

# 不确定因素下永磁同步电动机系统的混沌鲁棒控制\*

郝建红<sup>†</sup> 汪筱巍 张恒

(华北电力大学电气与电子工程学院, 北京 102206)

(2014年5月15日收到; 2014年7月7日收到修改稿)

针对永磁同步电动机混沌系统, 考虑受不确定因素的影响, 对其数学模型采用基于微分几何理论的精确反馈线性化法, 建立鲁棒控制模型, 设计鲁棒控制器, 实现永磁同步电动机混沌系统的鲁棒镇定和输出跟踪控制. 数值仿真的结果证明了所提出方法的有效性及控制器的鲁棒性.

**关键词:** 鲁棒控制, 混沌, 精确反馈线性化, 不确定因素

**PACS:** 02.30.Yy, 05.45.-a

**DOI:** 10.7498/aps.63.220203

## 1 引言

永磁同步电动机(permanent magnet synchronous motor, PMSM)具有效率高、功率因数高、可靠性好等优点, 在一些领域中应用较广. 但是它在一定的条件下会呈现出混沌特性<sup>[1]</sup>, 而混沌现象及不确定因素的存在将对PMSM工作状态产生很大影响. 近些年来, 国内学者对PMSM的混沌控制进行了研究, 提出了各种各样的控制方法, 比如滑模变结构控制法<sup>[2]</sup>、无源理论控制<sup>[3]</sup>、反馈控制<sup>[4]</sup>、部分解耦控制<sup>[5]</sup>、逆系统控制<sup>[6]</sup>、模糊控制<sup>[7]</sup>等, 以上工作大都没有考虑系统受不确定因素影响的情形. 虽然也有学者从事研究PMSM鲁棒控制, 如鲁棒 $H_\infty$ 控制<sup>[8,9]</sup>、自适应控制<sup>[10-12]</sup>等, 其中鲁棒 $H_\infty$ 控制是将系统自身某些物理量当作鲁棒控制输入, 使得从干扰到输出的 $L_2$ 增益尽可能的小, 但这种方法大都考虑的是系统常规运行时的情形, 却忽略了特殊条件下的工况, 而自适应控制大都用于参数不确定时的情形, 而没有考虑系统受外部干扰. 文献<sup>[13]</sup>基于LaSalle不变集定理设计了一种改进型的自适应控制器, 实现了PMSM中的混沌控制以及对外界随机干扰的鲁棒性. 文献<sup>[14]</sup>

针对含有参数不确定性的PMSM混沌系统, 结合主动控制与有限时间稳定控制理论, 提出一种改进的主动有限时间稳定控制器, 提高了系统的响应能力和鲁棒性. 文献<sup>[15]</sup>只讨论了含单参数的空中发射系统的非线性鲁棒镇定控制, 但没有对系统的输出进行鲁棒跟踪控制, 而输出跟踪控制具有实际意义且工程应用较广.

本文在前人工作的基础上<sup>[13-16]</sup>, 考虑系统在特殊条件及存在不确定因素下的工况, 研究了PMSM系统的混沌鲁棒控制. 首先将系统转化为无量纲的动力学模型, 在考虑系统受不确定因素的影响下, 采用基于微分几何理论的精确反馈线性化法分别针对鲁棒镇定问题和鲁棒输出跟踪问题进行分析并设计相应的鲁棒控制器. 这种线性化法在线性化过程中没有忽略任何高阶非线性项, 因此不仅是精确的, 而且是整体的, 即线性化对变换有定义的区域都适用. 对于镇定问题, 首先求出受控混沌系统的标准型, 然后通过线性环节的控制律来控制非线性环节的渐近稳定性, 从而实现鲁棒镇定. 对于输出跟踪问题, 首先重新定义前者的坐标映射, 考虑系统零动态的稳定性, 引入状态反馈, 实现鲁棒输出跟踪, 同时考虑输出跟踪误差.

\* 国家自然科学基金(批准号: 61372050)和科技部国际科技合作项目(批准号: 2011DFR00780)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: jianhonghao@ncepu.edu.cn

## 2 PMSM的系统模型

PMSM的数学模型可表示为

$$\begin{cases} \dot{i}_d = -\frac{R}{L_d}i_d + \omega i_q + \frac{u_d}{L_d} \\ \dot{i}_q = -\frac{R}{L_q}i_q - \omega i_d - \frac{\psi_m}{L_q}\omega + \frac{u_q}{L_q} \\ \dot{\omega} = \frac{n_p\psi_m}{J}i_q - \frac{T_L}{J} - \frac{B\omega}{J} \end{cases}, \quad (1)$$

其中  $i_d, i_q$  分别为PMSM的定子  $d, q$  轴电流;  $u_d, u_q$  分别为PMSM的定子  $d, q$  轴电压;  $\omega$  为PMSM的转子角速度;  $L_d, L_q$  分别为PMSM的定子  $d, q$  轴相电感;  $R$  为PMSM的定子相电阻;  $\psi_m$  为PMSM中永磁体基波磁链;  $n_p$  为PMSM的磁极对数;  $J$  为PMSM的转子及所带负载总的转动惯量;  $B$  为PMSM的阻尼(摩擦)系数;  $T_L$  为PMSM的负载转矩. 一般而言, PMSM的转子结构对称, 令  $L_d = L_q = L$  (定子相电感).

