

# 一类异构多智能体系统固定和切换拓扑下的一致性分析\*

孙一杰<sup>1)3)†</sup> 张国良<sup>1)</sup> 张胜修<sup>1)</sup> 曾静<sup>2)</sup>

1) (第二炮兵工程大学三系, 西安 710025)

2) (第二炮兵工程大学理学院, 西安 710025)

3) (中国人民解放军 96211 部队, 红河 654300)

(2014年4月23日收到; 2014年6月17日收到修改稿)

对包含一阶二阶智能体的异构系统有向图中的一致性问题进行研究. 对该系统采用了一种线性分布式一致性协议, 基于图论和矩阵分析的方法, 分析了在固定和切换拓扑情况下系统获得一致性的充分条件, 该条件与控制参数和通信拓扑有关. 给出了固定拓扑中系统的一致平衡点, 证明了仅通信拓扑中的根节点对平衡点起作用. 数值仿真验证了理论分析的正确性.

**关键词:** 异构多智能体系统, 一致性, 有向图, 平衡点

**PACS:** 02.10.Yn, 02.30.Yy, 05.65.+b

**DOI:** 10.7498/aps.63.220201

## 1 引言

近年来, 分布式多智能体协同控制系统在无人航天器的协同控制、卫星编队控制、移动机器人的分布式优化等领域得到了广泛应用, 逐渐成为控制理论、统计物理学、应用数学、计算机科学等领域研究的热点问题. 以上许多协同控制任务都可以统一到多智能体系统的一致性 (consensus) 问题这一理论框架内. 所谓一致性, 就是设计合适的一致性协议使得所有智能体关于某个感兴趣的量达到相同的值. 到目前为止, 研究人员通过采用图论、矩阵论、频域分析、李雅普诺夫稳定性等方法对一致性问题进行了研究, 获得了许多一阶、二阶以及高阶多智能体系统的一致性标准<sup>[1-9]</sup>.

许多现在的一致性分析结果都是基于同构多智能体系统, 假设所有的智能体具有相同的模型和行为. 这个假设在许多应用中是不符合实际情况的, 进行更为广泛的工程应用需要研究异构多智能体系统的一致性. 基于以上考虑, Zhu等<sup>[10]</sup>

采用马尔可夫链方法研究了包含活跃和被动两类个体的异构多智能体系统的一致性. Tian和Zhang<sup>[11]</sup>研究了具有未知时延的异构多智能体的高阶一致性问题, 得出了该系统获得高阶一致性的充分必要条件. 文献<sup>[12]</sup>研究了混合阶多智能体系统时延条件下的一致性. Yin等<sup>[13]</sup>研究了分数阶异构多智能体系统的一致性, 分析了系统获得一致性的充分条件. Zhu等<sup>[14]</sup>研究了一阶二阶混合异构多智能体系统的有限时间一致性问题, 得出了系统获得一致性的充分条件. 文献<sup>[15]</sup>研究了随机通信故障条件下, 有领导追随和无领导追随两种情况中异构多智能体系统的一致性. Liu和Liu<sup>[16]</sup>研究了离散时间有界通信时延的异构多智能体一致性问题. Zheng等<sup>[17]</sup>研究了无向拓扑情况下的一阶二阶混合异构多智能体的一致性问题, 采用图论和李雅普诺夫稳定性理论分析了系统获得一致性的条件.

以上对一阶二阶混合异构多智能体系统一致性问题的研究, 大多数文献都局限于无向图<sup>[10,13,15,17]</sup>, 但是有向通信对于多智能体系统而

\* 陕西省自然科学基金项目 (批准号: 2012K06-45) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: [syjlxx@126.com](mailto:syjlxx@126.com)

言更具有一般性. 当前对于一致性的分析方法主要包括矩阵分析方法、频域方法、李雅普诺夫等方法. 本文主要采用矩阵分析方法, 较其他方法所得出的结论更具体、直观. 对于只包含一类智能体的同构系统(一阶、二阶、高阶), 采用矩阵分析方法都可以建立起系统矩阵特征值和拉普拉斯矩阵特征值之间的联系, 直接分析系统矩阵的特征值属性获得一致性条件. 对于一阶二阶混合异构系统, 难以直接建立系统矩阵与拉普拉斯矩阵之间特征值的联系, 本文对系统矩阵进行变换后间接地利用了拉普拉斯矩阵的性质, 最终得出了系统获得一致性的充分条件和一致平衡点.

本文的主要贡献在于分析了一阶二阶混合异构系统在固定和切换有向图下的一致性条件, 给出了在两种情况中系统获得一致性的充分条件, 得出了系统在固定拓扑下的一致平衡点, 并分析得出该平衡点仅取决于通信拓扑中根节点的初始状态. 在参数的收敛域内, 系统初始状态和通信拓扑给定的情况下, 通过调整控制参数就可以对系统一致平衡点进行调整.

## 2 问题描述

### 2.1 预备知识

$I_n$  表示  $n \times n$  的单位矩阵,  $\mathbf{1}_n$  表示所有元素均为1的  $n$  维列向量,  $\mathbf{0}_n$  表示所有元素均为0的  $n$  维列向量. 非负向量指所有元素都是非负的向量; 非负矩阵指所有元素都非负的矩阵; 随机矩阵指行和为1的非负矩阵; SIA 矩阵指一个随机矩阵  $P$  满足  $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k = \mathbf{1}\mathbf{y}^T$ , 则该矩阵为SIA (stochastic indecomposable and aperiodic) 矩阵.

