前后向子分段相位差频率估计法*

黄翔东 孟天伟† 丁道贤 王兆华

(天津大学电子信息工程学院, 天津 300072)

(2014 年 4 月 11 日收到; 2014 年 5 月 30 日收到修改稿)

为提高直接频率估计法的精度并推导出估计误差方差的闭合表达式, 本文提出基于前后向子分段相位差的直接频率估计法. 该方法对样本的前向和后向两个子段做快速傅里叶变换, 再提取这两个子段变换后的峰值谱相位差而获得频率估计. 本文证明了该估计器具有无偏性, 并推导出其频率估计方差的闭合理论表达式. 仿真实验验证了该闭合表达式的正确性, 故本文方法具有更高的测频精度和广泛的应用前景.

关键词: 频率估计, 前后向子段, 相位差, 克拉美罗限

PACS: 43.58.Kr, 43.60.Hj, 06.30.Ft, 07.50.Qx **DOI:** 10.7498/aps.63.214304

1 引 言

噪声中的复指数信号频率估计[1−8]是信号处理的基本问题, 工程应用中许多物理量的测量, 如大气动力学研究中的雷达风速测量[9]、阵列信号处理中的波达方向估计[10]、振动分析中的转速测量[11]等最终都可转化为频率估计问题. 文献[12]指出, 该问题的最大似然解落在信号的离散时间傅里叶变换 (discrete time Fourier transform, DTFT) 的谱峰处, 然而 DTFT 需做无穷小间隔的频率扫描才可找到真实谱峰, 故难以工程实现.

目前频率估计方法主要分为两大类: 迭代法 (iterative approaches) 和直接法 (direct approaches)[13]. 迭代法 (如 Rife 提出的牛顿迭代方法[14]), 需要先大致给定某一与真实频率接近的初始频率值, 再按照一定的迭代策略 (如文献[15]提出的准牛顿迭代策略) 对频率估计值做反复更新, 才可获得精确频率估计; 直接法则需借助校正[1,16−21]、内插[2,22−24]等措施一次性地得到频率估计结果. 然而, 文献[15]指出: 当初始值落在以真实频率为中心的 5 倍克拉美罗下限 (Cramer-Rao Lower Bound, CRLB) 均方根范围之内时, 迭代法才可获得高精度性能, 文献[25]强调: 若初始值选择不当, 甚至会导致迭代发散的情况. 相对而言, 直接法因无需进行反复参数更新而具有计算量小、方便快捷的优点, 因而更适于快速工程实现场合.

需指出: 现有迭代法 (如文献[26]) 的初始值, 都是借助某直接估计法 (如文献[25]提出的频移与补偿的初始值修正措施) 而得到的. 因此设计新的高精度直接频率估计法, 既可为迭代法提供准确的初始值, 也可直接用来作频率估计器, 具有较高的理论意义和工程价值.

文献[2]指出: 现有的直接频率估计器大多都是有偏的, 如 Quinn 内插估计器[22,27], Macleod 内插估计器[24], Provencher 内插估计器[28], Candan 内插估计器[2,3]以及比值校正法[21]、能量重心校正法[29]等, 这些方法在原理上都做了数学近似 (只有当快速傅里叶变换 (Fast Fourier Transform, FFT) 点数 N 足够大时, 近似误差才可忽略), 因此即使在无噪情况下都存在估计偏差. 另外, 文献[21, 22, 24, 27—29]提出的频率估计器因受算法本身的非线性因素限制, 均没有推导出频率估计方差的理论表达式. 而文献[2,3]提出的 Candan 内插估计器, 因考虑了复指数信号 FFT 的泰勒展开式的高阶无穷小项, 具有很小的频率估计方差, 而且还推导出

* 国家自然科学基金 (批准号: 61271069) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: mengtianwei90@163.com

 http://wulixb.iphy.ac.cn

了该方差的理论表达式, 故尤其值得关注.

需注意的是, 相位差校正法[1,17,30,31], 在无噪情况下, 其估计误差为0, 近年来尤其备受关注[20,32]. 笔者在文献[1]中提出全相位FFT(all-phase FFT, apFFT)/FFT相位差频率估计法, 但该方法用FFT测相时, 仅使用了一半样本, 故数据利用率不高而留下了较大的精度提升空间. 因此, 如何提高现有相位差估计法的测频精度, 推导出其频率估计误差方差的闭合表达式, 并与现有的有偏频率估计法(如最新的Candan内插估计器[2,3])的精度和文献[14]提出的克拉美罗限作比较, 是急需完成的工作. 本文在前人研究的基础上, 通过提取前、后向两个子分段FFT的相位差信息, 提出一种高精度相位差频率估计法, 并推导出了频率估计误差方差的闭合理论表达式.