PMSM的数学模型可以转换成无量纲的动力学模型<sup>[1]</sup>

$$\begin{cases} \frac{di_d}{dt} = -i_d + \omega i_q + \tilde{u}_d \\ \frac{di_q}{dt} = -i_q - \omega i_d + \gamma\omega + \tilde{u}_q \\ \frac{d\omega}{dt} = \sigma(i_q - \omega) - \tilde{T}_L \end{cases}, \quad (2)$$

上述模型中  $\sigma, \gamma$  为PMSM内部的两个参数, 且  $\sigma = BL/JR, \gamma = -n_p\psi_m^2/BR$ .

实际PMSM运行过程中, 可能会遇到突然断电的情形, 即PMSM没有受到驱动负载的情况, 此时有

$$\tilde{u}_q = \tilde{u}_d = \tilde{T}_L = 0. \quad (3)$$

这时PMSM内部参数一旦满足某些条件, 系统就会处于混沌状态. 图1是PMSM内部参数  $\sigma = 5.46, \gamma = 20$  时的混沌吸引子图.

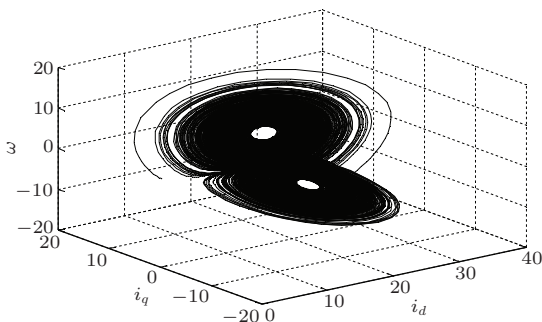


图1 PMSM的混沌吸引子

## 3 控制问题的形成

断电工况下, PMSM出现混沌运动会造成电动机失稳甚至损坏电动机. 考虑PMSM实际工作中受不确定因素的影响, 如PMSM的定子  $d$  轴和转子上产生的干扰, 以及PMSM内部参数受环境因素影响所产生的扰动. 这时, 工作人员所期望的是想让进入混沌状态中的PMSM能迅速停机, 即快速镇定到其平衡点. 如果不确定因素导致混沌态PMSM的转子仍然持续转动, 此时由于PMSM中永磁体的存在, 导体会切割磁感线, 产生电流, 会使PMSM外壳发热, 严重时会使PMSM内部熔断器烧毁. 另外, 不确定因素导致混沌态PMSM的输出脱离所期望的运行轨道, 会导致与其相连的其他系统运行失稳. 为了避免出现上述后果, 一旦处于混沌状态的PMSM受不确定因素影响而无法在工作要求时, 就需要施加控制, 使其迅速镇定到平衡点, 即稳态上, 并在停机前跟踪PMSM的输出, 使其迅速运行到期望轨道上.

在考虑各种不确定因素影响的基础上, 首先通过设计鲁棒镇定控制器, 将PMSM的混沌状态由混沌镇定到平衡点, 实现停机; 其次, 设计鲁棒输出跟踪控制器, 跟踪停机前PMSM的输出, 使其在断电后能快速达到所期望的运行轨道上, 防止突然停电及不确定因素对与其相连系统的运行造成影响.

采用基于微分几何理论的精确反馈线性化法需要引入系统的输出, 这里设输出  $y = \omega$ , 构造下列受控混沌系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(c_1(t) + 1)x_1 + x_2x_3 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_1x_3 + \gamma c_2(t)x_3 + u \\ \dot{x}_3 = \sigma(x_2 - x_3) + c_3(t)x_3 \\ y = x_3 \end{cases}, \quad (4)$$

其中  $c_1(t), c_2(t), c_3(t)$  为不确定因素, 且有  $c_1(t), c_2(t), c_3(t) \in [0, 1], u$  为控制输入.

