

双麦克斯韦分布尘埃等离子体中尘埃粒子的 充电研究*

李学良 石雁祥†

(新疆伊犁师范学院电子与信息工程学院, 伊宁 835000)

(2014年1月12日收到; 2014年6月14日收到修改稿)

根据充电方程和电荷守恒条件, 导出了双麦克斯韦分布的弱电尘埃等离子体充电频率(电荷弛豫速率), 给出了充电电流的计算公式. 对结果分析表明, 定向运动速度大小对充电电流和充电频率有一定的影响, 充电频率随着定向速度增加而减小, 当定向速度远远小于电子的热速度时, 充电频率与文献给出的表达式一致.

关键词: 尘埃等离子体, 双麦克斯韦分布, 充电频率

PACS: 52.27.Lw

DOI: 10.7498/aps.63.215201

1 引言

对于分子浓度远大于电子、离子浓度, 离子与电子浓度远大于尘埃粒子浓度的弱电尘埃等离子体, 当带电粒子的定向速度远小于热运动速度时, 带电粒子的分布遵从麦克斯韦分布^[1]. 尘埃等离子体对微波有强烈的衰减作用^[2], 等离子体理论给出的微波衰减的理论值比实测值小1—3个量级, 尘埃粒子的充放电过程对微波衰减的影响已经得到证实, 考虑尘埃粒子充放电作用的尘埃等离子体理论给出了与实测值在量级上一致的结果^[3–5], 此后, 文献^[6]对弱电尘埃等离子体的电磁特性做了进一步的研究, 导出了介电张量表达式. 有关尘埃粒子充电研究已发表了很多文献^[6–10]. 近几年, 人们在尘埃粒子大小分布对尘埃等离子体非线性波、量子尘埃声波的影响的研究中得出了一些有益的结论^[11–13]. 当尘埃等离子体中带电粒子的定向速度与其热运动速度可比拟时, 其定向运动所产生的效应不能被忽略, 带电粒子的稳态分布是双麦克斯韦分布, 对于服从双麦克斯韦分布的尘埃等离子体的尘埃粒子充放电研究, 尚未见到公开的报道.

本文考虑弱电尘埃等离子体中带电粒子定向运动速度对其分布函数和充电截面的影响, 导出了新的充电电流和充电频率的计算公式, 研究了定向运动速度对充电频率的影响. 结果表明: 充电频率随着定向速度增加而减小, 当速度趋于零时, 与文献^[7]给出的表达式一致.

2 理论分析

2.1 尘埃粒子充电电流

根据文献^[14], 弱电尘埃等离子体中, 带电粒子 α ($\alpha = e, i$ 分别表示电子和离子) 对尘埃粒子的充电电流

$$I_{\alpha 0} = q_{\alpha} \int_{V_{\alpha \min}}^{\infty} v_{\alpha} \sigma_{\alpha}^d f_{\alpha 0}(v_{\alpha}) dv_{\alpha}, \quad (1)$$

其中 $f_{\alpha 0}(v_{\alpha})$ 是 α 粒子的速度分布函数, σ_{α}^d 是带电粒子 α 对尘埃粒子的充电截面,

$$\sigma_{\alpha}^d = \pi r_d^2 \left(1 - \frac{2q_{\alpha} \varphi_d}{m_{\alpha} v_{\alpha}^2} \right), \quad (2)$$

式中, q_{α} 是 α 粒子的电量; φ_d 是尘埃粒子电势与等离子体电势之间的电势差; m_{α} 是 α 粒子的质量; v_{α} 是等离子体粒子的热速度; r_d 是尘埃粒子半径;

* 国家自然科学基金(批准号: 11265016, 10865005)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: stonm1234@aliyun.com

$V_{\alpha \min}$ 是与尘埃粒子碰撞的等离子体粒子的最小速度,

$$V_{\alpha \min} = \left(\frac{2q_{\alpha}\varphi_d}{m_{\alpha}} \right)^{1/2}. \quad (3)$$

当 $q_{\alpha}\varphi_d < 0$ 时, 等离子体粒子和尘埃粒子相互吸引, $V_{\alpha \min} = 0$; 当 $q_{\alpha}\varphi_d > 0$ 时, 等离子体粒子和尘埃粒子相互排斥.

