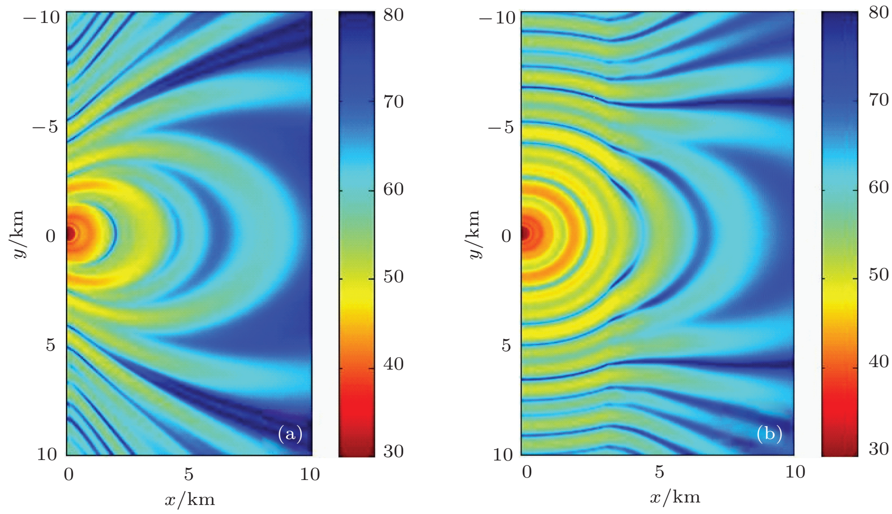

图 16 (网刊彩色) $\alpha = 2.86°$ 时下倾斜楔形波导 x-y 平面声场能量分布 (a) 下倾斜波导 I; (b) 下倾斜波导 II

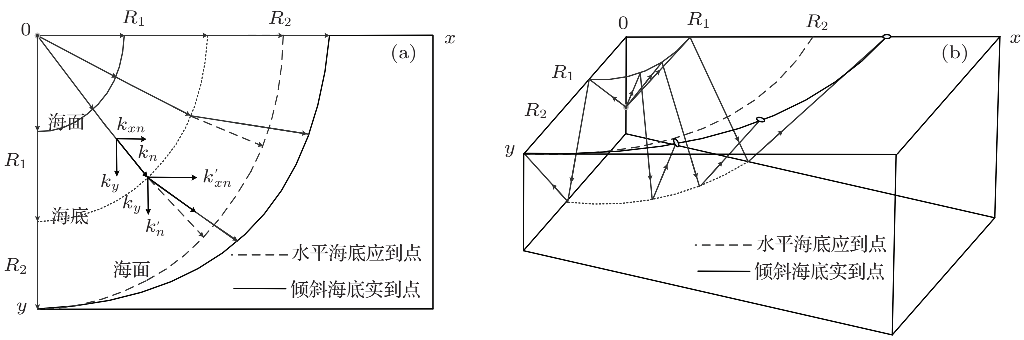

图 17 下倾斜楔形波导声传播示意图 (a) x-y 平面示意图; (b) 三维示意图

对于环境参数和几何参数如图15所示下坡楔形波导, 根据三维楔形耦合简正波模型, x-y 平面的声场能量分布如图16所示. 与图13所示的上坡计算结果相比, 对于下坡的情况, 当海水深度沿 x 方向增加时, 声场将形成 x 方向为长轴的椭圆圆弧形状干涉条纹.

根据图10所示的下坡波导中不同水平距离处本地本征值的计算结果可知, 每阶简正波本征值 k_n 的实部随着海水深度的增加而增大. 考虑 $\{\mathrm{Re}(k_{xn}), k_y\}$ 表明每一束广义射线的水平方向且 k_y 恒定, 因此 k_{xn} 的实部将随着海水深度的增加而增大. 对于下坡楔形波导, 携带着声场能量的广义射线将向 x 轴偏转, 即海水深度增加的方向, 其偏转过程如图17 (a) 所示. 考虑到海水深度较深的区域存在着更多阶的波导简正波, 从而有更多的声场能量被保留在波导中而不向海底泄漏.

参照图17 (a) 和 (b), 考虑投射角由 k_n 实部确定且依次经过海面-海底-海面作用的广义射线. 经海底作用时, 由于海水深度的增加, 在同一深度处, 越靠近 x 轴的广义射线的水平间隔将越大, 类似于声场能量在传播过程中越靠近 x 轴时越得到稀疏, 从而形成 x 轴为长轴的椭圆圆弧形干涉结构.

5 结 论

本文建立了一种大步长格式的二维耦合简正波模型和三维楔形波导耦合简正波模型, 经仿真对比, 表明本文两种模型可分别有效快速地计算二维和三维波导中的声场, 并保证声场满足能量守恒. 以此两种模型为基础, 从理论分析和数值计算的角度, 研究了海底地形水平变化所引起的各阶简正波的耦合和能量转移, 分析了三维声场的干涉结构变化, 解释了三维楔形波导中声场三维效应的物理机理, 得到以下结论: 声场通过简正波彼此之间的耦合来反映环境参数的水平变化对能量传播过程的影响, 对能量的影响程度由简正波耦合系数来表征, 且与环境参数的水平变化成正比; 当某阶简正

波本征值虚部具有较大变化时, 则存在着较大的简正波耦合和能量转移现象, 但声场的能量更趋于被保留在波导中, 而非向波导外泄漏; 对于三维情况, 海底地形的变化将导致声场能量在传播过程中趋于向海水深度增加的水平方向偏转, 声场能量也趋于保留至波导中, 同时波导将对不同方位角度上的声场能量起到类似于压缩或稀疏的作用, 在水平平面上形成椭圆状的干涉结构. 以上研究为进一步探索浅海等水平变化波导中声传播规律、揭示声场特性奠定了理论基础.