## 4 不确定因素下PMSM系统的混沌鲁棒控制

### 4.1 鲁棒镇定控制

假设受控混沌系统(4)的各状态变量的期望值为  $[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3]$ , 由此, 镇定问题转化为设计一种鲁棒控制器, 使得系统(4)的各状态变量均收敛到所规定的平衡点  $[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3]$  处. 显然在平衡点

$[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3]$  处有

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = -(c_1(t) + 1)\bar{x}_1 + \bar{x}_2\bar{x}_3 \\ \dot{\bar{x}}_2 = -\bar{x}_2 - \bar{x}_1\bar{x}_3 + \gamma c_2(t)\bar{x}_3 \\ \dot{\bar{x}}_3 = \sigma(\bar{x}_2 - \bar{x}_3) + c_3(t)\bar{x}_3 \\ \bar{y} = \bar{x}_3 \end{cases} \quad (5)$$

由(4)–(5)式, 得

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -(c_1(t) + 1)y_1 + y_2\bar{x}_3 \\ \quad + y_3\bar{x}_2 + y_2y_3 \\ \dot{y}_2 = -y_2 - y_1\bar{x}_3 - y_3\bar{x}_1 \\ \quad - y_1y_3 + \gamma c_2(t)y_3 + u \\ \dot{y}_3 = \sigma(y_2 - y_3) + c_3(t)y_3 \\ y' = y_3 \end{cases} \quad (6)$$

其中  $y_1 = x_1 - \bar{x}_1, y_2 = x_2 - \bar{x}_2, y_3 = x_3 - \bar{x}_3, y' = y - \bar{y}$ .

通过上述计算得知, 要想使得受控混沌系统(4)的各状态变量均收敛到所规定的平衡点  $[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3]$  处, 那么就使得系统(6)的各状态变量收敛到平衡点  $[0, 0, 0]$  处.

为方便分析, 用状态变量  $x_i, a_i (i = 1, 2, 3), y$  来替换系统(6)中的  $y_i, \bar{x}_i (i = 1, 2, 3), y'$ , 将系统(6)转化为下列含不确定因素的非线性控制系统的形式:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x})\mathbf{c} + \mathbf{g}_2(\mathbf{x})u \\ y = h(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (7)$$

其中  $\mathbf{c} = [c_1(t), c_2(t), c_3(t)]^T$ .

将(6)式替换之后再与系统(7)进行对比, 得

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -x_1 + a_3x_2 + a_2x_3 + x_2x_3 \\ -x_2 - a_3x_1 - a_1x_3 - x_1x_3 \\ \sigma(x_2 - x_3) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma x_3 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g}_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$h(\mathbf{x}) = x_3.$$

首先考虑  $\mathbf{c} = 0$  时的情形, 此时与系统(7)对应

的非线性仿射系统为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_2(\mathbf{x})u \\ y = h(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (8)$$

其中,  $\mathbf{x} \in R^3, y \in R^1, \mathbf{f}, \mathbf{g}_2, h$  为光滑向量函数, 且满足  $\mathbf{f}(0) = 0, h(0) = 0$ .

对于系统(8)而言, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} &= [0 \quad 0 \quad 1], \\ L_{\mathbf{g}_2}h(\mathbf{x}) &= 0, \\ L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) &= \sigma(x_2 - x_3), \\ L_{\mathbf{g}_2}L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) &= \sigma \neq 0. \end{aligned}$$

由此可知: 系统(8)从控制输入到输出的关系度  $r = 2 < n = 3$  (系统维数).

对系统做一个由  $\mathbf{x}$  坐标空间向  $\mathbf{z}$  坐标空间的坐标映射  $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$ , 其中向量函数  $\Phi(\mathbf{x})$  定义为  $\Phi(\mathbf{x}) = [\varphi_1(\mathbf{x}) \quad \varphi_2(\mathbf{x}) \quad \varphi_3(\mathbf{x})]^T$ , 且  $\Phi, \varphi$  均光滑可微.

并选择  $z_1 = h(x_1, x_2, x_3) = h(\mathbf{x})$ , 则有  $\dot{z}_1 = \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}$ , 将系统(8)代入有

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{g}_2(\mathbf{x})u \\ &= L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}_2}L_{\mathbf{f}}^0h(\mathbf{x})u = L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

令  $\dot{z}_1 = \dot{z}_2$ , 故有

$$\begin{aligned} z_1 &= \varphi_1(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) = x_3, \\ z_2 &= \varphi_2(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) = \sigma(x_2 - x_3), \\ z_3 &= \varphi_3(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

为了得到系统(7)的线性化标准型, 只需要找到一个  $\varphi_3(\mathbf{x})$ , 满足

$$L_{\mathbf{g}_2}\varphi_3(\mathbf{x}) = \frac{\partial \varphi_3(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{g}_2(\mathbf{x}) = 0,$$

而

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_3(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_3(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_3(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_3(\mathbf{x})}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial \varphi_3(\mathbf{x})}{\partial x_2} = 0, \end{aligned}$$

故令  $\varphi_3(\mathbf{x}) = x_1$ .