对于同维的非负矩阵  $A, B$ ,  $A \geq B$  表明  $A - B$  为非负矩阵. 容易验证满足  $A \geq \rho B$ ,  $\rho > 0$ , 如果矩阵  $B$  的有向图包含生成树, 则矩阵  $A$  的有向图也必包含生成树<sup>[3]</sup>.

设  $G = (V, E, A)$  为一个加权有向图,  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  是节点集, 节点索引在有限集  $I = \{1, \dots, n\}$  内.  $E = V \times V$  为边集, 集合中元素表示节点间的有向通信连接.  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  是加权有向图的邻接矩阵, 且  $a_{ij} \geq 0, i, j \in I$ . 如果  $(v_j, v_i) \in E$ , 则  $a_{ij} > 0$ ; 如果  $(v_j, v_i) \notin E$ , 则  $a_{ij} = 0$ ; 且对于

所有的  $i \in I, a_{ii} = 0$ . 图  $G$  中的边表示为有序节点对  $(v_j, v_i)$ , 节点  $v_i$  和  $v_j$  分别称为终止节点和起始节点, 表示节点  $v_i$  能够接收到节点  $v_j$  的信息. 节点  $v_i$  的邻居集表示为  $N_i = \{v_j | (v_j, v_i) \in E\}$ . 两个不同节点  $v_i$  和  $v_j$  之间的路径表示为不同边的序列形式  $(v_i, v_{k1}), (v_{k1}, v_{k2}), \dots, (v_{kl}, v_j)$ .

图的拉普拉斯矩阵  $L = [l_{ij}]_{n \times n}$  定义如下

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{j \in N_i} a_{ij} & i = j \\ -a_{ij} & i \neq j \end{cases}$$

有向生成树: 一个加权有向图  $G$  中有一个节点称为根节点, 从根节点出发通过一条路径可以到达图中其他任一节点.

本文研究的异构多智能体系统包含  $n$  个智能体, 前  $m$  ( $m < n$ ) 个为二阶模型,  $(n - m)$  个为一阶模型. 每一个二阶个体的邻居集为  $N_i = N_i^s \cup N_i^{sf}$ , 表示二阶邻居与一阶邻居的并集. 每一个一阶个体的邻居集为  $N_l = N_l^f \cup N_l^{fs}$ , 表示一阶邻居与二阶邻居的并集. 则系统的拉普拉斯矩阵可以表示为

$$L = \begin{bmatrix} L_s + D_{sf} & -A_{sf} \\ -A_{fs} & L_f + D_{fs} \end{bmatrix},$$

其中  $L_s$  表示  $m$  个二阶个体间的拉普拉斯矩阵,

$$D_{sf} = \text{diag} \left\{ \sum_{j \in N_i^{sf}} a_{ij} \quad i = 1, \dots, m \right\};$$

$L_f$  表示  $(n - m)$  个一阶个体间的拉普拉斯矩阵,

$$D_{fs} = \text{diag} \left\{ \sum_{j \in N_l^{fs}} a_{lj} \quad l = m + 1, \dots, n \right\};$$

$A_{sf}$  表示二阶个体与一阶个体的邻接关系,  $A_{fs}$  表示一阶个体与二阶个体的邻接关系.

### 2.2 异构多智能体系统

连续时间异构多智能体系统描述如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i \\ \dot{v}_i = u_i \quad i = 1, \dots, m \\ \dot{x}_l = u_l \quad l = m + 1, \dots, n \end{cases} \quad (1)$$

针对该系统采用如下线性一致性协议,

$$\begin{cases} u_i = k_1 \sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_j - x_i) - k_2 v_i \quad i = 1, \dots, m \\ u_l = k_3 \sum_{j \in N_l} a_{lj}(x_j - x_l) \quad l = m + 1, \dots, n \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $x_i, v_i, u_i \in \mathbf{R}, i = 1, \dots, m$  分别表示二阶智能体的位置、速度和控制输入;  $x_l, u_l \in \mathbf{R}$  表示一阶智能体的位置和控制输入.  $k_1, k_2, k_3 > 0$  为控制参数.

设

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s &= [x_1, \dots, x_m]^T, \quad \mathbf{v}_s = [v_1, \dots, v_m]^T, \\ \mathbf{x}_f &= [x_{m+1}, \dots, x_n]^T, \quad \mathbf{y} = [x_s^T, v_s^T, x_f^T]^T. \end{aligned}$$

在一致性协议 (2) 下, 系统 (1) 可以描述为如下矩阵形式:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_m & 0 \\ -k_1(\mathbf{L}_s + \mathbf{D}_{sf}) & -k_2\mathbf{I}_m & k_1\mathbf{A}_{sf} \\ k_3\mathbf{A}_{fs} & 0 & -k_3(\mathbf{L}_f + \mathbf{D}_{fs}) \end{bmatrix} \mathbf{y} \\ &= \mathbf{\Gamma}\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (3)$$

则整个系统的初始值描述为:  $\mathbf{y}(0) = [\mathbf{x}_s^T(0), \mathbf{v}_s^T(0), \mathbf{x}_f^T(0)]^T$ .

