

从北极高压、南极低压到南北极间的三维异宿轨道*

刘式达 付遵涛† 刘式适

(北京大学物理学院大气与海洋科学系, 气候与海-气实验室, 北京 100871)

(2014年4月25日收到; 2014年5月19日收到修改稿)

本文利用球坐标系 (λ, φ, r) 中的球面地转风关系, 说明当等压线形成最简单的纬向分布时, 此时南极是低压, 北极是高压. 但是, 当在地转风关系中加入摩擦力后, 则南北极由闭合涡旋变成螺旋涡旋, 且两极之间形成一条球面上的三维异宿轨道.

关键词: 北极高压, 南极低压, 摩擦力, 异宿轨道

PACS: 47.10.Fg, 05.45.-a, 47.32.C-

DOI: 10.7498/aps.63.214701

1 引言

在二维非线性动力系统中, 我们讨论过很多由一个平衡态到另一个平衡态或极限环的异宿轨道^[1,2]. 在球面上大气有许多无风点, 这些无风点就是速度场的平衡态. 它们之间的轨道就是异宿轨道. 由于绘制天气图时是画等压线, 所以球面上的气旋和反气旋被绘出未闭合轨道, 它们的中心就是无风点(平衡态), 这样平衡态之间的异宿轨道就画不出了. 在天气图上实际的流线并非等压线, 而是风速的切线. 在地面天气图上由于摩擦力的存在, 风速要穿过等压线, 并由高压吹向低压. 这是由于地表的大气受到摩擦力影响的缘故.

本文利用球面上的地转关系, 假设气压场 $p = A \sin \varphi$, 那么导得的风场仅是纬向分布, 此时北极是高压, 南极是低压. 但是, 若加上摩擦力以后, 北极的轨道则是螺旋向外, 南极的轨道则是螺旋向内. 南北极之间则是三维螺旋异宿轨道.

2 纬向气流的动力系统

在球坐标系 (λ, φ, r) 中, 气压梯度力和 Coriolis 力相平衡的地转关系为^[3]

$$-\frac{1}{a\rho \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + f v_{\varphi} = 0, \quad (1)$$

$$-\frac{1}{a\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - f v_{\lambda} = 0, \quad (2)$$

其中 φ, λ 分别是纬度和经度, a 是地球半径, $f = 2\Omega \sin \varphi$ (Ω 是地球旋转角速度)是 Coriolis 参数, 今后我们假设它为常数. v_{λ} 是纬向速度(向东为正), v_{φ} 是经向速度(向北为正).

为了求得速度场, 在(1), (2)式中我们假设气压为纬向分布

$$p = A \sin \varphi, \quad (3)$$

其中 A 是常数, 量纲为 $\text{kg/m}\cdot\text{s}^2$.

由(1), (2)式求得球面上的速度场为

$$\begin{aligned} v_{\lambda} &\equiv a \cos \varphi \dot{\lambda} = -\frac{1}{f\rho a} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = -\frac{A}{f\rho a} \cos \varphi, \\ v_{\varphi} &\equiv a \dot{\varphi} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

其中“.”表示对时间的导数.

令(4)式右端为零, 导得

$$\varphi = \pi/2 \text{ (北极)} \text{ 和 } \varphi = -\pi/2 \text{ (南极)} \quad (5)$$

为奇点.

由(4)式看出, $v_{\lambda} < 0$ 即全球刮东风, 风速在赤道最大, 向两极逐步减小, 到两极时为零, 见图1.

由(4)式看出

$$\dot{\lambda} = -A/(f\rho a^2) = -\omega. \quad (6)$$

* 国家自然科学基金(批准号: 40975027)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: fuzt@pku.edu.cn

(6)式说明, 二维球面速度场反映出纬向风速的旋转角速度. 为了更清楚说明, 我们将球坐标系的(4)式化成直角坐标系^[4].