综上所述, 得坐标映射

$$z = \Phi(x) : \begin{cases} z_1 = \varphi_1(x) = x_3 \\ z_2 = \varphi_2(x) = \sigma(x_2 - x_3) \\ z_3 = \varphi_3(x) = x_1 \end{cases} \quad (9)$$

上述(9)式的Jacobian矩阵  $J_\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sigma & -\sigma \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  是非

奇异的, 故  $z = \Phi(x)$  是一个合格的坐标映射.

再求出(9)式的逆映射

$$x = \Phi^{-1}(z) : \begin{cases} x_1 = z_3 \\ x_2 = z_1 + \frac{z_2}{\sigma} \\ x_3 = z_1 \end{cases} \quad (10)$$

综合系统(6)替换后的式子以及(9)和(10)式得

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + c_3 z_1 \\ \dot{z}_2 = -(1+a_1)\sigma z_1 - (1+\sigma)z_2 - \sigma a_3 z_3 - \sigma z_1 z_3 + \gamma \sigma c_2 z_1 - \sigma c_3 z_1 + \sigma u \\ \dot{z}_3 = -(c_1+1)z_3 + a_3 z_1 + \frac{a_3}{\sigma} z_2 + a_2 z_1 + z_1^2 + \frac{z_1 z_2}{\sigma} \end{cases} \quad (11)$$

引入辅助控制变量  $v$ , 设

$$v = \sigma u - (1+a_1)\sigma z_1 - (1+\sigma)z_2 - \sigma a_3 z_3 - \sigma z_1 z_3, \quad (12)$$

得状态反馈

$$u = \frac{1}{\sigma} [v + (1+a_1)\sigma z_1 + (1+\sigma)z_2 + \sigma a_3 z_3 + \sigma z_1 z_3]. \quad (13)$$

于是系统(7)的线性化标准型为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + c_3 z_1 \\ \dot{z}_2 = v + \gamma \sigma c_2 z_1 - \sigma c_3 z_1 \\ \dot{z}_3 = -(c_1+1)z_3 + a_3 z_1 + \frac{a_3}{\sigma} z_2 + a_2 z_1 + z_1^2 + \frac{z_1 z_2}{\sigma} \end{cases} \quad (14)$$

利用 Lie 括号

$$[f, g_2] = ad_f g_2 = \begin{bmatrix} -a_3 - x_3 \\ 1 \\ -\sigma \end{bmatrix},$$

同理

$$[g_2, ad_f g_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

增广矩阵

$$G = [g_2 \quad ad_f g_2 \quad [g_2 \quad ad_f g_2]] = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 - x_3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \end{bmatrix},$$

知  $\text{rank}(G) = 2$ , 从而得知集合  $\{g_2 \quad ad_f g_2\}$  是对称的.

综上所述, 系统(7)与系统(14)是等价反馈系统.

上述标准型(14)式使得线性环节从系统(7)中脱离出来, 从而可设计出线性鲁棒控制律  $v$  来控制非线性环节的稳定性.

针对系统(14)中的线性环节

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + c_3 z_1 \\ \dot{z}_2 = v + \gamma \sigma c_2 z_1 - \sigma c_3 z_1 \end{cases} \quad (15)$$

设计线性鲁棒控制律

$$v = Kz = [k_1 \quad k_2][z_1 \quad z_2]^T = k_1 z_1 + k_2 z_2,$$

其中  $k_1, k_2$  为反馈系数, 使得线性环节(15)鲁棒渐近稳定.

**定理 1** 根据李雅普诺夫稳定性判据, 若线性鲁棒控制律  $v = k_1 z_1 + k_2 z_2$  中的反馈系数  $k_1, k_2$  满足  $k_1 < k_2 - \gamma \sigma, k_2 < -1$ , 则该线性鲁棒控制律  $v$  能使线性环节(15)鲁棒渐近稳定.

**证明** 将  $v = k_1 z_1 + k_2 z_2$  代入线性环节(15)得

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = c_3 z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 = (k_1 + \gamma \sigma c_2 - \sigma c_3) z_1 + k_2 z_2 \end{cases} \quad (16)$$

由线性系统  $\dot{X} = AX$ , 其中  $X = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ , 知

$$A = \begin{bmatrix} c_3 & 1 \\ k_1 + \gamma \sigma c_2 - \sigma c_3 & k_2 \end{bmatrix},$$

则有

$$|\lambda \mathbf{A} - \mathbf{I}| = \lambda^2 - (k_2 + c_3)\lambda - [k_1 + \gamma\sigma c_2 - (k_2 + \sigma)c_3].$$

当  $k_1 < k_2 - \gamma\sigma$ ,  $k_2 < -1$ , 同时  $c_1, c_2, c_3 \in [0, 1]$ , 有  $k_2 + c_3 < 0$ ,  $k_1 + \gamma\sigma c_2 - (k_2 + \sigma)c_3 < 0$ . 于是得到  $\text{Re}[\lambda_i] < 0$  ( $i = 1, 2$ ), 从而线性环节 (15) 鲁棒渐近稳定且收敛于状态原点.