2 前后向子段FFT相位差频率估计法

给定单频复指数信号序列 $\{x(n) = a\exp[\mathrm{j}(\omega_0 n+\theta_0)], -N+1 \leqslant n \leqslant N-1\}$, 其中频率 ω_0 可表示为如下形式:

$$\omega_0 = (k^*+\delta)\Delta\omega, \quad k^* \in z^+, \quad |\delta| \leqslant 0.5, \tag{1}$$

式中 $\Delta\omega = 2\pi/N$, k^* 为FFT的峰值谱位置.

为估计频率 ω_0, 本文意图导出两个与中心样点 $x(0)$ 相关的相位估计式, 再利用该相关性进行频率估计. 于是将长度为 $2N-1$ 的输入序列截取分为仅包含惟一共同样点 $x(0)$ 的前、后两个子段, 即 $\{x(n), 0 \leqslant n \leqslant N-1\}$ 与 $\{x(n), -N+1 \leqslant n \leqslant 0\}$, 从这两个子段的FFT中提取相位信息(文献[1]仅利用了前向子段的FFT相位信息, 忽略了后向FFT相位信息, 故没有充分利用数据而影响了测频精度).

令 $R_N(n)$ 为 $n \in [0, N-1]$ 的矩形窗, 为方便测相, 我们将前段序列保持不变, 将后段序列进行翻转, 即

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{f}}(n) &= x(n)R_N(n), \\ x_{\mathrm{b}}(n) &= x(-n)R_N(n). \end{aligned} \tag{2}$$

对于截取前的原序列 $x(n)$, 其DTFT变换为

$$X(\mathrm{j}\omega) = a\cdot 2\pi\delta(\omega-\omega_0)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_0}. \tag{3}$$

不难推出, 矩形窗的DTFT变换 $R_N(\mathrm{j}\omega)$ 为

$$R_N(\mathrm{j}\omega) = \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{(N-1)}{2}\omega}. \tag{4}$$

则根据时域加窗与频域卷积的对应关系, 前向序列的DTFT变换 $X_{\mathrm{f}}(\mathrm{j}\omega)$ 为

$$\begin{aligned} X_{\mathrm{f}}(\mathrm{j}\omega) &= \frac{1}{2\pi}X(\mathrm{j}\omega) * R_N(\mathrm{j}\omega) \\ &= a\cdot\frac{\sin[(\omega-\omega_0)N/2]}{\sin[(\omega-\omega_0)/2]} \\ &\quad\times \mathrm{e}^{\mathrm{j}[-\frac{(N-1)}{2}(\omega-\omega_0)+\theta_0]}. \end{aligned} \tag{5}$$

由于FFT为DTFT在 $\omega = k\Delta\omega$, $k \in [0, N-1]$ 上的采样, 故前向FFT谱 $X_{\mathrm{f}}(k)$ 为

$$\begin{aligned} X_{\mathrm{f}}(k) &= a\cdot\frac{\sin[(k\Delta\omega-\omega_0)N/2]}{\sin[(k\Delta\omega-\omega_0)/2]} \\ &\quad\times \mathrm{e}^{\mathrm{j}[\theta_0-\frac{(N-1)(k\Delta\omega-\omega_0)}{2}]}. \end{aligned} \tag{6}$$

代入 $k = k^*$, 得峰值振幅谱位置的FFT值 $X_{\mathrm{f}}(k^*)$ 为

$$\begin{aligned} X_{\mathrm{f}}(k^*) &= a\cdot\frac{\sin[\delta\Delta\omega\cdot N/2]}{\sin[\delta\cdot\Delta\omega/2]}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\theta_0-\frac{(N-1)(k^*\Delta\omega-\omega_0)}{2}]} \\ &= a\cdot\frac{\sin(\delta\cdot\pi)}{\sin(\delta\cdot\Delta\omega/2)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\theta_0+\delta\frac{(N-1)}{N}\pi]}. \end{aligned} \tag{7}$$

则其峰值谱位置的相位谱值为

$$\varphi_{\mathrm{f}}(k^*) = \theta_0 + \delta\pi(N-1)/N. \tag{8}$$

类似地, $x(-n)$ 的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} X(-\mathrm{j}\omega) &= a\cdot 2\pi\delta(-\omega-\omega_0)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_0} \\ &= a\cdot 2\pi\delta(\omega+\omega_0)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_0}. \end{aligned} \tag{9}$$