整体以定向速度 v_0 运动服从双麦克斯韦分布的尘埃等离子体分布函数为

$$\begin{aligned} f_{\alpha 0} &= \frac{1}{2} n_{\alpha} \left(\frac{m_{\alpha}}{2\pi k T_{\alpha}} \right)^{3/2} \\ &\times \left[\exp \left(-\frac{m_{\alpha}(v_{\parallel} - v_0)^2 + m_{\alpha}v_{\perp}^2}{2kT_{\alpha}} \right) \right. \\ &\left. + \exp \left(-\frac{m_{\alpha}(v_{\parallel} + v_0)^2 + m_{\alpha}v_{\perp}^2}{2kT_{\alpha}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} n_{\alpha} \left(\frac{m_{\alpha}}{2\pi k T_{\alpha}} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_{\alpha}v_{\perp}^2}{2kT_{\alpha}} \right) \\ &\times \left[\exp \left(-\frac{m_{\alpha}(v_{\parallel} - v_0)^2}{2kT_{\alpha}} \right) \right. \\ &\left. + \exp \left(-\frac{m_{\alpha}(v_{\parallel} + v_0)^2}{2kT_{\alpha}} \right) \right], \quad (4) \end{aligned}$$

式中, n_{α} 是 α 粒子的浓度; $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ 是 Boltzmann 常数; T_{α} 是 α 粒子的温度; v_{\parallel} 是 α 粒子与定向速度方向平行的热速度分量; v_{\perp} 是 α 粒子与定向速度方向垂直的热速度分量. 将 (2), (4) 两式代入 (1) 式, 得

$$\begin{aligned} I_{\alpha 0} &= \pi r_d^2 q_{\alpha} \int_{V_{\alpha \min}}^{\infty} v_{\alpha} f_{\alpha 0}(v_{\alpha}) dv_{\alpha} \\ &\quad - \frac{2\pi r_d^2 q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int_{V_{\alpha \min}}^{\infty} \frac{\varphi_d}{v_{\alpha}} f_{\alpha 0}(v_{\alpha}) dv_{\alpha}, \quad (5) \end{aligned}$$

变换到球坐标中积分可得

$$\begin{aligned} I_{\alpha 0} &= q_{\alpha} n_{\alpha} r_d^2 \left(\frac{\pi m_{\alpha}}{2kT_{\alpha} v_0^2} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{m_{\alpha}v_0^2}{2kT_{\alpha}} \right) \\ &\times \int_{V_{\alpha \min}}^{\infty} \exp \left(-\frac{m_{\alpha}v_{\alpha}^2}{2kT_{\alpha}} \right) \left(\exp \left(\frac{m_{\alpha}v_0 v_{\alpha}}{kT_{\alpha}} \right) \right. \\ &\left. - \exp \left(-\frac{m_{\alpha}v_0 v_{\alpha}}{kT_{\alpha}} \right) \right) v_{\alpha}^2 dv_{\alpha} - n_{\alpha} \varphi_d r_d^2 q_{\alpha}^2 \\ &\times \left(\frac{2\pi}{kT_{\alpha} m_{\alpha} v_0^2} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{m_{\alpha}v_0^2}{2kT_{\alpha}} \right) \\ &\times \int_{V_{\alpha \min}}^{\infty} \exp \left(-\frac{m_{\alpha}v_{\alpha}^2}{2kT_{\alpha}} \right) \left(\exp \left(\frac{m_{\alpha}v_0 v_{\alpha}}{kT_{\alpha}} \right) \right. \\ &\left. - \exp \left(-\frac{m_{\alpha}v_0 v_{\alpha}}{kT_{\alpha}} \right) \right) dv_{\alpha}. \quad (6) \end{aligned}$$