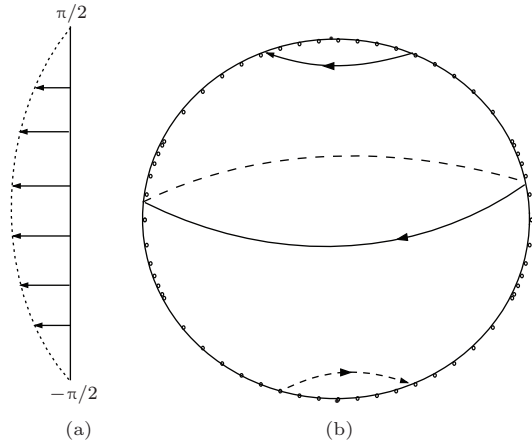


图1 (a) 纬向风速随纬度分布; (b) 球面纬向风速, 南北极为无风点

因为

$$\begin{aligned} x &= a \cos \varphi \cos \lambda, \\ y &= a \cos \varphi \sin \lambda, \end{aligned} \quad (7)$$

那么在直角坐标系中的速度场为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -a \sin \varphi \cos \lambda \dot{\varphi} - a \cos \varphi \sin \lambda \dot{\lambda} \\ &= \omega y, \\ \dot{y} &= -a \sin \varphi \sin \lambda \dot{\varphi} + a \cos \varphi \cos \lambda \dot{\lambda} \\ &= -\omega x. \end{aligned} \quad (8)$$

动力系统(8)式说明: $(x, y) = (0, 0)$ 是奇点^[5]. 由(7)式看出, 它对应于 $\varphi = \pm\pi/2$, 这正是南极和北极, 且(8)式右端雅可比矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

矩阵(9)的特征值为纯虚根

$$\lambda = \pm i\omega, \quad (10)$$

它正说明围绕北极和南极的轨迹是闭合轨道. 因为速度场是定常的, 所以它也是流线^[6], 即流线也是闭合的涡旋.

我们再来判别是高压还是低压? 由(3)式求得球面上气压的拉普拉斯为

$$\begin{aligned} \nabla_s^2 p &= \frac{1}{a^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) \\ &= -\frac{2A}{a^2} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (11)$$

对北极 $\varphi = \pi/2$, $\nabla_s^2 p < 0$, 说明北极点周围的气压比北极点气压低, 因而北极是高压. 对南极 $\varphi = -\pi/2$, $\nabla_s^2 p > 0$, 说明南极点周围的气压比南极点气压高, 因而南极点是低压.

3 从北极到南极的异宿轨道

在气压梯度力和 Coriolis 力平衡的方程组(1)和(2)中, 由于没有摩擦力, 因而等压线就是流线, 风向是不会穿过等压线的. 高压的空气不会流出, 低压的空气不会流入, 因而就不会形成从高压到低压的异宿轨道. 为此在(1)和(2)式中加进摩擦力, 变成三力平衡的方程组

$$-\frac{1}{\rho a \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + f v_\varphi - k v_\lambda = 0, \quad (12)$$

$$-\frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - f v_\lambda - k v_\varphi = 0, \quad (13)$$

其中摩擦力设为和速度成正比, 而方向相反, $k > 0$ 是摩擦系数.

由(12)与(13)式求得

$$\begin{aligned} v_\lambda &= \frac{1}{f^2 + k^2} \left(-\frac{k}{\rho a \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} - \frac{f}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right), \\ v_\varphi &= \frac{1}{f^2 + k^2} \left(\frac{f}{\rho a \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} - \frac{k}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

仍用(3)式中的 p 代入求得

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= -f^2 \omega / (f^2 + k^2), \\ \dot{\varphi} &= -fk\omega \cos \varphi / (f^2 + k^2), \end{aligned} \quad (15)$$

或

$$\begin{aligned} v_\lambda &= a \cos \varphi \dot{\lambda} = -af^2 \omega \cos \varphi / (f^2 + k^2), \\ v_\varphi &= a \dot{\varphi} = -afk\omega \cos \varphi / (f^2 + k^2). \end{aligned} \quad (16)$$

在(15)与(16)式中, 若取 $k = 0$ 就化简为(4)式.