**定义 1** 异构系统 (1) 对于任意初始条件满足以下要求, 则称系统渐近达到了一致性 [17].

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i - x_j\| &= 0 \quad i, j = 1, \dots, n \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|v_i - v_j\| &= 0 \quad i, j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & 0 & 0 \\ \mathbf{I}_m & \mathbf{I}_m & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{Q}\mathbf{\Gamma}\mathbf{Q}^{-1} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_m & \mathbf{I}_m & 0 \\ -k_1(\mathbf{L}_s + \mathbf{D}_{sf}) + k_2\mathbf{I}_m - \mathbf{I}_m & \mathbf{I}_m - k_2\mathbf{I}_m & k_1\mathbf{A}_{sf} \\ k_3\mathbf{A}_{fs} & 0 & -k_3(\mathbf{L}_f + \mathbf{D}_{fs}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

因为矩阵  $\mathbf{Q}$  非奇异, 所以  $\mathbf{\Gamma}$  和  $\bar{\mathbf{\Gamma}}$  具有相同的特征值属性. 当引理中条件满足时, 矩阵  $-\bar{\mathbf{\Gamma}}$  可以表示包含  $(n+m)$  个智能体的图  $\tilde{\mathbf{G}}$  对应的拉普拉斯矩阵, 则矩阵  $\bar{\mathbf{\Gamma}}$  只包含 0 特征值和负实部的非零特征值.

对矩阵  $\bar{\mathbf{\Gamma}}$  做初等行列变换,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{\Gamma}} &\rightarrow \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_m & 0 & 0 \\ 0 & -k_1(\mathbf{L}_s + \mathbf{D}_{sf}) & k_1\mathbf{A}_{sf} \\ 0 & k_3\mathbf{A}_{fs} & -k_3(\mathbf{L}_f + \mathbf{D}_{fs}) \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{L}_s + \mathbf{D}_{sf}) & -\mathbf{A}_{sf} \\ 0 & -\mathbf{A}_{fs} & \mathbf{L}_f + \mathbf{D}_{fs} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

**注 1** 为了方便分析, 本文假设所有个体状态为标量, 采用 Kronecker 直积工具, 根据相应的性质, 本文结论同样适用于状态为向量的情况.

### 3 一致性分析

**引理 1** [4] 假设  $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T, z_i \in \mathbf{R}, \mathbf{L} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为拉普拉斯矩阵, 则以下四个条件是等价的: 1)  $\mathbf{L}$  仅具有一个 0 特征值且相关的特征向量为  $\mathbf{1}_n$ , 非零特征值均具有正实部; 2)  $\mathbf{L}\mathbf{z} = 0$  表示  $z_1 = z_2 = \dots = z_n$ ; 3) 系统  $\dot{\mathbf{z}} = -\mathbf{L}\mathbf{z}$  渐近达到一致性; 4) 矩阵  $\mathbf{L}$  的有向图包含生成树.

**引理 2** 通信拓扑包含生成树, 且控制参数满足条件  $k_2 > 1, 0 < k_1 < \frac{k_2 - 1}{\max d_i}, k_3 > 0$  时,  $d_i, i = 1, \dots, m$  为系统拉普拉斯矩阵的对角元素, 则矩阵  $\mathbf{\Gamma}$  仅有一个 0 特征值, 且非零特征值均具有负实部.

**证明** 可以看出, 系统能否获得一致性取决于矩阵  $\mathbf{\Gamma}$  的特征值属性, 对矩阵  $\mathbf{\Gamma}$  做一个非奇异变换

可以看出  $\text{rank}(\bar{\mathbf{\Gamma}}) = m + \text{rank}(\mathbf{L})$ . 系统通信拓扑包含生成树, 由引理 1 可知  $\text{rank}(\mathbf{L}) = n - 1$ , 则  $\text{rank}(\bar{\mathbf{\Gamma}}) = m + n - 1$ , 所以矩阵  $\bar{\mathbf{\Gamma}}$  仅有一个 0 特征值, 且非零特征值均具有负实部.

以上分析就得出了矩阵  $\mathbf{\Gamma}$  仅有一个 0 特征值, 且非零特征值均具有负实部. 证毕.

**定理 1** 系统 (3) 在固定拓扑中渐近达到一致性的充分条件是: 1) 通信拓扑包含生成树; 2) 控制参数满足条件  $k_2 > 1, 0 < k_1 < \frac{k_2 - 1}{\max d_i}, k_3 > 0$ ,  $d_i, i = 1, \dots, m$  为系统拉普拉斯矩阵的对角元素. 具体地,

$$t \rightarrow \infty \mathbf{x}_s \rightarrow \alpha(k_2 k_3 \mathbf{1}_m \mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_s(0))$$

$$\begin{aligned}
 &+ k_3 \mathbf{1}_m \mathbf{c}_1^T \mathbf{v}_s(0) + k_1 \mathbf{1}_m \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_f(0)), \\
 \mathbf{v}_s &\rightarrow \mathbf{1}_m 0, \\
 \mathbf{x}_f &\rightarrow \alpha(k_2 k_3 \mathbf{1}_{n-m} \mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_s(0) \\
 &+ k_3 \mathbf{1}_{n-m} \mathbf{c}_1^T \mathbf{v}_s(0) + k_1 \mathbf{1}_{n-m} \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_f(0)), \\
 \alpha &= 1/(k_3 k_2 \mathbf{c}_1^T \mathbf{1}_m + k_1 \mathbf{c}_2^T \mathbf{1}_{n-m}), \\
 \mathbf{c}_1 &\in \mathbf{R}^m, \quad \mathbf{c}_2 \in \mathbf{R}^{n-m},
 \end{aligned}$$