由 (3), (6) 式, 对于离子 i , $q_i \varphi_d < 0$ 有

$$\begin{aligned} I_{i0} &= \frac{n_i q_i r_d^2}{m_i} \sqrt{\frac{\pi k T_i}{2m_i}} \exp \left(-\frac{m_i v_0^2}{2kT_i} \right) \\ &\times \left(\sqrt{2\pi} m_i \exp \left(\frac{m_i v_0^2}{2kT_i} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{m_i v_0^2}{2kT_i} \right)^{1/2} \right. \\ &\times \left(-2\varphi_d q_i \sqrt{\frac{1}{kT_i m_i v_0^2} + \frac{1}{kT_i}} \right) \\ &\left. + k \left(\sqrt{2\pi} \exp \left(\frac{m_i v_0^2}{2kT_i} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{m_i v_0^2}{2kT_i} \right)^{1/2} \right. \right. \\ &\left. \left. + \sqrt{\frac{2m_i v_0^2}{kT_i}} \sqrt{\frac{m_i T_i}{k v_0^2}} \right). \quad (7) \end{aligned}$$

对于电子 e , $q_e \varphi_d > 0$, 有

$$\begin{aligned} I_{e0} &= \frac{kT_e n_e e r_d^2}{m_e^2 \left(v_0 - \sqrt{\frac{2\varphi_d e}{m_e}} \right) \left(v_0 + \sqrt{\frac{2\varphi_d e}{m_e}} \right)} \\ &\times \exp \left(-\frac{m_e v_0^2 + 2\varphi_d e}{2kT_e} \right) \sqrt{\frac{\pi}{8}} \\ &\times \left(\exp \left(\frac{m_e v_0^2 + 2\varphi_d e}{kT_e} \right) \sqrt{2\pi} m_e \right. \\ &\times \left(-2\varphi_d e \sqrt{\frac{1}{kT_e m_e v_0^2} + \frac{1}{kT_e}} \right) F_1 \\ &\left. + F_2 \sqrt{\frac{m_e T_e}{k v_0^2}} \right), \quad (8) \end{aligned}$$

(8) 式中,

$$\begin{aligned} F_1 &= \left(\operatorname{erf} \left(\frac{C_+}{2} \right) \right)^{1/2} \left(v_0 + \sqrt{\frac{2\varphi_d e}{m_e}} \right) (C_-)^{1/2} \\ &\quad + \operatorname{erf} \left(\frac{C_-}{2} \right)^{1/2} \left(v_0 - \sqrt{\frac{2\varphi_d e}{m_e}} \right) (C_+)^{1/2}, \\ F_2 &= k \left(\exp \left(\frac{m_e v_0^2 + 2\varphi_d e}{kT_e} \right) \sqrt{2\pi} \operatorname{erf} \left(\frac{C_+}{2} \right)^{1/2} (D_+) \right. \\ &\times (C_-)^{1/2} + \left(\exp \left(\frac{m_e v_0^2 + 2\varphi_d e}{kT_e} \right) \sqrt{2\pi} \right. \\ &\times \operatorname{erf} \left(\frac{C_-}{2} \right)^{1/2} (D_-) + 2 \exp \left(\frac{C_-}{2} \right) \\ &\times \left(v_0 \left(\exp \left(\frac{v_0 \sqrt{8\varphi_d e m_e}}{kT_e} \right) + 1 \right) \right. \\ &\left. + \left(\exp \left(\frac{v_0 \sqrt{8\varphi_d e m_e}}{kT_e} \right) - 1 \right) \sqrt{\frac{2\varphi_d e}{m_e}} \right) \\ &\left. \times \sqrt{C_-} \right) \sqrt{C_+}, \end{aligned}$$

这里, $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-x^2) dx$ 是误差函数, $C_+ = \frac{m_e(D_+)^2}{kT_e}$, $C_- = \frac{m_e(D_-)^2}{kT_e}$, $D_+ = v_0 + \sqrt{\frac{2\varphi_d e}{m_e}}$, $D_- = v_0 - \sqrt{\frac{2\varphi_d e}{m_e}}$.

2.2 尘埃粒子充电方程和充电频率

有纵波存在时, 等离子体 α 粒子的分布函数为

$$f_\alpha(v_\alpha) = f_{\alpha 0} + f_{\alpha 1}, \quad (9)$$

$f_{\alpha 0}$ 是未受扰动时 α 粒子的分布函数. $f_{\alpha 1}$ 是分布函数的微扰函数.

