

# 空间调制作用下 Bessel 型光晶格中物质波孤立子的稳定性

陈海军<sup>†</sup> 张耀文

(陇东学院电气工程学院, 庆阳 745000)

(2014 年 4 月 24 日收到; 2014 年 6 月 20 日收到修改稿)

利用变分法和数值计算方法研究了空间调制作用下 Bessel 型光晶格中玻色-爱因斯坦凝聚体系中孤立子的稳定性, 给出了存在随空间非周期变化的线性 Bessel 型光晶格和非线性光晶格(原子之间非线性相互作用的空间调制)时, 各种参数组合下涡旋和非涡旋孤立子的稳定性条件. 首先, 利用圆对称的高斯型试探波函数得出描述体系稳定性参数满足的 Euler-Lagrange 方程和变分法分析体系稳定性所需要的有效作用势能的表达式. 然后, 根据有效作用势能是否具有局域最小值判断体系是否具有稳定状态, 得出体系具有稳定状态时参数所满足的条件. 最后, 利用有限差分法求解 Gross-Pitaevskii 方程验证变分法结果的正确性, 所得结果和变分法结果一致.

**关键词:** Bessel 型光晶格, 非线性光晶格, 孤立子, 稳定性

**PACS:** 03.75.Lm, 03.75.Hh, 03.75.Nt

**DOI:** 10.7498/aps.63.220303

## 1 引言

近年来, 光晶格 (optical lattice, OLs) 中玻色-爱因斯坦凝聚 (BEC) 的研究引起了理论和实验研究的关注<sup>[1,2]</sup>, 包括三维光晶格中玻色凝聚气体基态波函数及干涉演化<sup>[3]</sup>, 双色光晶格势阱中玻色-爱因斯坦凝聚体的 Landau-Zener 隧穿行为<sup>[4]</sup> 和光晶格中双组分偶极玻色-爱因斯坦凝聚体的调制不稳定性<sup>[5,6]</sup> 的研究. 光晶格分为线性光晶格 (LOL) 和非线性光晶格 (NOL)<sup>[7]</sup>. 线性光晶格是原子感受到的外势场的作用, 又分为随空间周期变化的 cos 型光晶格和随空间非周期变化的 Bessel 型光晶格; 而非线性光晶格是指原子之间相互作用随空间的变化. 线性和非线性光晶格中孤立子的研究有重要的意义<sup>[8-10]</sup>. 在周期性变化的线性光晶格中, 在排斥和吸引相互作用下均能形成能隙孤立子<sup>[11-14]</sup>. 非线性光晶格中也可以形成稳定的孤立子, 一维非线性光晶格中孤立子的数学性质有较详细的研究<sup>[15-16]</sup>. 另外, 线性光晶格和非线性光晶格结合

情形下孤立子的性质也有理论研究<sup>[17]</sup>, 包括一维交叉型光晶格中在排斥和吸引相互作用下可以形成稳定的二维孤立子<sup>[7]</sup>, 二维线性和二维非线性交叉光晶格中的物质波的稳定性也有理论研究<sup>[18]</sup>.

Bessel 型光晶格和 cos 型光晶格的不同之处是其空间变化的非周期性, 其中孤立子的研究在 BEC 体系和非线性光学介质中都具有理论和实验意义. 非线性光学介质中的涡旋、多极等类型的孤立子的稳定性<sup>[19]</sup>, Bessel 型光晶格角向调制下孤立子的稳定性<sup>[20]</sup> 以及旋转孤立子的结构<sup>[21]</sup> 和二维孤立子的振荡<sup>[22]</sup> 都进行了理论研究. 这些工作大多研究的是非线性光学介质中孤立子的行为, 并且只考虑了线性光晶格中孤立子的行为.

本文研究 Bessel 型线性光晶格和非线性光晶格结合情形下 BEC 体系中物质波孤立子的稳定性, 也就是研究原子之间的非线性相互作用随空间变化时, Bessel 型光晶格中孤立子的稳定性. 根据平均场模型下的 Gross-Pitaevskii (GP) 方程, 利用变分法和数值模拟方法研究了准二维 BEC 体系中涡旋

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: [ldxychj@163.com](mailto:ldxychj@163.com)

和非涡旋孤立子的稳定性. 文章第二部分建立了变分法分析体系稳定性所需要的有效作用势能; 第三部分根据有效势能的结构是否具有局域最小值来判断体系是否具有稳定的孤立子解, 给出了各种参数组合下的势能结构示意图, 判断稳定孤立子解存在的参数取值区间, 并利用数值计算方法验证了变分法给出结果的正确性. 结果表明, 利用高斯型函数作为试探波函数得出的变分法结果和数值计算结果一致.