$\mathbf{c}^T = [\mathbf{c}_1^T, \mathbf{c}_2^T] \in \mathbf{R}^n$  是矩阵  $\mathbf{L}$  特征值 0 对应的一个非负的左特征向量。

**证明** 满足条件 1), 2)。由引理 2 可知矩阵  $\mathbf{\Gamma}$  仅有一个 0 特征值, 且非零特征值均具有负实部, 矩阵  $\mathbf{\Gamma}$  的 Jordan 规范型可以表示为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{\Gamma} &= \mathbf{PJP}^{-1}, \\
 &= [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n+m}] \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1 \times (n+m-1)} \\ \mathbf{0}_{(n+m-1) \times 1} & \mathbf{J}' \end{bmatrix} \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \dots \\ \mathbf{v}_{n+m}^T \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

其中,  $\mathbf{w}_j \in \mathbf{R}^{n+m}$ ,  $j = 1, \dots, m+n$  是矩阵  $\mathbf{\Gamma}$  的右特征向量和广义右特征向量,  $\mathbf{v}_j^T \in \mathbf{R}^{n+m}$ ,  $j = 1, \dots, m+n$  是矩阵  $\mathbf{\Gamma}$  的左特征向量和广义左特征向量,  $\mathbf{J}'$  是矩阵  $\mathbf{\Gamma}$  非零特征值对应的 Jordan 块。

不失一般性, 选择  $\mathbf{w}_1 = [\mathbf{1}_m^T, \mathbf{0}_m^T, \mathbf{1}_{n-m}^T]^T$ , 可以验证  $\mathbf{w}_1$  为矩阵  $\mathbf{\Gamma}$  特征值 0 对应的一个特征向量。通信拓扑包含生成树, 则矩阵  $\mathbf{L}$  仅有一个 0 特征值。可以验证存在一个非负向量  $\mathbf{c}^T = [\mathbf{c}_1^T, \mathbf{c}_2^T] \in \mathbf{R}^n$ , 使得  $\mathbf{c}^T \mathbf{L} = 0$ , 则,  $\mathbf{c}_1^T (\mathbf{L}_s + \mathbf{D}_{sf}) - \mathbf{c}_2^T \mathbf{A}_{fs} = 0$ ,  $-\mathbf{c}_1^T \mathbf{A}_{sf} + \mathbf{c}_2^T (\mathbf{L}_f + \mathbf{D}_{fs}) = 0$ 。可以得出  $\mathbf{v}_1^T = [\alpha k_3 k_2 \mathbf{c}_1^T, \alpha k_3 \mathbf{c}_1^T, \alpha k_1 \mathbf{c}_2^T]$  为矩阵  $\mathbf{\Gamma}$  特征值 0 对应的一个左特征向量。又  $\mathbf{w}_1$  为变换矩阵  $\mathbf{P}$  的列向量,  $\mathbf{v}_1^T$  为  $\mathbf{P}^{-1}$  的行向量,  $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} = \mathbf{I}$ , 则  $\mathbf{v}_1^T \mathbf{w}_1 = 1$ 。可以分析出  $\alpha = 1/(k_3 k_2 \mathbf{c}_1^T \mathbf{1}_m + k_1 \mathbf{c}_2^T \mathbf{1}_{n-m})$ 。注意到矩阵  $\mathbf{\Gamma}$  非零特征值均具有负实部, 则

$$\begin{aligned}
 e^{\mathbf{\Gamma}t} &= \mathbf{P} e^{\mathbf{J}'t} \mathbf{P}^{-1} \\
 &= \mathbf{P} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\mathbf{J}'t} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1},
 \end{aligned}$$

可以得出

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\mathbf{\Gamma}t} &= [\mathbf{w}_1 \mathbf{v}_1^T] = \begin{bmatrix} \alpha k_2 k_3 \mathbf{1}_m \mathbf{c}_1^T & \alpha k_3 \mathbf{1}_m \mathbf{c}_1^T & \alpha k_1 \mathbf{1}_{n-m} \mathbf{c}_2^T \\ \mathbf{0}_{m \times m} & \mathbf{0}_{m \times m} & \mathbf{0}_{m \times (n-m)} \\ \alpha k_2 k_3 \mathbf{1}_m \mathbf{c}_1^T & \alpha k_3 \mathbf{1}_m \mathbf{c}_1^T & \alpha k_1 \mathbf{1}_{n-m} \mathbf{c}_2^T \end{bmatrix}, \\
 \text{则 } \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{v}_s \\ \mathbf{x}_f \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha k_2 k_3 \mathbf{1}_m \mathbf{c}_1^T & \alpha k_3 \mathbf{1}_m \mathbf{c}_1^T & \alpha k_1 \mathbf{1}_{n-m} \mathbf{c}_2^T \\ \mathbf{0}_{m \times m} & \mathbf{0}_{m \times m} & \mathbf{0}_{m \times (n-m)} \\ \alpha k_2 k_3 \mathbf{1}_m \mathbf{c}_1^T & \alpha k_3 \mathbf{1}_m \mathbf{c}_1^T & \alpha k_1 \mathbf{1}_{n-m} \mathbf{c}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s(0) \\ \mathbf{v}_s(0) \\ \mathbf{x}_f(0) \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