由傅里叶变换性质, 得后向序列的傅里叶变换 $X_{\mathrm{b}}(\mathrm{j}\omega)$ 为

$$\begin{aligned} X_{\mathrm{b}}(\mathrm{j}\omega) &= \frac{1}{2\pi}X(-\mathrm{j}\omega) * R_N(\mathrm{j}\omega) \\ &= a\cdot\frac{\sin[(\omega+\omega_0)N/2]}{\sin[(\omega+\omega_0)/2]} \\ &\quad\times \mathrm{e}^{\mathrm{j}[\theta_0-\frac{(N-1)}{2}(\omega+\omega_0)]}. \end{aligned} \tag{10}$$

对后向序列的傅里叶变换 $X_{\mathrm{b}}(\mathrm{j}\omega)$ 在 $\omega = k\Delta\omega$, $k \in [0, N-1]$ 做均匀采样, 则后向FFT谱 $X_{\mathrm{b}}(k)$ 为

$$\begin{aligned} X_{\mathrm{b}}(k) &= a\cdot\frac{\sin[(k\Delta\omega+\omega_0)N/2]}{\sin[(k\Delta\omega+\omega_0)/2]} \\ &\quad\times \mathrm{e}^{\mathrm{j}[\theta_0-\frac{(N-1)(k\Delta\omega+\omega_0)}{2}]}. \end{aligned} \tag{11}$$

由傅里叶变换性质可推知前、后向FFT谱峰幅度相等, 并且谱峰位置关于 $k = N/2$ 对称, 即

$$|X_{\mathrm{f}}(k^*)| = |X_{\mathrm{b}}(N-k^*)|$$

$$= \left| a \cdot \frac{\sin(\delta\pi)}{\sin(\delta\Delta\omega/2)} \right|. \tag{12}$$

将 $k = N - k^*$ 代入(11)式, 化简进而可得其对应的相位谱值

$$\varphi_{\rm b}(N-k^*) = \theta_0 - \delta\pi(N-1)/N. \tag{13}$$

观察(8)式与(13)式:

$$\varphi_{\rm f}(k^*) = \theta_0 + \delta\pi(N-1)/N,$$
$$\varphi_{\rm b}(N-k^*) = \theta_0 - \delta\pi(N-1)/N. \tag{14}$$

将(14)式的两个相位项相减, 可得频偏估计式

$$\hat{\delta} = \frac{[\varphi_{\rm f}(k^*) - \varphi_{\rm b}(N-k^*)]}{(N-1)} \cdot \frac{1}{2\pi/{\rm N}}. \tag{15}$$

结合(1)式, 则可推出最终的频率估计式为

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_0 &= (k^* + \hat{\delta})\Delta\omega \\ &= k^*\Delta\omega + \frac{\varphi_{\rm f}(k^*) - \varphi_{\rm b}(N-k^*)}{N-1}.\end{aligned} \tag{16}$$

相应地, 其双向子段相位差频率估计流程如图1所示.

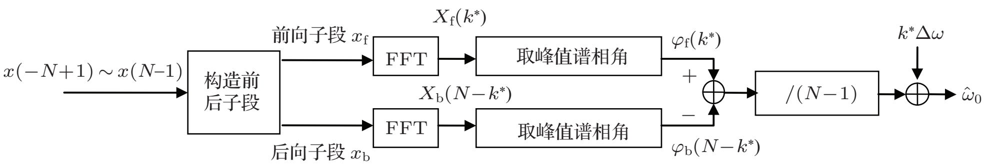

图1 前后向子段相位差频率估计法流程

3 频率估计性能定量分析

3.1 无噪情况

从(5)式—(16)式可看出, 本文方法的每一步推导都经过了严格证明, 没有做数学上的理论近似, 故本文方法是无偏频率估计(文献[21, 22, 24, 27—29]提出的各种频率估计器, 均做了数学近似, 不是无偏估计器), 无噪情况时其误差为0. 众所周知, 估计器的均方误差(mean square error, MSE)等于方差与无噪偏差平方的叠加, 因此本文方法的MSE即为方差.

3.2 含噪情况

1) 均值分析

由于本文方法是无偏估计, 故在加性高斯白噪声的背景中, 其均值等于真实频率值即

$$E(\hat{\omega}_0) = \omega_0. \tag{17}$$

2) 方差分析

频率估计(16)式中, k^*, $\Delta\omega$ 均为常量, 只有 $\varphi_{\rm f}(k^*)$, $\varphi_{\rm b}(N-k^*)$ 为变量. 而从上述条件可看出, 两个长度为 N 的双向子分段 $x_{\rm f}$ 与 $x_{\rm b}$ 只有 $x(0)$ 是重叠的, 故可把 $\varphi_{\rm f}(k^*)$, $\varphi_{\rm b}(N-k^*)$ 近似看作是相互独立随机变量; 另外, $\varphi_{\rm f}(k^*)$, $\varphi_{\rm b}(N-k^*)$ 由于具有对称性而具备相同的统计特性, 故对(16)式两边取方差, 有

$$\begin{aligned}{\rm var}(\hat{\omega}_0) &= \frac{{\rm var}[\varphi_{\rm f}(k^*)] + {\rm var}[\varphi_{\rm b}(N-k^*)]}{(N-1)^2} \\ &= \frac{2{\rm var}[\varphi_{\rm f}(k^*)]}{(N-1)^2}.\end{aligned} \tag{18}$$

因而求取 $\varphi_{\rm f}(k^*)$ 的方差是关键.