## 2 模型

描述准二维圆对称 BEC 体系的波函数满足无量纲化平均场 GP 方程为<sup>[23]</sup>

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(\rho, t) = \left[ -\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + V(\rho) + \frac{L^2}{\rho} + g(\rho) |\psi(\rho, t)|^2 \right] \psi(\rho, t), \quad (1)$$

由于圆对称性, 物理体系的 (2+1) 维极坐标系  $(\rho, \theta)$  下的 GP 方程在数学中实际上是 (1+1) 维方程, 只与  $\rho$  有关; 其中波函数  $\psi(\rho, t)$  满足归一化条件

$$2\pi \int_0^\infty d\rho \rho |\psi(\rho, t)|^2 = 1. V(\rho) = \epsilon J_0^2(k\rho)$$

表示空间非周期变化的线性 Bessel 型光晶格,  $\epsilon$  是晶格强度, 其特点是当  $\epsilon < 0$  时, 在晶格中心具有势阱结构. 非线性光晶格部分为

$$g(\rho) = g_0 + g_1 \cos(\gamma\rho), \quad (2)$$

$g_0$  表示和 s 波散射长度  $a_0$  有关的非线性项,  $g_1$  表示非线性项的空间周期调制强度, 周期是  $2\pi/\gamma$ , 即原子之间非线性相互作用的空间调制由  $g_1$  和  $\gamma$  决定.

为了研究体系的非涡旋孤立子和涡旋孤立子的稳定性, 假设如下的 Gauss 型试探波函数<sup>[24]</sup>

$$\psi(\rho, t) = \frac{w(t)^{-(L+1)}}{\sqrt{\pi\Gamma(L+1)}} \rho^L \exp \left[ -\frac{\rho^2}{2w(t)^2} + \frac{i}{2}\beta(t)\rho^2 + i\alpha(t) \right], \quad (3)$$

处于量子化涡旋态中每个原子沿  $z$  轴的角动量是  $L\hbar$ ,  $L = 0$  和  $L = 1$  分别表示非涡旋孤立子与涡旋孤立子;  $w(t)$ ,  $\beta(t)$  和  $\alpha(t)$  分别表示波包宽度、Chirp 和孤立子的相位. 利用标准的变分法程序分析体系的稳定性, 和方程 (1) 对应的 Lagrange 密度函数为

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(\psi\psi_t^* - \psi^*\psi_t) + \left| \frac{\partial\psi}{\partial\rho} \right|^2$$

$$+ V(\rho)|\psi|^2 + \frac{L^2}{\rho}|\psi|^2 + \frac{1}{2}g(\rho)|\psi|^4. \quad (4)$$

把方程 (3) 代入 (4) 式并对空间积分得到体系的有效 Lagrange 函数为

$$\begin{aligned} L &= 2\pi \int_0^\infty d\rho \rho \mathcal{L} \\ &= \dot{\alpha} + \frac{1}{2}(L+1)w^2\dot{\beta} + \frac{2^{-2(L+1)\Gamma(2L+1)}}{\pi\Gamma(L+1)^2w^2} \\ &\quad \times \left[ g_0 + g_{11}F_1\left(2L+1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{8}\gamma^2w^2\right) \right] \\ &\quad + \epsilon_2 F_2\left(\frac{1}{2}, L+1; 1, 1; -k^2w^2\right) \\ &\quad + \frac{L+1}{w^2} + (L+1)w^2\beta^2. \end{aligned} \quad (5)$$

根据参数的 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\sigma}} = 0 (\sigma = w, \alpha, \beta), \quad (6)$$

可以得到

$$\begin{aligned} \dot{w} &= 2w\beta, \\ \dot{\beta} &= -2\beta^2 + \frac{2}{w^4} \\ &\quad + \epsilon k^2 {}_2F_2\left(\frac{3}{2}, L+2; 2, 2; -k^2w^2\right) \\ &\quad + \frac{g_0 2^{-2L-1}\Gamma(2L+1)}{\pi(L+1)w^4\Gamma(L+1)^2} \\ &\quad + \frac{g_1 2^{-2L-3}\Gamma(2L+1)}{\pi(L+1)w^4\Gamma(L+1)^2} \\ &\quad \times \left[ (2L+1)w^2\gamma^2 {}_1F_1\left(2L+2; \frac{3}{2}; -\frac{1}{8}\gamma^2w^2\right) \right. \\ &\quad \left. + 4 {}_1F_1\left(2L+1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{8}\gamma^2w^2\right) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