可以得出

$$\begin{aligned}
 t &\rightarrow \infty, \\
 \mathbf{x}_s &\rightarrow \alpha(k_2 k_3 \mathbf{1}_m \mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_s(0) + k_3 \mathbf{1}_m \mathbf{c}_1^T \mathbf{v}_s(0) \\
 &+ k_1 \mathbf{1}_m \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_f(0)), \\
 \mathbf{v}_s &\rightarrow \mathbf{1}_m 0, \\
 \mathbf{x}_f &\rightarrow \alpha(k_2 k_3 \mathbf{1}_{n-m} \mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_s(0) \\
 &+ k_3 \mathbf{1}_{n-m} \mathbf{c}_1^T \mathbf{v}_s(0) + k_1 \mathbf{1}_{n-m} \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_f(0)),
 \end{aligned}$$

则  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = \alpha(k_2 k_3 \mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_s(0) + k_3 \mathbf{c}_1^T \mathbf{v}_s(0) + k_1 \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_f(0))$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} v_i(t) = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ 。分析的结果满足定义 1 的要求, 则系统 (3) 渐近达到一致性。

**注 2** 因为通信拓扑包含生成树, 则拉普

拉斯矩阵的对角元素至多只有一项为零, 则  $\max d_i \neq 0, i = 1, \dots, m$ , 所以定理中条件 2) 可以满足。

以上分析得出了异构系统 (1) 在一般有向图中获得一致性的充分条件, 并给出了系统状态一致性平衡点的表达式。

**引理 3<sup>[18]</sup>** 令  $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_n$  是具有相同行和  $\mu > 0$  的非负矩阵, 若其对应的有向图包含生成树, 可以为根节点的顶点构成一个回路, 则矩阵对应于特征值  $\mu$  的左特征向量  $\mathbf{c} \geq 0$ , 仅对于回路中顶点的分量为正, 其余为零。

**注 3**  $\mu \mathbf{I} - \mathbf{A}$  可以表述为图的拉普拉斯矩阵, 矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值  $\mu$  对应的左特征向量  $\mathbf{c}^T$ , 同样为拉普拉斯矩阵特征值 0 对应的左特征向量。

根据引理3, 网络通信拓扑包含生成树, 则系统中拉普拉斯矩阵特征值0对应的左特征向量分量对于根节点的分量为正, 其余为零. 同样对于异构系统(1)而言, 从定理1的分析结果可以看出系统一致性平衡点也仅与网络中生成树根节点的权值和相应的初始状态有关.

以上分析得出的是系统在固定拓扑条件下获得一致性的条件和一致平衡点, 下面将在动态拓扑条件下分析系统(3)达到一致性的条件.

**引理4**<sup>[3]</sup> 如果有向图的并集  $\{G_{t_1}, \dots, G_{t_m}\}$  具有生成树,  $L_{t_i}$  表示集合中有向图  $G_{t_i}$  的拉普拉斯矩阵, 则矩阵乘积  $e^{-L_{t_m}\Delta t_m}, \dots, e^{-L_{t_2}\Delta t_2}e^{-L_{t_1}\Delta t_1}$  是SIA矩阵, 其中  $\Delta t_i > 0$  是有界的.

**定理2** 设  $\bar{G} = \{G_1, \dots, G_N\}$  为系统所有网络拓扑的集合,  $G_k \in \bar{G}$  是系统在  $t = t_k$  时刻的交互拓扑. 系统(3)在时变切换拓扑条件下获得一致性的充分条件是:

- 1) 存在一致有界, 连续, 非重叠的无限时间间隔序列  $[t_k, t_{k+1}], k \geq 0, 0 < t_{k+1} - t_k \leq T, k, T \in Z_+$ , 开始于  $t_0 = 0$ , 每一个时间间隔内的图集表示为  $\{G_{k_1}, \dots, G_{k_{s_k}}\} \subseteq \bar{G}, s_k \in R$  表示该时间间隔内图的个数, 该图集的联合有向图包含生成树;
- 2) 且控制参数满足条件  $k_2 > 1, 0 < k_1 < \frac{k_2 - 1}{\max d_i}, k_3 > 0$  时,  $d_i, i = 1, \dots, m$  为集合  $\bar{G}$  中图并集拉普拉斯矩阵的对角元素.

**证明** 在时间间隔  $[t_k, t_{k+1}]$  内, 图集为  $\{G_{k_1}, \dots, G_{k_{s_k}}\}$ , 对应的邻接矩阵为  $\{A_{k_1}, \dots, A_{k_{s_k}}\}$ , 图并集的邻接矩阵表示为  $A_{\text{bing}}$ , 显然  $A_{\text{bing}} \leq \sum_{j=1}^{s_k} A_{k_j}$ , 联合有向图包含生成树, 则以矩阵  $\sum_{j=1}^{s_k} A_{k_j}$  为邻接矩阵的图也包含生成树, 由引理1可知  $\text{rank}(\sum_{j=1}^{s_k} L_{k_j}) = n - 1$ .