将(15)式代入(8)式得到

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega f / (f^2 + k^2) \\ &\quad \times (\pm k \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} / a \times x + fy), \\ \dot{y} &= \omega f / (f^2 + k^2) \\ &\quad \times (\pm k \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} / a \times y - fx), \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \pm \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} / a \\ &\quad (\text{北半球取} +, \text{南半球取} -). \end{aligned} \quad (18)$$

在(17)式中若取 $k = 0$, 就化为(8)式. (17)式右端为零的奇点仍是 $(x, y) = (0, 0)$, 它相当于南

极和北极. 对于奇点 (0,0), (17) 式右端的雅可比矩阵为

$$\begin{pmatrix} \pm\omega fk/(f^2+k^2) & \omega f^2/(f^2+k^2) \\ -\omega f^2/(f^2+k^2) & \pm\omega fk/(f^2+k^2) \end{pmatrix}. \quad (19)$$

矩阵 (19) 的特征值为

$$\lambda = \pm(\omega fk/(f^2+k^2) \pm i\omega f^2/(f^2+k^2)). \quad (20)$$

对北极括号前取“+”号, 对南极括号前取“-”号

(20) 式说明, 北极点 λ 的实部为正, 因而不是不稳定焦点, 南极点 λ 的实部为负, 因而是稳定焦点. 也就是说, 摩擦力被加入以后, 北极高压的轨道(或流线)穿过等压线向外, 南极低压的轨道(或流线)穿过等压线向内.

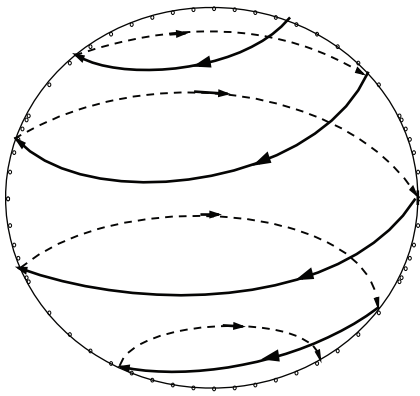


图2 北极到南极的异宿轨道

现在求由北极到南极的异宿轨道^[7,8], 将 (15) 的两式相除得

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = \frac{f}{k} \frac{1}{\cos\varphi}. \quad (21)$$

令 $\varphi = \pi/2 - \theta$, 得到

$$d\varphi = -d\theta. \quad (22)$$

则 (21) 式变成

$$d\lambda = -\frac{f}{k} \frac{1}{\sin\theta} d\theta. \quad (23)$$

将 (23) 式积分一次得

$$\lambda = -\frac{f}{k} \ln \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = -\frac{f}{k} \ln \left(\tanh \frac{\theta}{2} \right), \quad (24)$$

或

$$\tanh \frac{\theta}{2} = e^{-\frac{k}{f}\lambda}. \quad (25)$$

由 (15) 第一式积分得到

$$\lambda = \omega t f^2 / (f^2 + k^2). \quad (26)$$

将 (26) 代入 (25) 式得到

$$\tanh \frac{\theta}{2} = e^{\frac{kf}{f^2+k^2}\omega t}. \quad (27)$$

因此从 (27) 式得到: 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $\tanh^{-1}(+\infty) \rightarrow \pi/2$, 即 $\theta \rightarrow \pi$. 从 (22) 式有 $\varphi \rightarrow -\pi/2$, 这是南极点. 当 $t \rightarrow -\infty$ 时, $\tanh^{-1}(0) \rightarrow 0$, 即 $\theta \rightarrow 0$, 从 (22) 式知 $\varphi \rightarrow \pi/2$, 这是北极点.

因此, 由北极点 ($t \rightarrow -\infty$) 出发, 直到南极点 ($t \rightarrow +\infty$) 终止的轨道是一条异宿轨道, 它也是球面上的球螺旋. 见图 2.

4 结论与讨论

在北半球, 极地对流层一般是由一个极地气旋性涡旋控制, 有时候北极也会出现反气旋, 但是不能持久. 但是, 在极端大型环流异常条件下, 北极圈内对流层各高度建立强盛稳定极地高压, 持续时间超过一个月^[9]. 这种异常的环流会带来北半球大范围的异常天气, 如持续的寒潮, 各地会出现创历史纪录的低温. 其中稳定的环流结构对于异常天气的影响是非常关键的.