假设 $w(n)$ 为零均值、方差为 σ^2 的复高斯白噪声, 则信号模型为 $x(n) = a\exp[{\rm j}(\omega_0 n + \theta_0)] + w(n)$, 相应地, 信噪比(signal to noise ratio, SNR)值 ρ 表示为

$$\rho = a^2/\sigma^2. \tag{19}$$

不妨将峰值 $k = k^*$ 处噪声 $w(n)$ 的FFT表示为

$$\begin{aligned}W(k^*) &= \sum_{n=0}^{N-1} w(n)\,{\rm e}^{-{\rm j}\frac{2\pi}{N}nk^*} \\ &= r\,{\rm e}^{{\rm j}\varphi} = r\cos\varphi + {\rm j}r\sin\varphi,\end{aligned} \tag{20}$$

式中, r, φ 分别为表示幅值和相角的随机变量. 对(20)式两边取方差有

$$\begin{aligned}{\rm var}[W(k^*)] &= {\rm var}\left[\sum_{n=0}^{N-1} w(n)\,{\rm e}^{-{\rm j}\frac{2\pi}{N}nk^*}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1}\left|{\rm e}^{-{\rm j}\frac{2\pi}{N}nk^*}\right|^2 \cdot {\rm var}[w(n)] \\ &= N\sigma^2.\end{aligned} \tag{21}$$

联立(20), (21)式, 则有

$$\begin{aligned}{\rm var}(r\cdot\cos\varphi) &= {\rm var}(r\cdot\sin\varphi) \\ &= {\rm var}[W(k^*)]/2 = N\sigma^2/2.\end{aligned} \tag{22}$$

由 (7) 和 (20) 式, 可推出前向子段FFT峰值谱

$$X_{\mathrm{f}}(k^*) = a\cdot\frac{\sin(\delta\cdot\pi)}{\sin(\delta\cdot\Delta\omega/2)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\theta_0+\delta\frac{(N-1)}{N}\pi]} + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}. \tag{23}$$

将 (23) 式进一步推导为

$$\begin{aligned}
&X_{\mathrm{f}}(k^*)\\
&= a\cdot\frac{\sin(\delta\cdot\pi)}{\sin(\delta\cdot\Delta\omega/2)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\theta_0+\delta\frac{(N-1)}{N}\pi]}\\
&\quad\times\left[1+\frac{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi-\theta_0-\delta(N-1)\pi/N)}}{a\cdot(\sin(\delta\cdot\pi)/\sin(\delta\cdot\Delta\omega/2))}\right]\\
&= a\cdot\frac{\sin(\delta\cdot\pi)}{\sin(\delta\cdot\Delta\omega/2)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\theta_0+\delta\frac{(N-1)}{N}\pi]}\\
&\quad\times\left[1+\frac{r\cos(\varphi-\theta_0-\delta\pi(N-1)/N)}{a\cdot(\sin(\delta\cdot\pi)/\sin(\delta\cdot\Delta\omega/2))}\right.\\
&\quad\left.+\mathrm{j}\frac{r\sin(\varphi-\theta_0-\delta\pi(N-1)/N)}{a\cdot(\sin(\delta\cdot\pi)/\sin(\delta\cdot\Delta\omega/2))}\right].
\end{aligned} \tag{24}$$

由 (24) 式可推出噪声背景下前向子段峰值谱相位 $\varphi_{\mathrm{f}}(k^*)$ 为

$$\varphi_{\mathrm{f}}(k^*) = \theta_0+\delta\frac{(N-1)}{N}\pi + \arctan\frac{\dfrac{r\sin[\varphi-\theta_0-\delta\pi(N-1)/N]}{a\cdot(\sin(\delta\cdot\pi)/\sin(\delta\cdot\Delta\omega/2))}}{1+\dfrac{r\cos[\varphi-\theta_0-\delta\pi(N-1)/N]}{a\cdot(\sin(\delta\cdot\pi)/\sin(\delta\cdot\Delta\omega/2))}}. \tag{25}$$