同样对于矩阵  $\Gamma$  也有以下集合  $\{\Gamma_{k_1}, \dots, \Gamma_{k_{s_k}}\}$ , 对集合中每一个元素做同定理1的  $Q$  变换有  $\{\bar{\Gamma}_{k_1}, \dots, \bar{\Gamma}_{k_{s_k}}\}$ , 满足条件2), 集合  $\{-\bar{\Gamma}_{k_1}, \dots, -\bar{\Gamma}_{k_{s_k}}\}$  中所有元素均为一个具有  $n + m$  个智能体网络的拉普拉斯矩阵, 对应图集表示为  $\{\tilde{G}_{k_1}, \dots, \tilde{G}_{k_{s_k}}\}$ . 集合  $\{\bar{D}_{k_1}, \dots, \bar{D}_{k_{s_k}}\}$  表示拉普拉斯矩阵集  $\{-\bar{\Gamma}_{k_1}, \dots, -\bar{\Gamma}_{k_{s_k}}\}$  对应的度矩阵. 则集合  $\{\bar{A}_{k_1}, \dots, \bar{A}_{k_{s_k}}\}, \bar{A}_{k_j} = \bar{D}_{k_j} + \bar{\Gamma}_{k_j}, j = 1, \dots, s$  为图集  $\{\tilde{G}_{k_1}, \dots, \tilde{G}_{k_{s_k}}\}$  对应的邻接矩阵. 图  $\{\tilde{G}_{k_1}, \dots, \tilde{G}_{k_{s_k}}\}$  的并集为  $\tilde{G}_{\text{bing}}$ , 邻接矩阵表示为  $\bar{A}_{\text{bing}}$ , 显然  $\bar{A}_{\text{ping}} = (\sum_{j=1}^{s_k} \bar{A}_{k_j}) / s_k \leq \bar{A}_{\text{bing}}$ . 以矩阵  $\bar{A}_{\text{ping}}$  为邻接矩阵的图  $\tilde{G}_{\text{ping}}$  的拉普拉斯矩阵为  $-\bar{\Gamma}_{\text{ping}} = -(\sum_{j=1}^{s_k} \bar{\Gamma}_{k_j}) / s_k$ , 做初等的行

列变换后有  $\text{rank}(\bar{\Gamma}_{\text{ping}}) = m + \text{rank}(\sum_{j=1}^{s_k} L_{k_j}) = n + m - 1$ . 由引理1可知图  $\tilde{G}_{\text{ping}}$  包含生成树, 由  $\bar{A}_{\text{ping}} \leq \bar{A}_{\text{bing}}$  可知图  $\tilde{G}_{\text{bing}}$  也包含生成树, 且图  $\tilde{G}_{\text{bing}}$  对应的拉普拉斯矩阵为  $-\bar{\Gamma}_{\text{bing}}$ .

根据引理4, 结合以上分析结论可以得出矩阵乘积  $e^{\bar{\Gamma}_{k_{s_k}}\Delta t_{k_{s_k}}}, \dots, e^{\bar{\Gamma}_{k_2}\Delta t_{k_2}}e^{\bar{\Gamma}_{k_1}\Delta t_{k_1}}$  是SIA矩阵, 则

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\bar{\Gamma}_{k_{s_k}}\Delta t_{k_{s_k}}}, \dots, e^{\bar{\Gamma}_{k_2}\Delta t_{k_2}}e^{\bar{\Gamma}_{k_1}\Delta t_{k_1}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} Q^{-1}e^{\bar{\Gamma}_{k_{s_k}}\Delta t_{k_{s_k}}}, \dots, e^{\bar{\Gamma}_{k_2}\Delta t_{k_2}}e^{\bar{\Gamma}_{k_1}\Delta t_{k_1}}Q \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} Q^{-1}e^{\bar{\Gamma}_{k_{s_k}}\Delta t_{k_{s_k}}}, \dots, e^{\bar{\Gamma}_{k_2}\Delta t_{k_2}}e^{\bar{\Gamma}_{k_1}\Delta t_{k_1}}Q \\ &= Q^{-1}\mathbf{1}_{n+m}\omega^T Q, \end{aligned}$$

$\omega^T$  为一非负的行向量;

$$Q^{-1}\mathbf{1}_{n+m} = [\mathbf{1}_m^T, \mathbf{0}_m^T, \mathbf{1}_{n-m}^T]^T,$$

令  $z^T = \omega^T Q$ . 可以看出当满足定理中条件, 系统(1)在切换拓扑情况下

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = [\mathbf{1}_m^T, \mathbf{0}_m^T, \mathbf{1}_{n-m}^T]^T z^T y(0),$$

则  $t \rightarrow \infty, x_s \rightarrow \mathbf{1}_m z^T y(0), v_s \rightarrow \mathbf{0}_m, x_f \rightarrow \mathbf{1}_{n-m} z^T y(0)$ . 则,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = z^T y(0), i = 1, \dots, n, \lim_{t \rightarrow \infty} v_i(t) = 0, i = 1, \dots, m$ , 达到了定义1中异构多智能体系统一致性的要求.

**注4** 集合  $\bar{G}$  中图并集拉普拉斯矩阵的对角元素  $d_i, i = 1, \dots, m$ , 大于等于图集内每一个子图拉普拉斯矩阵的对角元素, 所以满足定理中的条件就可以保证矩阵集  $\{-\bar{\Gamma}_{k_1}, \dots, -\bar{\Gamma}_{k_{s_k}}\}$  中的元素均为拉普拉斯矩阵.