然而对于线性环节而言, 渐近稳定就表明指数稳定, 即有

$$\|z_i\| \leq \mu e^{-\theta t} \quad (i = 1, 2), \quad (17)$$

其中  $\mu, \theta$  均为正常数.

**定理 2** 若存在非负的正定可微标量函数  $V(\mathbf{x}(t), t)$ , 满足

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t), t) \leq -\mu_1 V(\mathbf{x}(t), t) + \mu_2 e^{-\theta t}, \mu_1 > 0, \mu_2 > 0, \theta > 0,$$

则有  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}(t), t) = 0$ .

**证明** 令  $H(t) = \dot{V}(\mathbf{x}(t), t) + \mu_1 V(\mathbf{x}(t), t) - \mu_2 e^{-\theta t}$ ,

设  $t = t_0$  时,  $V(\mathbf{x}(t), t) = V(\mathbf{x}(t_0), t_0)$ ,

当  $t > t_0$  时,  $H(t) \leq 0$ , 由一阶线性微分方程解出

$$\begin{aligned} 0 &\leq V(\mathbf{x}(t), t) \\ &= V(\mathbf{x}(t_0), t_0) e^{-\mu_1(t-t_0)} + e^{-\mu_1(t-t_0)} \\ &\quad \times \int_{t_0}^t (H(\tau) + \mu_2 e^{-\theta\tau}) e^{\mu_1(\tau-t_0)} d\tau \\ &= V(\mathbf{x}(t_0), t_0) e^{-\mu_1(t-t_0)} \\ &\quad + \int_{t_0}^t (H(\tau) + \mu_2 e^{-\theta\tau}) e^{-\mu_1(t-\tau)} d\tau \\ &\leq V(\mathbf{x}(t_0), t_0) e^{-\mu_1(t-t_0)} \\ &\quad + \mu_2 e^{-\mu_1 t} \int_{t_0}^t e^{(\mu_1-\theta)\tau} d\tau. \end{aligned}$$

当  $\mu_1 = \theta$  时, 上述不等式右边 =  $V(\mathbf{x}(t_0), t_0) \times e^{-\mu_1(t-t_0)} + \mu_2(t-t_0) e^{-\mu_1 t}$ ; 当  $\mu_1 \neq \theta$  时, 上述不等式右边 =  $V(\mathbf{x}(t_0), t_0) e^{-\mu_1(t-t_0)} + \frac{\mu_2}{\mu_1 - \theta} [e^{-\theta t} - e^{-\mu_1(t-t_0) - \theta t_0}]$ .

显然, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 以上两种情况都是趋于 0 的, 由极限夹逼准则得  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}(t), t) = 0$ .

对于系统 (14) 中的非线性环节

$$\dot{z}_3 = -(c_1 + 1)z_3 + a_3 z_1 + \frac{a_3}{\sigma} z_2$$

$$+ a_2 z_1 + z_1^2 + \frac{z_1 z_2}{\sigma}. \quad (18)$$

构造李雅普诺夫函数  $V(z_3(t)) = \frac{1}{2} z_3^2$ , 则

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_3) &\leq -z_3^2 + a_3 z_1 z_3 + \frac{a_3}{\sigma} z_2 z_3 + a_2 z_1 z_3 \\ &\quad + \frac{z_1^4 + z_3^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{(z_1^2 z_2^2 + z_3^2)}{\sigma}. \end{aligned} \quad (19)$$

取 PMSM 的停机状态为平衡点, 即  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ , 有  $\dot{V}(z_3) \leq \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{z_3^2}{2} + \frac{\sigma+1}{2\sigma} \mu^4 e^{-4\theta t}$ , 于是得  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(z_3(t)) = 0$ , 从而  $\lim_{t \rightarrow \infty} z_3(t) = 0$ . 于是知非线性环节 (18) 渐近收敛于状态原点  $z_3 = 0$ .

综上所述, 线性鲁棒控制律  $v = k_1 z_1 + k_2 z_2$  使得系统 (6) 渐近稳定于  $[0, 0, 0]$ . 从而得到系统 (4) 的鲁棒镇定控制器

$$\begin{aligned} u &= x_1 x_3 + a_3 x_1 + [k_2 + (1 + \sigma)] x_2 \\ &\quad + \left[ \frac{k_1}{\sigma} - k_2 + a_1 - \sigma \right] x_3. \end{aligned} \quad (20)$$

## 4.2 鲁棒输出跟踪控制

假设受控混沌系统 (4) 的期望输出为  $y^*$ , 则系统 (4) 的各状态变量的误差可定义为

$$e_1 = i_d, e_2 = i_q, e_3 = \omega - \omega^*, \quad (21)$$

其中  $\omega^*$  为 PMSM 的期望转速, 根据 LaSalle 不变集定理知, 输出跟踪问题实际等效为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \|e\| = 0$ , 其中  $e = [e_1 \ e_2 \ e_3]^T$ .