当 ρ 不特别低时, (25) 式 $\arctan(\cdot)$ 项的分子比分母小得多, 根据 $\arctan(x)\propto x$ 的等价无穷小关系, 有

$$\varphi_{\mathrm{f}}(k^*) \approx \theta_0+\delta\frac{(N-1)}{N}\pi + \frac{r\sin[\varphi-\theta_0-\delta\pi(N-1)/N]}{a\cdot(\sin(\delta\cdot\pi)/\sin(\delta\cdot\Delta\omega/2))}. \tag{26}$$

(26) 式中, 只有 r, φ 为随机变量, 则对 (26) 式两边取方差, 有

$$\operatorname{var}[\varphi_{\mathrm{f}}(k^*)] \approx \frac{\operatorname{var}(r\sin\varphi)}{a^2\cdot(\sin(\delta\cdot\pi)/\sin(\delta\cdot\Delta\omega/2))^2}. \tag{27}$$

联立 (22), (23), (27) 式有

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}[\varphi_{\mathrm{f}}(k^*)] &\approx \frac{1/2\cdot\operatorname{var}[W(k^*)]}{a^2\cdot(\sin(\delta\cdot\pi)/\sin(\delta\cdot\Delta\omega/2))^2}\\
&= \frac{N}{2\rho\cdot(\sin(\delta\cdot\pi)/\sin(\delta\cdot\Delta\omega/2))^2}.
\end{aligned} \tag{28}$$

当 N 足够大, 则 $\sin(\delta\Delta\omega/2)=\sin(\delta\pi/N)\propto\delta\pi/N$, 故 (28) 式可进一步简化为

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}[\varphi_{\mathrm{f}}(k^*)] &\approx \frac{N\sin^2(\delta\cdot\Delta\omega/2)}{2\rho\cdot\sin^2(\delta\cdot\pi)} \approx \frac{N\delta^2\pi^2/N^2}{2\rho\cdot\sin^2(\delta\cdot\pi)}\\
&= \frac{1}{2\rho\cdot N\sin c^2(\delta)}.
\end{aligned} \tag{29}$$

联立 (18), (29) 式, 有

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}(\hat{\omega}_0) &\approx \frac{2\operatorname{var}[\varphi_{\mathrm{f}}(k^*)]}{(N-1)^2}\\
&= \frac{1}{\rho N(N-1)^2\sin c^2(\delta)}.
\end{aligned} \tag{30}$$

文献 [14] 给出 N 个样本情况下的频率估计方差的克拉美罗限为

$$\mathrm{CRLB} = 6/[\rho N(N^2-1)]. \tag{31}$$

由于本文方法使用了 $2N-1$ 个样本, 故应将 $2N-1$ 替代 (31) 式中的 N, 可推出对应的克拉美罗限为

$$\mathrm{CRLB} = 3/[2\rho N(N-1)(2N-1)]. \tag{32}$$

4 仿真实验

令 $N=16$, 对 $\{x(n)=2\exp[\mathrm{j}(4+\delta)2\pi/Nn+\pi/3)]+w(n), -N+1\leqslant n\leqslant N-1\}$, 分别用前后向子段相位差法、apFFT/FFT相位差法、Candan频率估计法 (样本数为 $2N-1$) 进行频率估计, 设定其频偏值 δ 在 0—0.5 间变化, 对于每种频偏情况, 做 1000 次 Monte-Carlo 测频模拟, 并统计均方误差 MSE.

表 1 给出了频偏 $\delta=0.15$ 时不同方法的频率估计均方误差.

表 1 频偏 $\delta=0.15$ 时的频率估计均方误差 (MSE)

方法	SNR/dB				
	SNR = −10	SNR = 0	SNR = 20	SNR = 40	SNR = 60
前后向子段	3.702984	0.013957	2.93×10^{-6}	2.89×10^{-8}	3.03×10^{-10}
ApFFT/FFT	3.689817	0.012631	4.54×10^{-6}	4.19×10^{-8}	4.45×10^{-10}
Candan	3.186868	0.000367	3.43×10^{-6}	3.45×10^{-8}	3.47×10^{-10}
CRLB	0.002016	0.000202	2.02×10^{-6}	2.02×10^{-8}	2.02×10^{-10}