### 4 数值仿真

在理论分析的基础上, 通过仿真实验对所得出的理论结果进行验证. 考虑由5个智能体组成的异构多智能体系统, 其中1, 2, 3二阶, 4, 5为一阶. 通信拓扑包含生成树, 如图1所示.

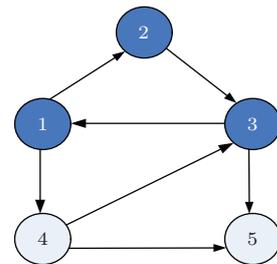


图1 智能体交互拓扑图

如果  $(e_j, e_i) \in E$ , 则  $a_{ij} = 1, i, j \in \{1, 2, 3,$

4, 5}. 图的拉普拉斯矩阵可以表示为

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

根据定理1对参数的要求, 取  $k_1 = 1.2$ ,  $k_2 = 3.5$ ,  $k_3 = 1.5$ ; 取初始值  $\mathbf{x}(0) = [1.5, 2, 4, 5, 3.5]^T$ ,  $\mathbf{v}(0) = [1, 2, 5, 3]^T$ . 可以看出图中除节点5外均为根节点. 可以求出矩阵  $L$  特征值0对应的一个左特征向量为  $[0.7559, 0.3780, 0.3780, 0.3780, 0]$ , 根据定理1分析可以计算出系统最终收敛值为  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 2.9054$ . 仿真结果如图2所示.

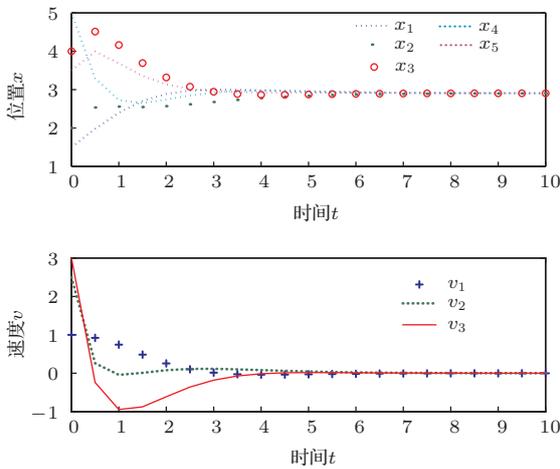


图2 (网刊彩色) 固定拓扑智能体的状态信息

由仿真结果可以看出异构系统(1)在协议(2)下渐近达到了一致性, 所有智能体的位置状态一致收敛到一个恒值, 所有二阶个体的速度信息一致收敛到了0. 该值与本文分析出的结论一致.

切换拓扑条件下, 假设智能体系统在以下三个不包含生成树的拓扑内切换, 三个图的并集包含生成树如图3所示.

根据定理2要求, 取  $k_1 = 1.2$ ,  $k_2 = 3.5$ ,  $k_3 = 1.5$ ; 取初始值  $\mathbf{x}(0) = [1.5, 2, 2.5, 3, 3.5]^T$ ,  $\mathbf{v}(0) = [1.5, 2, 3]^T$ . 仿真结果如图4所示.

由仿真结果可以看出, 异构智能体系统(1)在切换拓扑情况下, 当图的并集包含生成树且控制参数满足条件, 则系统获得一致性. 所有个体的位置状态一致收敛到一个相同的值, 二阶智能体的速度信息一致收敛到0. 可以看出在动态切换拓扑下, 系统的收敛速度明显慢于固定拓扑的情况.