进而可以得到波包宽度  $w$  随时间的变化方程, 类似于经典物理学中的牛顿方程

$$\begin{aligned} \ddot{w} &= \frac{4}{w^3} + 2\epsilon k^2 w {}_2F_2\left(\frac{3}{2}, L+2; 2, 2; -k^2w^2\right) \\ &\quad + \frac{g_0 4^{-L}\Gamma(2L+1)}{\pi(L+1)w^3\Gamma(L+1)^2} \\ &\quad + \frac{g_1 4^{-L-1}\Gamma(2L+1)}{\pi(L+1)w^3\Gamma(L+1)^2} \\ &\quad \times \left[ (2L+1)w^2\gamma^2 {}_1F_1\left(2L+2; \frac{3}{2}; -\frac{1}{8}\gamma^2w^2\right) \right. \\ &\quad \left. + 4 {}_1F_1\left(2L+1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{8}\gamma^2w^2\right) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

体系的有效作用势能是

$$\begin{aligned}
 U(w) &= - \int \ddot{w} dw = \frac{2}{w^2} + \frac{2\varepsilon}{L+1} \left[ {}_2F_2 \left( \frac{1}{2}, L+1; 1, 1; -k^2 w^2 \right) - 1 \right] + \frac{g_0 2^{-2L-1} \Gamma(2L+1)}{\pi(L+1)w^2 \Gamma(L+1)^2} \\
 &+ \frac{g_1 4^{-L-2}}{\sqrt{\pi(L+1)w^2 \Gamma(L+1)^2 \Gamma(2L+2)}} \\
 &\times \left[ (2L+1)w^2 \gamma^2 \Gamma(2L+1) G_{2,3}^{2,1} \left( \frac{w^2 \gamma^2}{8} \middle| \begin{matrix} -2L-1, 1 \\ 0, 0, -\frac{1}{2} \end{matrix} \right) + 8\Gamma(2L+2) G_{2,3}^{2,1} \left( \frac{w^2 \gamma^2}{8} \middle| \begin{matrix} -2L, 2 \\ 0, 1, \frac{1}{2} \end{matrix} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{9}$$

以上计算过程中, Bessel(),  $\Gamma()$ ,  $F()$  和  $G()$  分别表示特殊函数 Bessel 函数, Gamma 函数, 超流几何函数和 Meijer  $G$  函数.

### 3 稳定性分析

由于  $\ddot{w} = -\partial U/\partial w$  类似于经典物理学中单位质量的质点在势能  $U(w)$  中的运动, 可以根据势能曲线结构判断体系的稳定性. 同样的方法可以用于判断 BEC 体系的稳定性, 根据势场 (9) 是否具有局域最小值来判断 BEC 体系是否具有稳定状态. 本文研究体系的稳定性由线性 Bessel 型光晶格和非线性光晶格共同决定, 即由参数  $\varepsilon, g_0, g_1, k$  和  $\gamma$  决定.

图 1 给出了不同参数组合下, 对于非涡旋孤立子 ( $L=0$ ) 和涡旋孤立子 ( $L=1$ ) 两种情况下有效势能曲线随波包宽度  $w$  的变化. 当势能曲线具有局域最小值时, 表示在该参数组合下, 体系具有稳定的状态; 当势能曲线比较平坦时, 没有势阱的约束, 体系会扩散; 当势能趋于  $-\infty$  时, 体系会塌缩.

图 1(a), (b) 分别表示在  $L=0, \varepsilon=-2$  和  $k=\gamma=1$  的情况下,  $g_1=\pm 1$  时, 势能曲线随  $w$  的变化. 从图 1(a) 可以看出, 给定  $g_1$  的值,  $g_0$  的取值在一定范围内时, 体系才有稳定状态, 例如,  $g_1=1$  时,  $g_0$  的取值满足  $-14 < g_0 < 30$  时, 势能曲线具有局域最小值, 对应的体系具有稳定状态, 可以看出, 原子之间的相互作用在吸引和排斥作用下均能形成稳定的状态. 当吸引作用太强时 ( $g_0 < -14$ ), 有效势能趋于  $-\infty$ , 体系会塌缩; 当原子之间的排斥相互作用太大时 ( $g_0 > 30$ ), 有效势能趋于平坦, 没有局域最小值, 体系会扩散. 图 1(b) 和 (a) 类似, 对应于  $g_1=-1$ , 即调制强度为负值, 可以看出, 稳定情况和图 1(a) 基本一致, 说明在有 Bessel 型光晶