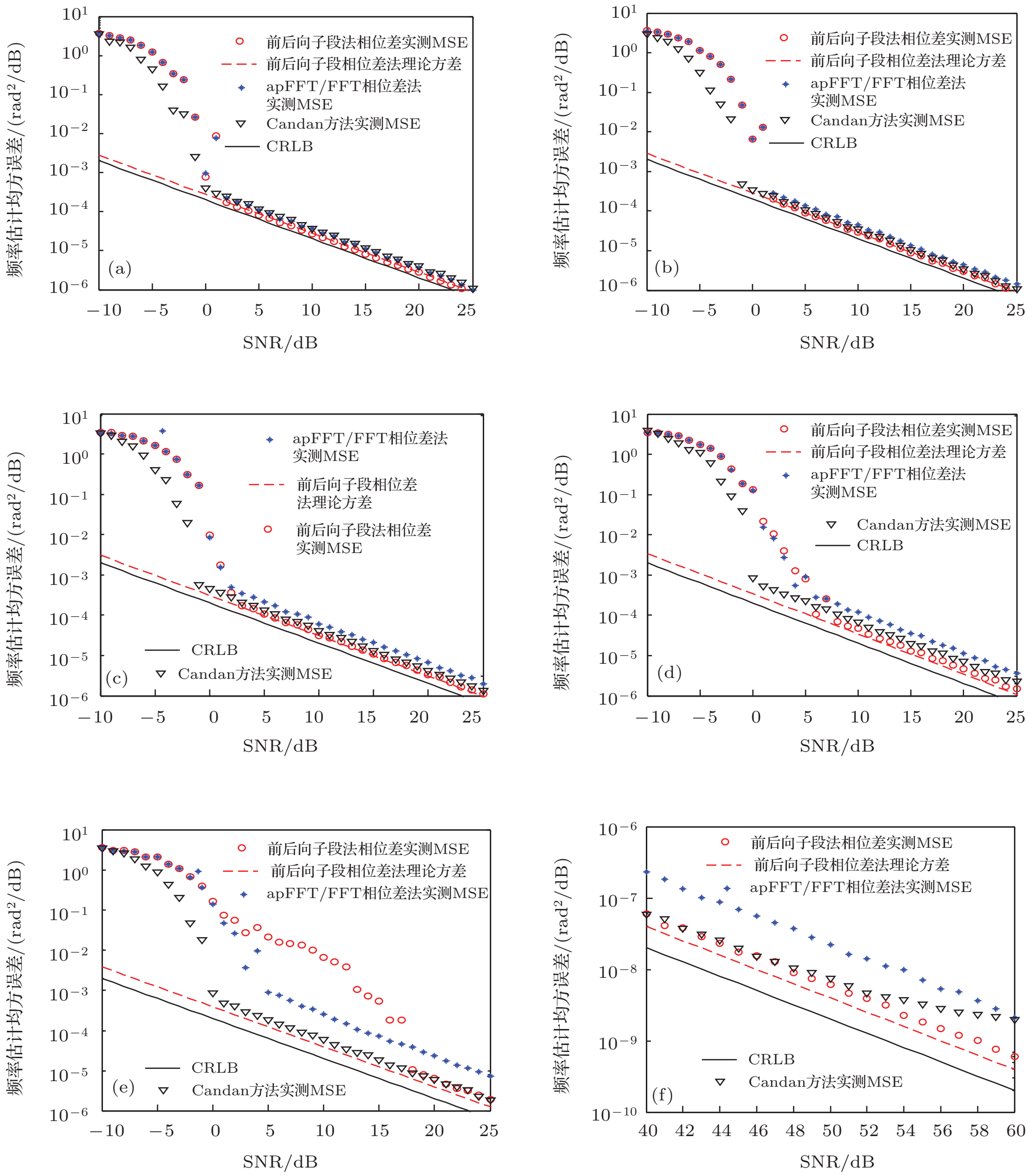

图 2 (网刊彩色) 三种测频均方误差曲线及克拉美罗下限曲线对照 (a) $\delta = 0.05$; (b) $\delta = 0.15$; (c) $\delta = 0.25$; (d) $\delta = 0.35$; (e) $\delta = 0.45$; (f) $\delta = 0.45$(高信噪比)

为直观比较各种方法的测频性能, 图 2 (a)—(f) 给出了测频MSE曲线, 并给出本文推导的 (30) 式的理论测频方差和克拉美罗限CRLB曲线做对照.

从图 2 (a)—(f), 可总结如下规律:

1) 对于任意频偏情况, 在信噪比不太低的区域, 总体说来, 本文提出的前后向子段相位差法的频率估计均方误差曲线 ('◦' 标记) 距离CRLB最近, Candan内插法 ('▽' 标记) 次之, apFFT/FFT 相位差法距离CLRB 最远. 因此, 本文方法具有最高的频率估计精度.

2) 三种算法的估计精度都与频偏值 δ 有关: δ 越小, 均方误差越小, 精度越高. 从图 2 (a) 到 (f), 随着 δ 从0.05增加到0.45, 前后向子段法、Candan内插法与apFFT/FFT相位差法的MSE曲线都是偏离CRLB越来越远.

3) 从图 2 (a)—(f) 可看出, 在信噪比不太低的区域, 前后向子段相位差法的实测MSE曲线与 (30) 式计算出的理论方差曲线 ('–' 标记) 符合得非常好, 这证明了 (30) 式的理论方差推导正确.