纵波存在时的充电截面为

$$\sigma_\alpha^{d1} = \pi r_d^2 \left(1 - \frac{2q_\alpha(\varphi_{d0} + \tilde{\varphi}_d)}{m_\alpha v_\alpha^2} \right), \quad (10)$$

(10) 式中, φ_{d0} 是充电平衡时的尘埃粒子电势与等离子体背景电势之差, $\tilde{\varphi}_d$ 是围绕平衡电势变化的浮动电势. 考虑到 (9), (10) 式, 电子和离子对尘埃粒子总的充电电流为

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=e,i} I_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=e,i} I_{\alpha 0} + \sum_{\alpha=e,i} I'_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=e,i} q_\alpha \int_{V_{\alpha \min}}^\infty v_\alpha \sigma_\alpha^{d1} (f_{\alpha 0} + f_{\alpha 1}) dv_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=e,i} \pi r_d^2 q_\alpha \int_{V_{\alpha \min}}^\infty v_\alpha \left(1 - \frac{2q_\alpha \varphi_{d0}}{m_\alpha v_\alpha^2} \right) f_{\alpha 0} dv_\alpha \\ & \quad + \sum_{\alpha=e,i} \pi r_d^2 q_\alpha \int_{V_{\alpha \min}}^\infty v_\alpha \left(-\frac{2q_\alpha \tilde{\varphi}_d}{m_\alpha v_\alpha^2} \right) f_{\alpha 0} dv_\alpha \\ & \quad + \sum_{\alpha=e,i} \pi r_d^2 q_\alpha \int_{V_{\alpha \min}}^\infty v_\alpha \left(1 - \frac{2q_\alpha \varphi_{d0}}{m_\alpha v_\alpha^2} \right) f_{\alpha 1} dv_\alpha \\ & \quad + \sum_{\alpha=e,i} \pi r_d^2 q_\alpha \int_{V_{\alpha \min}}^\infty v_\alpha \left(-\frac{2q_\alpha \tilde{\varphi}_d}{m_\alpha v_\alpha^2} \right) \\ & \quad \times f_{\alpha 1} dv_\alpha, \end{aligned} \quad (11)$$

(11) 式等式右边的四项中, 第一项

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=e,i} I_{\alpha 0} &= \sum_{\alpha=e,i} \pi r_d^2 q_\alpha \int_{V_{\alpha \min}}^\infty v_\alpha \left(1 - \frac{2q_\alpha \varphi_{d0}}{m_\alpha v_\alpha^2} \right) \\ & \quad \times f_{\alpha 0} dv_\alpha, \end{aligned} \quad (12)$$

为无扰动时的充电电流, 充电平衡条件下, 该项为零; 第二项反映充电截面变化引起的扰动电流; 第三项反映分布函数变化引起的扰动电流; 最后一项

反映充电截面变化及分布函数变化二阶微扰引起的扰动电流. 考虑到 $f_{\alpha 1} \ll f_{\alpha 0}$, $\tilde{\varphi}_d \ll \varphi_{d0}$, 最后一项为二阶小量, 可忽略不计. 总扰动电流可以表示为

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=e,i} I'_\alpha &= \sum_{\alpha=e,i} I_{\alpha 1} + \sum_{\alpha=e,i} \pi r_d^2 q_\alpha \int_{V_{\alpha \min}}^\infty v_\alpha \\ & \quad \times \left(-\frac{2q_\alpha \tilde{\varphi}_d}{m_\alpha v_\alpha^2} \right) f_{\alpha 0} dv_\alpha, \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=e,i} I_{\alpha 1} &= \sum_{\alpha=e,i} \pi r_d^2 q_\alpha \int_{V_{\alpha \min}}^\infty v_\alpha \left(1 - \frac{2q_\alpha \varphi_{d0}}{m_\alpha v_\alpha^2} \right) \\ & \quad \times f_{\alpha 1} dv_\alpha, \end{aligned} \quad (14)$$

代表分布函数变化对充电扰动电流的贡献.