由 4.1 知, 系统 (8) 的关系度  $r = 2 < n = 3$ , 这里重新定义坐标映射 (9)

$$z = \Phi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix},$$

其中  $\Phi_1 = [z_1 \ z_2]^T$ ,  $\Phi_2 = z_3$ .

而

$$\begin{aligned} L_f \varphi_3(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\Phi^{-1}(z)} \\ = -z_3 + a_3 \left( z_1 + \frac{z_2}{\sigma} \right) + a_2 z_1 + z_1^2 + \frac{z_1 z_2}{\sigma}. \end{aligned}$$

于是得系统 (8) 的零动态方程

$$\dot{z}_3 = L_f \varphi_3(\Phi^{-1}(0, \Phi_2)) = -z_3. \quad (22)$$

由此可知系统零动态是渐近稳定的, 故整个系统是渐近稳定的. 所以采用精确反馈线性化法有效.

对坐标映射 (9) 两边沿向量场求导, 得

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = L_f h(\mathbf{x}) \\ \dot{z}_2 = L_f^2 h(\mathbf{x}) + L_{g_1} L_f h(\mathbf{x}) \mathbf{c} + L_{g_2} L_f h(\mathbf{x}) u \\ \dot{z}_3 = L_f \varphi_3(\mathbf{x}) + L_{g_1} \varphi_3(\mathbf{x}) \mathbf{c} + L_{g_2} \varphi_3(\mathbf{x}) u = L_f \varphi_3(\mathbf{x}) + L_{g_2} \varphi_3(\mathbf{x}) \mathbf{c} \end{cases} \quad (23)$$

引入两个新的控制量  $v_1, v_2$ , 且令

$$\begin{aligned} v_1 &= L_f^2 h(\mathbf{x}) + L_{g_2} L_f h(\mathbf{x}) u, \\ v_2 &= L_f \varphi_3(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (24)$$

于是 (23) 式转化为线性系统

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = v_1 + (\gamma \sigma c_2 - \sigma c_3) z_1 \\ \dot{z}_3 = v_2 - c_1 z_3 \end{cases} \quad (25)$$

根据线性系统的极点可配置理论, 得

$$\begin{aligned} v_1 &= -k_3 \Delta z_1 - k_4 \Delta z_2 \\ &= -k_3(z_1 - z_1^*) - k_4(z_2 - z_2^*) \\ &= -k_3 e_3 - k_4 \dot{e}_3, \end{aligned} \quad (26)$$

其中  $k_3, k_4$  为反馈系数.

综合 (24) 和 (26) 式得系统 (4) 的鲁棒输出跟踪控制器

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\sigma} [-k_3(x_3 - x_3^*) - k_4(\sigma(x_2 - x_3) - \dot{x}_3^*)] \\ &\quad + a_3 x_1 + (\sigma + 1)x_2 + (a_1 - \sigma)x_3 \\ &\quad + x_1 x_3. \end{aligned} \quad (27)$$

### 5 数值仿真与分析

假设不确定因素  $c_1(t) = \sin^2 \alpha t, c_2(t) = \cos^2 \beta t, c_3(t)$  为单位阶跃信号  $\varepsilon(t)$ , 其中干扰频率为  $\alpha = \beta = 1$ , 取 PMSM 的内部参数  $\sigma = 5.46, \gamma = 20$ , 受控混沌系统 (4) 的停机状态为系统的平衡点, 即  $[a_1, a_2, a_3] = [0, 0, 0]$ , 设定 PMSM 的期望输出轨道为  $x_3^* = \omega^* = 3 \sin(0.25\pi t)$ , 鲁棒镇定控制器和鲁棒输出跟踪控制器中的反馈系数为  $k_1 = -120, k_2 = -10, k_3 = 5000, k_4 = 200$ . 当突然断电时, 即初始条件下, PMSM 混沌系统各状态变量的值为  $x_1(0) = i_d(0) = 25, x_2(0) = i_q(0) = 25, x_3(0) = \omega(0) = 25$ , 则系统 (4) 各状态变量随时间的变化曲线及输出跟踪曲线分别如图 2 和图 3 所示.

从图 2 中可以看出, 当鲁棒镇定控制器在  $t = 30$  s 开始施加作用时, 受控混沌系统 (4) 在其作用下, 各状态变量快速趋于状态原点, 实现鲁棒镇

定控制. 也就是说, 所设计的鲁棒镇定控制器可以使 PMSM 迅速停机.

从图 3 中可以看出, 当鲁棒输出跟踪控制器在  $t = 5$  s 开始施加作用时, 系统 (4) 的输出能快速跟踪期望轨道, 从而避免对与 PMSM 相连系统的运行造成影响. 在  $t = 30$  s 时, PMSM 迅速停机, 此时, 系统的输出为零.