4) 对于Candan内插法 ('▽' 标记), 在SNR较高的区域, 如图 2 (f) $\delta = 0.45$ 的情况, 当SNR > 50 dB时, MSE曲线变得相对平坦, 偏离CRLB也越来越远. 这证明了Candan估计有偏的, 因为MSE等于方差与无噪偏差平方的叠加, 当SNR很高时,

方差值对MSE的贡献变得微小, MSE 主要来自于无噪偏差平方, 故Candan内插估计器的MSE曲线出现明显偏离. 而前后向子段相位差法和apFFT/FFT相位差法却不会出现这种情况, 因为这两者都是无偏估计, MSE曲线即为频率估计方差曲线.

5) 需指出: 在SNR较低的区域, 三种频率估计方法都存在信噪比阈值$\mathrm{SNR_{th}}$, 即当SNR $<$ $\mathrm{SNR_{th}}$时, 频率估计性能急剧降低, 表现为MSE急剧增大. 从图2 (a)—(f) 可看出, Candan内插法的$\mathrm{SNR_{th}}$值最低, apFFT/FFT相位差法次之, 前后向子段法的$\mathrm{SNR_{th}}$值最高. 也就是说, 本文方法抵抗大噪声干扰能力比其他两种算法要差些, 这可看作是其高精度性能所付出的代价.

5 结 论

本文提出了前后向子段相位差频率估计法, 该方法与apFFT/FFT相位差法一样, 都是无偏估计器, 在信噪比较高的场合, 本文方法精度很高, 相比于apFFT/FFT相位差法和Candan内插估计法, 其MSE曲线更靠近克拉美罗限.

需指出, 本文的频率估计是针对单频复指数信号而言的, 对于多频测量场合, 其测量精度分析变得复杂, 因为除受随机噪声干扰外, 还存在各频率成分之间的相互干扰; 具体说来, 这种谱间干扰的严重程度又取决于各待测成分的频率间距、初相值、幅值以及各自的频偏大小等多方面因素. 其中, 各待测成分的频率间距是影响测频精度的最大因素: 间距大时, 近似可看成多个单频估计; 间距较小时, 各成分的谱间干扰加剧, 表现在初相、幅值、频偏的微小变化都会大大影响测频精度. 而文献[1]提出的apFFT/FFT相位差法利用了apFFT良好的抑制谱泄漏性能而降低了谱间干扰, 故更适合做多频测量. 因而工程应用时, 应具体问题具体分析, 在测频精度(前后向子段法最好)、测频个数(apFFT/FFT相位差法最好)和抵御大噪声干扰能力(Candan内插估计法最好)几个方面做权衡.

参考文献

[1] Huang X D, Wang Z H 2008 *Journal of Electronics Information Technology* **30** 293 (in Chinese) [黄翔东, 王兆华 2008 电子与信息学报 **30** 293]

[2] Candan C 2011 *IEEE Signal Processing Letters* **18** 351

[3] Candan C 2013 *IEEE Signal Processing Letters* **20** 913

[4] Duarte M F, Baraniuk R G 2012 *Applied and Computational Harmonic Analysis* **1** 111

[5] Chen Zh, Zeng Y Ch, Fu Zh J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 46 (in Chinese) [陈争, 曾以成, 付志坚 2008 物理学报 **57** 46]

[6] Cong Ch, Li X K, Song Y 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 064301 (in Chinese) [丛超, 李秀坤, 宋扬 2014 物理学报 **63** 064301]

[7] Cheng F, Wang Y Z 2012 *Chin. Phys. B* **21** 070309

[8] Bai Y F, Zhai Sh Q, Gao J R, Zhang J X 2011 *Chin. Phys. B* **20** 034207

[9] Qing H Y, Zhang Y N, Zhou Ch, Zhao Zh Y, Chen G 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 094301 (in Chinese) [青海银, 张援农, 周晨, 赵正予, 陈罡 2014 物理学报 **63** 094301]

[10] Zhang Y D, Amin M G, Himed B 2012 *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing* **1** 1

[11] Ding Z, Yao X S, Liu T, Du Y, Liu K, Han Q, Meng Zh, Chen H X 2012 *Optics Express* **20** 28319

[12] Stoica P, Moses R L 2005 *Spectral analysis of signals* (Nanjing: Pearson/Prentice Hall Upper Saddle River)

[13] Liao J R, Chen C M 2014 *Signal Processing* **94** 108

[14] Rife D, Boorstyn R 1974 *IEEE Transactions on Information Theory* **20** 591

[15] Abatzoglou T 1985 *IEEE Transactions on Speech and Signal Processing* **33** 77