考虑到充电平衡条件, 尘埃粒子电量 q_d 与充电电流的关系为

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_d}{\partial t} &= \sum_{\alpha=e,i} I_{\alpha 1} + \sum_{\alpha=e,i} \pi r_d^2 q_\alpha \int_{V_{\alpha \min}}^\infty v_\alpha \\ & \quad \times \left(-\frac{2q_\alpha \tilde{\varphi}_d}{m_\alpha v_\alpha^2} \right) f_{\alpha 0} dv_\alpha, \end{aligned} \quad (15)$$

(15) 式中, 尘埃粒子电量为 $q_d = q_{d0} + q_{d1}$, q_{d0} 为充电平衡时的尘埃粒子电量, 它不随时间发生变化; $q_{d1} = C\tilde{\varphi}_d$ 是尘埃粒子受纵波影响产生的电量起伏值, C 为尘埃粒子电容率. 将 (4) 式代入 (15) 式并积分, 可得

$$\frac{\partial q_{d1}}{\partial t} + \nu_{ch} q_{d1} = I_{e1} + I_{i1} = \sum_{\alpha=e,i} I_{\alpha 1}, \quad (16)$$

这里, ν_{ch} 是充电频率, 也被称为电荷弛豫速率 [7,15], 考虑定向运动速度时,

$$\begin{aligned} \nu_{ch} &= \frac{1}{m_e v_0 C} \pi n_e e^2 r_d^2 \\ & \quad \times \left(\text{erf} \left(\left(\sqrt{\frac{2eq_{d1}}{m_e C}} + v_0 \right) \sqrt{\frac{m_e}{2kT_e}} \right) \right. \\ & \quad \left. - \text{erf} \left(\left(\sqrt{\frac{2eq_{d1}}{m_e C}} - v_0 \right) \sqrt{\frac{m_e}{2kT_e}} \right) \right) \\ & \quad + \frac{2}{m_i v_0 C} \pi n_i q_i^2 r_d^2 \text{erf} \left(\sqrt{\frac{m_i v_0^2}{2kT_i}} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

3 算 例

某一服从双麦克斯韦分布的弱电离尘埃等离子体, 电子温度 T_e 和离子温度 T_i 相同, $T_e = T_i = T = 2000 \text{ K}$; 电子浓度与离子浓度接近

相等, 且 $n_e = n_i = 1.0 \times 10^{16} \text{ m}^{-3}$; 尘埃粒子半径为 $1 \mu\text{m}$ 左右, 而德拜半径 λ_D 在厘米量级上, 对于 $\lambda_D \gg r_d$ 的情况, 由球形尘埃粒子电容 $C = r_d \exp(-r_d/\lambda_D)$ 可知, $C \approx r_d$; 尘埃粒子浓度远远小于电子、离子浓度时, 尘埃粒子可看成是孤立的, $\varphi_d \approx -kT/e$; $\tilde{\varphi}_d \ll \varphi_d$, 当 v_0 在 10^3 — 10^4 m/s 内取值时, (17) 式中 $\sqrt{2eq_{d1}/m_e C}$ 可忽略; 电子、离子质量按国际单位制取值; 一次电离情况下, 离子电量 $q_i = e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$. 根据 (8) 式和 (17) 式, 可给出定向速度与电子充电电流、充电频率的关系, 如图 1、图 2 所示.