参考文献

[1] Jensen F B, Kuperman W A, Porter M B, Schmidt H 2011 *Computational Ocean Acoustics* (2nd Ed.) (New York: Springer)

[2] Wang D Z, Shang E C 2013 *Underwater Acoustics* (2nd Ed) (Beijing: Science Press) p59 (in Chinese) [王德昭, 尚尔昌 2013 水声学 (第二版) (北京: 科学出版社) 第 59 页]

[3] Lin W S, Liang G L, Fu J, Zhang G P 2013 *Acta. Phys. Sin.* **62** 144301 (in Chinese) [林旺生, 梁国龙, 付进, 张光普 2013 物理学报 **62** 144301]

[4] Pierce A D 1965 *J. Acoust. Soc. Am.* **37** 19

[5] Milder D M 1969 *J. Acoust. Soc. Am.* **46** 1259

[6] Abawi A T, Kuperman W A, Collins M D 1997 *J. Acoust. Soc. Am.* **102** 233

[7] Peng Z H, Li F H 2001 *Sci. Cina. Ser A* **31** 165 (in Chinese) [彭朝晖, 李风华 2001 中国科学 A 辑 **31** 165]

[8] Peng Z H, Zhang R H 2005 *Acta Acustica.* **30** 97 (in Chinese) [彭朝晖, 张仁和 2005 声学学报 **30** 97]

[9] Stotts S A 2008 *J. Com. Acoust.* **16** 225

[10] Evans R B 1983 *J. Acoust. Soc. Am.* **74** 188

[11] Luo W Y 2012 *Sci. Cina-Phys. Mech. Astron.* **55** 572

[12] Yang C M, Luo W Y 2012 *Acta Acustica.* **37** 465 (in Chinese) [杨春梅, 骆文于 2012 声学学报 **37** 465]

[13] Luo W Y, Yang C M, Qin J X, Zhang R H 2013 *Chin. Phys. B* **22** 054301

[14] Yang C M, Luo W Y, Zhang R H, Qin J X 2013 *Acta. Phys. Sin.* **62** 094302 (in Chinese) [杨春梅, 骆文于, 张仁和, 秦继兴 2013 物理学报 **62** 094302]

[15] Luo W Y, Yang C M, Zhang R H 2012 *Chin. Phys. Lett.* **29** 014302

[16] Qin J X, Luo W Y, Zhang R H, Yang C M 2013 *Chin. Phys. Lett.* **30** 074301

[17] Luo W Y, Schmidt H 2009 *J. Acoust. Soc. Am.* **125** 52

[18] Luo W Y 2011 *Sci. Cina-Phys. Mech. Astron.* **54** 1562

[19] Fawcett J A 1992 *J. Acoust. Soc. Am.* **92** 290

[20] Godin O A 1998 *J. Acoust. Soc. Am.* **103** 159

[21] Wang N 2004 *J. Ocean. Univ. China* **34** 821 (in Chinese) [王宁 2004 中国海洋大学学报 **34** 821]

[22] McDonald B E, Collins M D, Kuperman W A, Heaney K D 1994 *J. Acoust. Soc. Am.* **96** 2357

[23] Ballard M S 2012 *J. Acoust. Soc. Am.* **131** 2578

[24] Ballard M S 2012 *J. Acoust. Soc. Am.* **131** 1969

[25] Collins M D 1993 *J. Acoust. Soc. Am.* **94** 975

[26] Lamb H 1904 *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **203** 1

Mode coupling and energy transfer in a range-dependent waveguide*

Mo Ya-Xiao Piao Sheng-Chun† Zhang Hai-Gang Li Li

(*Acoustic Science and Technology Laboratory, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China*)

(*College of Underwater Acoustic Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China*)

(Received 22 January 2014; revised manuscript received 2 July 2014)

Abstract

The mode coupling and energy transfer are studied by considering the influences of variation in topography on sound energy transmission and structures of interference in a range-dependent waveguide. A larger level-stepped coupled mode model and a three-dimensional coupled mode model for the wedge bottom are obtained such that the mode coupling and energy transfer may be analyzed efficiently and rapidly. According to the coupled mode models, the transfer of energy is expounded for the forward pressure field in the waveguide with varying topography. Meanwhile, the mechanism is explained by the ray-mode theory for variation of energy distribution caused by variation of topography. Numerical simulations show that the coupling between normal modes and the energy transfer may occur remarkably when the imaginary parts of eigenvalues take on a huge modification, and the propagation direction of sound field will be changed to the increasing direction of sea depth due to variation of topography. In the energy transfer and the modification of propagation direction, the energy of sound field tends to remain in the waveguide, rather than to leak to the seafloor. Meanwhile, the energy distribution will be affected by the compression or sparseness so that interference structures such as ellipse, will be produced.

Keywords: mode coupling, energy transfer, range-dependent waveguide

PACS: 43.30.Bp, 43.20.El **DOI:** 10.7498/aps.63.214302

* Project supported by the Science and Technology Foundation of State Key Laboratory, China (Grant No. 9140C200103120C2001), and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11234002).

† Corresponding author. E-mail: piaoshengchun@hrbeu.edu.cn