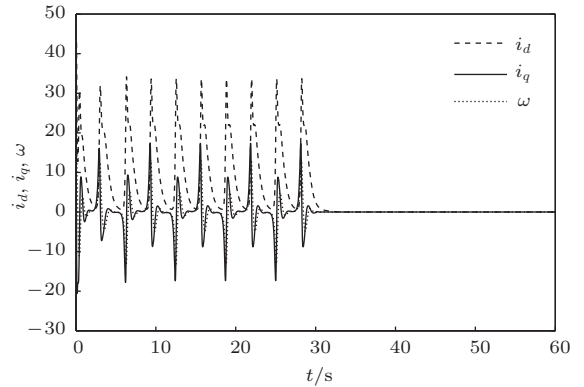


图 2 受控混沌系统 (4) 各状态变量随时间的变化

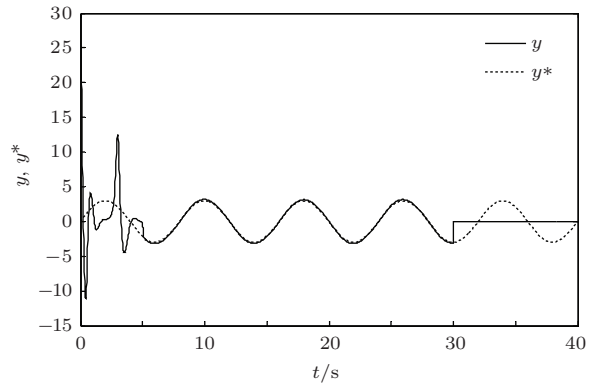


图 3 受控混沌系统 (4) 的输出跟踪曲线

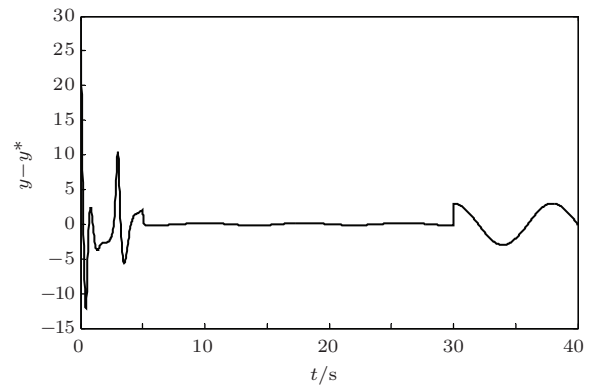


图 4 受控混沌系统 (4) 的输出跟踪误差曲线

从图4中可以看出,受控混沌系统(4)在鲁棒输出跟踪控制器的作用下,其输出跟踪误差渐近趋于零.

图5和图6分别是鲁棒镇定控制器和鲁棒输出跟踪控制器随时间的变化曲线,如图所示,分别在 $t = 30\text{ s}$ 和 $t = 5\text{ s}$ 施加控制,在迅速达到控制效果后,控制器停止作用.

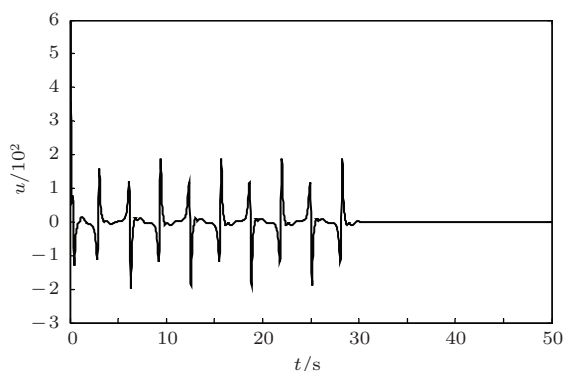


图5 受控混沌系统(4)的鲁棒镇定控制器随时间的变化

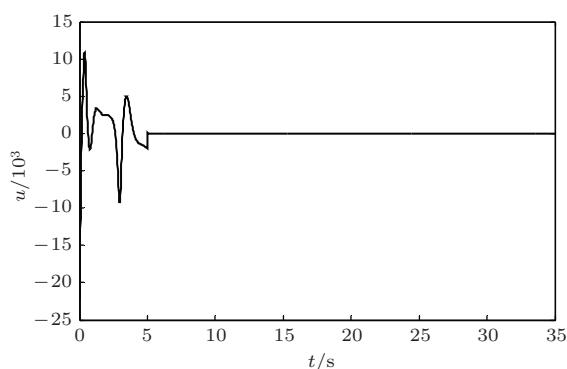


图6 受控混沌系统(4)的鲁棒输出跟踪控制器随时间的变化

## 6 结 论

本文考虑PMSM实际运行过程中会受各种不确定因素的影响,采用基于微分几何理论及在线性化过程中未忽略任何高阶非线性项的精确反馈线性化法,分别针对鲁棒镇定问题和鲁棒输出跟踪问题,建立了鲁棒控制模型,对混沌态镇定在平衡点和运行轨道的跟踪设计了鲁棒控制器.研究结果表明:利用微分几何理论设计的鲁棒控制器提高了PMSM的鲁棒性,能实现对不确定因素下PMSM混沌系统的鲁棒镇定及输出跟踪,使得PMSM的

运行状态满足工作人员要求.数值仿真验证了方法的有效性.