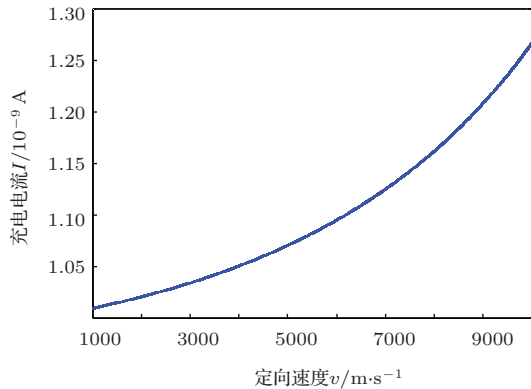


图 1 定向速度对充电电流的影响

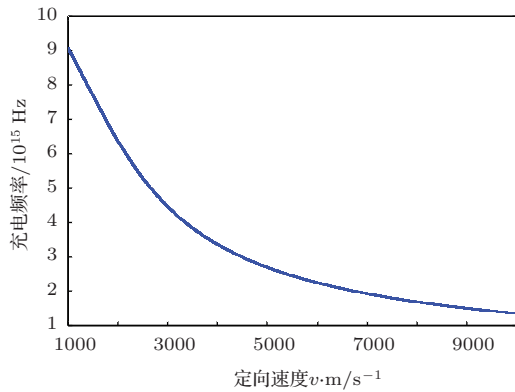


图 2 定向速度对充电频率的影响

4 讨论与结论

当尘埃等离子体中带电粒子的定向速度与其热速度可比拟时, 定向运动所产生的效应不能被忽略. 定向速度大小对充电频率有较大影响, 由图 1 可知, 电子充电电流随着定向速度的增大而增大. 由图 2 可知: 定向速度越大, 其充电频率越小, 尘埃粒子表面电量恢复到平衡值时越慢. 当 $v_0 \rightarrow 0$ 时, 电子、离子的充电电流, 充电频率与文献 [4, 5, 7] 一致.

参考文献

- [1] Shi Y X, Ge D B, Wu J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5318 (in Chinese) [石雁祥, 葛德彪, 吴健 2006 物理学报 **55** 5318]
- [2] Wang C Q 1992 *JSRT* **2** 14 (in Chinese) [王长起 1992 固体火箭技术 **2** 14]
- [3] Li F, Li L L, Sui Q 2004 *Science in China (Series E)* **34** 832 (in Chinese) [李芳, 李廉林, 隋强 2004 中国科学 (E) **34** 832]
- [4] Shi Y X, Ge D B, Wu J 2007 *Chinese J. Geophys* **50** 1005 (in Chinese) [石雁祥, 葛德彪, 吴健 2007 地球物理学报 **50** 1005]
- [5] Shi Y X, Wu J, Ge D B, Wu J 2008 *JSRT* **4** 421 (in Chinese) [石雁祥, 王菊, 葛德彪, 健 2008 固体火箭技术 **4** 421]
- [6] Shi Y X, Ge D B, Wu J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5507 (in Chinese) [石雁祥, 葛德彪, 吴健 2009 物理学报 **58** 5507]
- [7] Jana M R, Sen A, Kaw P K 1993 *Phys. Rev. E* **48** 3930
- [8] Tsyrovich V N, Havnes O 1993 *Comments Plasma Phys. Controlled Fusion* **15** 267
- [9] Shukla R K 2000 *Plasma Phys.* **7** 1044
- [10] Goree J 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 277
- [11] Chen J H 2009 *Chin. Phys. B* **18** 2121
- [12] Wei J N, Shi Y R, He G J, Jiang X, Duan W S, Chen J M 2009 *Chin. Phys. B* **52** 517
- [13] Qi X H, Duan W S, Chen J M, Wang S J 2011 *Chin. Phys. B* **20** 025203
- [14] Ma J X, Yu M Y 1994 *Phys. Rev. E* **50** 2431
- [15] Chen H M, Shi Y X, Sun J S, Sun Y, Zhang B H 2010 *J. of Radio Sci.* **25** 1005 (in Chinese) [陈惠敏, 石雁祥, 苏金善, 孙毅, 张保花 2010 电波科学学报 **25** 1005]

Theoretical study on charging equation of dust plasmas in double Maxwellian distribution*

Li Xue-Liang Shi Yan-Xiang[†]

(Department of Electronics and Information Engineering, Yili Normal University, YiNing 835000, China)

(Received 12 January 2014; revised manuscript received 14 June 2014)

Abstract

According to the charging equation and charge conservation, the charging frequency (electric relaxation rate) is deduced and the formulation of charging electric current of the weakly ionized dust plasma is given according to the double Maxwellian distribution. It is shown that the directional speed have an influence on charging frequency; the charging frequency will decrease with the increase of directional speed; the charging frequency expression are the same as that in the literature when the directional speed is much smaller than the electron thermal velocity.

Keywords: dust plasma, double Maxwellian distribution, charging frequency

PACS: 52.27.Lw

DOI: [10.7498/aps.63.215201](https://doi.org/10.7498/aps.63.215201)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11265016, 10865005).

[†] Corresponding author. E-mail: stonm1234@aliyun.com