而本文利用球坐标系 (λ, φ, r) 中的球面地转风关系, 说明当等压线形成最简单的纬向分布时, 此时南极是低压, 北极是高压. 但是, 当在地转风关系中加入摩擦力后, 则南北极由闭合涡旋变成螺旋涡旋, 且两极之间形成一条球面上的三维异宿轨道. 这对于从动力学机理上深入认识大气环流结构的形成将提供有益的帮助, 特别是加深对于气旋等结构的形成与影响的认识有重要的价值^[10,11].

参考文献

- [1] Liu S D, Liu S K 1994 *Solitary Waves and Turbulence* (Shanghai: Shanghai Science and Technology Education Press) (in Chinese) [刘式达, 刘式适 1994 孤波和湍流 (上海: 上海科技教育出版社)]
- [2] Liu S K, Liu S D, Tan B K 1996 *Nonlinear Atmospheric Dynamics* (Beijing: National Defence Industry Press) (in Chinese) [刘式适, 刘式达, 谭本旭 1996 非线性大气动力学 (北京: 国防工业出版社)]
- [3] Liu S K, Liu S D 2011 *Atmospheric Dynamics* (Beijing: Peking University Press) (in Chinese) [刘式适, 刘式达 2011 大气动力学 (北京: 北京大学出版社)]
- [4] Liu S D, Liu S K 2011 *Dynamics of Atmospheric Eddy* (Beijing: China Meteorological Press) (in Chinese) [刘式达, 刘式适 2011 大气涡旋动力学 (北京: 气象出版社)]
- [5] Hirsch M W, Smale S, Devaney R 2004 *Differential equation, dynamical system and an introduction to chaos* (Dan Diego: Academic Press)

- [6] Vallis B 2006 *Atmospheric and oceanic fluid dynamics* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [7] Zhang Z F, Li C H, Zheng Z M, Li W G 1997 *Bifurcation theory foundation of vector field* (Beijing: Higher Education Press) (in Chinese) [张芷芬, 李承泓, 郑志明, 李伟固 1997 向量场的分叉理论基础 (北京: 高等教育出版社)]
- [8] Liu S D, Liang F M, Liu S K, Xin G J 2008 *Atmospheric Turbulence* (Beijing: Peking University Press) (in Chinese) [刘式达, 梁福明, 刘式适, 辛国君 2008 大气湍流 (北京: 北京大学出版社)]
- [9] Xu X N, Guo X R 1978 *Scientia Atmospherica Sinica* **2** 258 (in Chinese) [徐夏囡, 郭肖容 1978 大气科学 **2** 258]
- [10] Mao J Y, Wang Z Z 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 1506
- [11] Li X F, Cui X P 2011 *Chin. Phys. B* **20** 109201

From Arctic high, Antarctic low to three-dimensional heteroclinic orbit connecting south pole and north pole*

Liu Shi-Da Fu Zun-Tao[†] Liu Shi-Kuo

(Department of Atmospheric and Oceanic Sciences and Laboratory for Climate and Ocean-Atmosphere Studies, School of Physics, Peking University, Beijing 100871, China)

(Received 25 April 2014; revised manuscript received 19 May 2014)

Abstract

Under the steady condition, the spherical geostrophic wind relationship in spherical coordinates (λ, φ, r) is applied to illustrate that when isobars take the simplest zonal distribution, the Antarctic is at a low ambient pressure, while the Arctic is at high. However, when friction is incorporated into the geostrophic wind relationship, the closed vortex over Antarctic and Arctic will turn to a spiral vortex, and there will exist a three-dimensional heteroclinic orbit between Antarctic and Arctic on the spherical surface.

Keywords: Arctic high, Antarctic low, friction, heteroclinic orbit

PACS: 47.10.Fg, 05.45.-a, 47.32.C-

DOI: 10.7498/aps.63.214701

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No.40975027).

† Corresponding author. E-mail: fuzt@pku.edu.cn