## 参考文献

- [1] Zhang B, Li Z, Mao Z Y 2002 *Control Theory Appl.* **19** 841 (in Chinese) [张波, 李忠, 毛宗源 2002 控制理论与应用 **19** 841]
- [2] Tan W, Wang Y N, Huang C X, Wu X D 2009 *Computer Engineering and Application* **45** 220 (in Chinese) [谭文, 王耀南, 黄创霞, 伍雪冬 2009 计算机工程与应用 **45** 220]
- [3] Wu Z Q, Tan F X 2006 *Proc. CSEE* **26** 159 (in Chinese) [吴忠强, 谭拂晓 2006 中国电机工程学报 **26** 159]
- [4] Ren H P, Liu D 2006 *IEEE Trans. Circuits System-II.* **53** 45
- [5] Li J, Ren H P 2005 *Control Theory & Applications* **22** 637 (in Chinese) [李洁, 任海鹏 2005 控制理论与应用 **22** 637]
- [6] Meng Z J, Sun C Z, An Y J, Gao J W, Gao P 2007 *Proceeding of International Conference on Electrical Machines and Systems* Seoul, Korea October 8–11 2007 p1748
- [7] Yin P Q, Yu L, Nan Y R, Zheng K 2006 *Proceedings of the CSEE* **26** 143 (in Chinese) [殷培强, 俞立, 南余荣, 郑科 2006 中国电机工程学报 **26** 143]
- [8] Shen T L 1996 *H<sub>∞</sub> Control Theory and Application* (Beijing: Tsinghua University Press) (in Chinese) [申铁龙 1996 H<sub>∞</sub> 控制理论及其应用 (北京: 清华大学出版社)]
- [9] Lin L, Huang S R 2009 *Electr. Mach. Control* **13** 541 (in Chinese) [林立, 黄苏融 2009 电机与控制学报 **13** 541]
- [10] Zhang X H, Ding S G 2009 *Control Theory & Applications* **26** 661 (in Chinese) [张兴华, 丁守刚 2009 控制理论与应用 **26** 661]
- [11] Du R H, Wu Y F, Chen W, Chen Q W 2013 *Information and Control* **42** 132 (in Chinese) [杜仁慧, 吴益飞, 陈威, 陈庆伟 2013 信息与控制 **42** 132]
- [12] Ji Z C, Li S D, Shen Y X 2005 *Control and Decision* **20** 329 (in Chinese) [纪志成, 李三东, 沈艳霞 2005 控制与决策 **20** 329]
- [13] Li C L, Yu S M 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 120505 (in Chinese) [李春来, 禹思敏 2011 物理学报 **60** 120505]
- [14] Tang C S, Dai Y H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 180504 (in Chinese) [唐传胜, 戴跃洪 2013 物理学报 **62** 180504]
- [15] Van C N, Riccardo M, Gilney D 2012 *IEEE Conference on Decision and Control* Maui, Hawaii, USA December 10–13, 2012 p3564
- [16] Xue W, Guo Y L, Chen Z Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 8146 (in Chinese) [薛薇, 郭彦岭, 陈增强 2009 物理学报 **58** 8146]

# Chaotic robust control of permanent magnet synchronous motor system under uncertain factors\*

Hao Jian-Hong<sup>†</sup> Wang Xiao-Wei Zhang Heng

(School of Electrical and Electronic Engineering, North China Electric Power University, Beijing 102206, China)

( Received 15 May 2014; revised manuscript received 7 July 2014 )

## Abstract

In this paper, targeting the permanent magnet synchronous motor chaotic system, we consider the system influenced by uncertain factors. We use the method of the exact feedback linearization which is based on differential geometry theory to establish the nonlinear robust control model and design the robust controller for realizing the robust stabilization and output tracking control of the permanent magnet synchronous motor chaotic system. Numerical simulation results demonstrate the effectiveness of the proposed method and the robustness of the controller.

**Keywords:** robust control, chaos, exact feedback linearization, uncertain factors

**PACS:** 02.30.Yy, 05.45.-a

**DOI:** [10.7498/aps.63.220203](https://doi.org/10.7498/aps.63.220203)

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61372050) and the International Science and Technology Cooperation Program (Grant No. 2011DFR00780).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [jianhonghao@ncepu.edu.cn](mailto:jianhonghao@ncepu.edu.cn)