[16] Chen K F, Wang J L, Zhang S W 2008 *Journal of Vibration Engineering* **21** 314 (in Chinese) [陈奎孚, 王建立, 张森文 2008 振动工程学报 **21** 314]

[17] Ding K, Zhong Sh C 2003 *Chinese Journal of Electronics* **31** 142 (in Chinese) [丁康, 钟舜聪 2003 电子学报 **31** 142]

[18] Huang X D, Wang Zh H, Luo P, Lv W 2011 *Chinese Journal of Electronics* **39** 172 (in Chinese) [黄翔东, 王兆华, 罗蓬, 吕卫 2011 电子学报 **39** 172]

[19] Mao Y W, Tu Y Q, Xiao W, Yang H Y 2012 *Journal of Vibration and Shock* **31** 112 (in Chinese) [毛育文, 涂亚庆, 肖玮, 杨辉跃 2012 振动与冲击 **31** 112]

[20] Tan S W, Ren Zh L, Sun Ch C 2013 *Systems Engineering and Electronics* **35** 34 (in Chinese) [谭思炜, 任志良, 孙常存 2013 系统工程与电子技术 **35** 34]

[21] Zh X Y, Ding K 2001 *Signal Processing.* **17** 91 (in Chinese) [朱小勇, 丁康 2001 信号处理 **17** 91]

[22] Quinn B G 1997 *IEEE Transactions on Signal Processing* **45** 814

[23] Mckilliam R G, Quinn B G, Clarkson I V L, Moran B 2010 *IEEE Transactions on Signal Processing* **58** 2953

[24] Macleod M D 1998 *IEEE Transactions on Signal Processing* **46** 141

[25] Deng Zh M, Liu Y 2007 *Chinese Journal of Electronics* **35** 104 (in Chinese) [邓振淼, 刘渝 2007 电子学报 **35** 104]

[26] Aboutanios E, Mulgrew B 2005 *IEEE Transactions on Signal Processing* **53** 1237

[27] Quinn B G 1994 *IEEE Transactions on Signal Processing* **42** 1264

[28] Provencher S 2010 *IEEE Transactions on Signal Processing* **58** 3879

[29] Ding K, Jiang L Q 2001 *Journal of Vibration Engineering* **14** 354 (in Chinese) [丁康, 江利旗 2001 振动工程学报 **14** 354]

[30] Huang X D, Wang Zh H 2008 *Journal of Tianjin University* **41** 815 (in Chinese) [黄翔东, 王兆华 2008 天津大学学报 **41** 815]

[31] Qi G Q 2003 *Journal of Data Acquisition & Processing* **18** 7 (in Chinese) [齐国清 2003 数据采集与处理 **18** 7]

[32] Zhang T, Ren Zh L, Chen G, Sun Ch C 2011 *Systems Engineering and Electronics* **33** 1468 (in Chinese) [张涛, 任志良, 陈光, 孙常存 2011 系统工程与电子技术 **33** 1468]

A novel phase difference frequency estimator based on forward and backward sub-segmenting*

Huang Xiang-Dong Meng Tian-Wei† Ding Dao-Xian Wang Zhao-Hua

(*School of Electronic Information Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China*)

(Received 11 April 2014; revised manuscript received 30 May 2014)

Abstract

In engineering applications, many measurements of physical quantities can be converted into the problems of frequency estimation. The current frequency estimators are mainly divided into two categories: iterative approaches and direct approaches. However, iterative approaches are not suitable for rapid physical measurement occasions due to its complicated process. But most of the direct approaches are the biased estimators, which are incapable of providing quantitative estimates of variance expression. To enhance the accuracy of the direct frequency estimator and derive the closed-form theoretic expression of the estimated error variance, this paper proposes a novel phase difference frequency estimator based on the forward and backward sub-segmenting. This estimator implements forward and backward fast Fourier transform (FFT) on the given samples separately, and then extracts the phase difference from the peak FFT bins of these two sub-segments to estimate the frequency. And it is emphasized that the proposed method is an unbiased frequency estimator, whose closed-form theoretic expression of the frequency estimated error variance is also derived. Moreover, simulation not only verifies the correctness of this closed-form expression but also proves that the proposed frequency estimator's mean square error is closer to the Cramer-Rao lower bound than that of apFFT/FFT phase difference estimator and Candan estimator. In conclusion, the proposed estimator has higher accuracy in measuring frequencies and has a wide application prospect.

Keywords: frequency estimation, forward and backward sub-segment, phase difference, CRLB

PACS: 43.58.Kr, 43.60.Hj, 06.30.Ft, 07.50.Qx **DOI:** 10.7498/aps.63.214304

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61271069).

† Corresponding author. E-mail: mengtianwei90@163.com