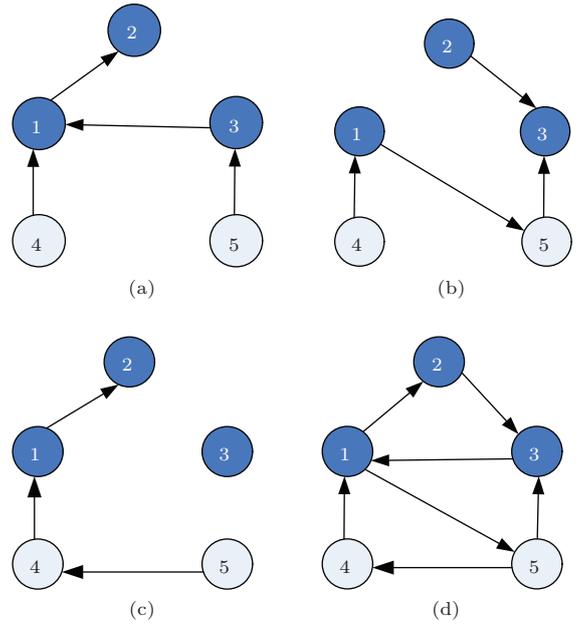


图3 动态切换拓扑

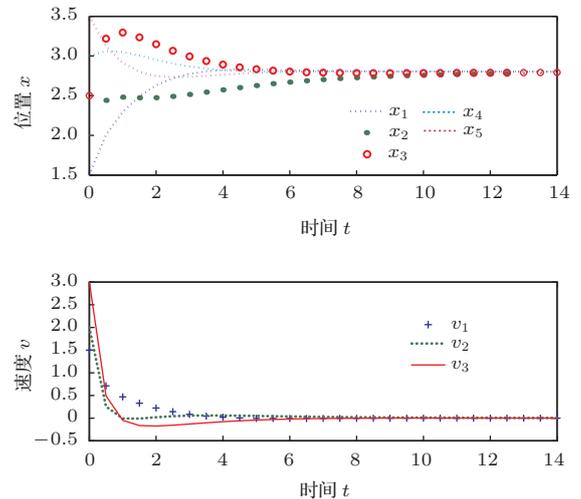


图4 (网刊彩色) 动态拓扑智能体的状态信息

### 5 结论

本文研究了连续时间一阶二阶混合的异构多智能体系统有向图下的一致性. 对该系统提出了一种线性一致性协议, 采用同构系统的一致性理论, 分析得出了在固定和切换拓扑情况下系统获得一致性的充分条件. 并给出了该系统在固定拓扑中的一致平衡点, 该平衡点与系统初始状态、拉普拉斯矩阵的0特征值的左特征向量以及系统控制参数有关, 且一致平衡点仅与通信拓扑中根节点的初始状态有关. 在参数的收敛域内, 在系统初始状态和通信拓扑给定的情况下, 通过调整控制参数就可以对系统一致平衡点进行调整, 可进一步对系统进行优化.

本文的分析方法总的来讲是基于模型的方法, 进一步拓展研究可以采用模型数据整合的方法<sup>[19,20]</sup>, 在数据驱动的框架下结合一定的先验模型知识也可以解决一致性问题, 下一步将考虑进行该方法的研究.

## 参考文献

- [1] Jadbabaie A, Lin J, Morse A S 2003 *Autom. Control* **48** 988
- [2] Olfati-Saber R, Murray R 2004 *Autom. Control* **49** 1520
- [3] Ren W, Beard R W 2005 *Autom. Control* **50** 655
- [4] Ren W, Beard R W, McLain T W 2005 *Cooperative Control: A Post-Workshop* **309** 171
- [5] You K Y, Li Z K, Xie L H 2013 *Automatica* **49** 3125
- [6] Yu H, Shen Y J, Xia X H 2013 *Systems & Control Letters* **62** 880
- [7] Wang W, Huang J S, Wen C Y, Fan H J 2014 *Automatica* **50** 1254
- [8] Xie Y Y, Wang Y, Ma Z J 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 040202 (in Chinese) [谢媛艳, 王毅, 马忠军 2014 物理学报 **63** 040202]
- [9] Ke C, Wang Z M, Tu L L 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 010508 (in Chinese) [柯超, 王志明, 涂俐兰 2013 物理学报 **62** 010508]
- [10] Zhu S Y, Chen C L, Guan X P 2013 *Chin. Phys. B* **22** 038901
- [11] Tian Y P, Zhang Y 2012 *Automatica* **48** 1205
- [12] Yang H Y, Guo L, Zhu X L, Cao K C, Zou H L 2013 *Cent. Eur. J. Phys.* **11** 806
- [13] Yin X X, Yue D, Hu S L 2013 *IET Control Theory Appl.* **7** 314
- [14] Zhu Y K, Guan X P, Luo X Y 2013 *Chin. Phys. B* **22** 038901
- [15] Jae M K, Jin B P, Yoon H C 2014 *IET Control Theory Appl.* **8** 51
- [16] Liu C L, Liu F 2011 *Automatica* **47** 2130
- [17] Zheng Y, Zhu Y, Wang L 2011 *IET Control Theory Appl.* **5** 1881
- [18] Li J B, Yan W S, Fang X P 2013 *Control Theory & Applications* **30** 513 (in Chinese) [李俊兵, 严卫生, 房新鹏 2013 控制理论与应用 **30** 513]
- [19] Yin S, Li X W, Gao H J 2014 *IEEE Trans. Ind. Electron.* **2014** 1
- [20] Yin S, Ding S X, Sari A H, Hao H Y 2013 *Int. J. Syst. Sci.* **44** 1366

# Consensus analysis for a class of heterogeneous multi-agent systems in fixed and switching topology\*

Sun Yi-Jie<sup>1)3)†</sup> Zhang Guo-Liang<sup>1)</sup> Zhang Sheng-Xiu<sup>1)</sup> Zeng Jing<sup>2)</sup>

1) (Department Three, The Second Artillery Engineering University, Xi'an 710025, China)

2) (College of Science, The Second Artillery Engineering University, Xi'an 710025, China)

3) (The United 96211, People's Liberation Army, Honghe 654300, China)

( Received 23 April 2014; revised manuscript received 17 June 2014 )

## Abstract

The consensus problem of heterogeneous multi-agent systems composed of first-order agents and second-order agents in directed graph is investigated. A linear consensus protocol is proposed for solving such a consensus problem. The sufficient conditions for achieving consensus are established by using the graph theory and matrix theory in fixed and switching topology respectively, and these conditions are dependent on control gain and communication topology. Consensus equilibrium point is derived in the fixed topology. It is proved that only root nodes in the interaction topology can make contributions to the equilibrium point. Numerical examples are provided to prove the correctness of the theorems.

**Keywords:** heterogeneous multi-agent systems, consensus, directed graph, equilibrium

**PACS:** 02.10.Yn, 02.30.Yy, 05.65.+b

**DOI:** [10.7498/aps.63.220201](https://doi.org/10.7498/aps.63.220201)

---

\* Project supported by the Natural Science Foundation of Shaanxi Province, China (Grant No. 2012K06-45).

† Corresponding author. E-mail: [syjlhx@126.com](mailto:syjlhx@126.com)