格和原子之间的相互作用  $g_0$  时, 非线性项的空间调制对体系稳定性没有显著的影响. 图 1(d), (e) 表示涡旋孤立子 ( $L=1$ ) 的稳定性随  $g_0$  的变化, 可以看出扩散的临界值和  $L=0$  的情形相同, 但是塌缩的临界值更小, 也就是说, 涡旋孤立子相对于非涡旋孤立子, 有更大的稳定区域, 同样的情形是空间调制对稳定性没有明显的影响.

图 1(c), (f) 分别表示  $L=0$  和  $L=1$  两种情况下, 没有 Bessel 线性光晶格的约束, 只有非线性光晶格时, 体系的稳定性随调制强度  $g_1$  的变化. 图 1(c) 表示非涡旋孤立子 ( $L=0$ ) 的情况, 线性光晶格强度  $\varepsilon=0$ , 其他参数取值是  $g_0=0, \gamma=k=1$ . 可以看出当  $g_1 > 80$  时, 有效势能具有局域最小值, 体系具有稳定状态, 并且随着  $g_1$  的增大, 稳定性增强. 由此表明, 二维非线性光晶格能平衡稳定的物质波孤立子. 这不同于以前文献中的结果, 即有原子之间的 s 波散射相互作用时, 在吸引和排斥相互作用的二维体系中, 不能形成稳定的孤立子. 但是, 从图 1(c), (f) 可以看出, 原子之间的 s 波散射相互作用为 0 时, 体系可以形成稳定的孤立子. 另外, 和  $\varepsilon \neq 0$  的情况比较, 非线性项的空间调制必须足够大, 才能维持稳定的孤立子. 图 1(f) 表示涡旋孤立子的稳定性, 结论和  $L=0$  的情况相似.

为了验证变分法结果的正确性, 我们选择了图 1(a) 和图 1(c) 两种情况进行数值模拟, 利用有限差分法求解方程 (1) 的数值解, 空间步长和时间步长分别为 0.01 和 0.0001, 空间格子数是 2000. 稳定解所满足的条件为  $\dot{w}=0$ , 因此利用方程 (8) 可以求出稳定波包的宽度, 然后代入试探波函数 (3) 式, 即可求出定态解, 作为数值计算的初始条件, 检验其随时间的传播情况进而判断体系的稳定性. 对

于图 1(a) 的情况, 取  $g_0 = -14, -5, 30$  三种情况进行验证, 根据以上分析可知,  $g_0 = -14, 30$  分别对应体系的塌缩和扩散情形, 只有  $g_0 = -5$  给出稳定的定态解. 根据  $\ddot{w} = 0$  可以求出稳定解对应的波包宽度是  $w_0 = 1.14269$ , 根据试探波函数 (3) 式可以给出初始时刻波函数是

$$\begin{aligned} \psi(\rho, t = 0) &= (w_0^{-L-1} \rho^L / \sqrt{\pi \Gamma(L+1)}) \exp(-\rho^2 / (2w_0^2)) \\ &= 0.493739 \exp(-0.382925 \rho^2). \end{aligned}$$

图 2 给出了不同参数组合下初始波包随时间演化的三维投影图和  $t = 0, 50, 100$  时刻波函数  $|\psi|$  图形. 图 2(a), (b) 对应图 1(a)  $g_0 = -14$  的情形,

表示原子之间有较强的吸引作用, 随着时间的推移, 体系塌缩. 图 2(c), (d) 对应图 1(a)  $g_0 = -5$  的情形, 势能曲线具有局域最小值, 可以看出波包随时间的传播是稳定的. 图 2(e), (f) 对应图 1(a)  $g_0 = 30$  的情形, 原子之间有较强的排斥作用, 随着时间的推移, 波包扩散到整个空间区域, 形成不稳定的结果. 图 2(e), (f) 对应图 1(c)  $g_1 = 400$  的情形, 初始波包宽度和波函数分别为  $w_0 = 3.61161$  和  $\psi(\rho, t = 0) = 0.156216 \exp(-0.0383327 \rho^2)$ , 可以看出, 随着时间推移, 初始的高斯型试探波函数演化为稳定的环状非涡旋孤立子解. 结合图 1 和图 2 可以看出变分法分析给出的结果和数值模拟结果一致.

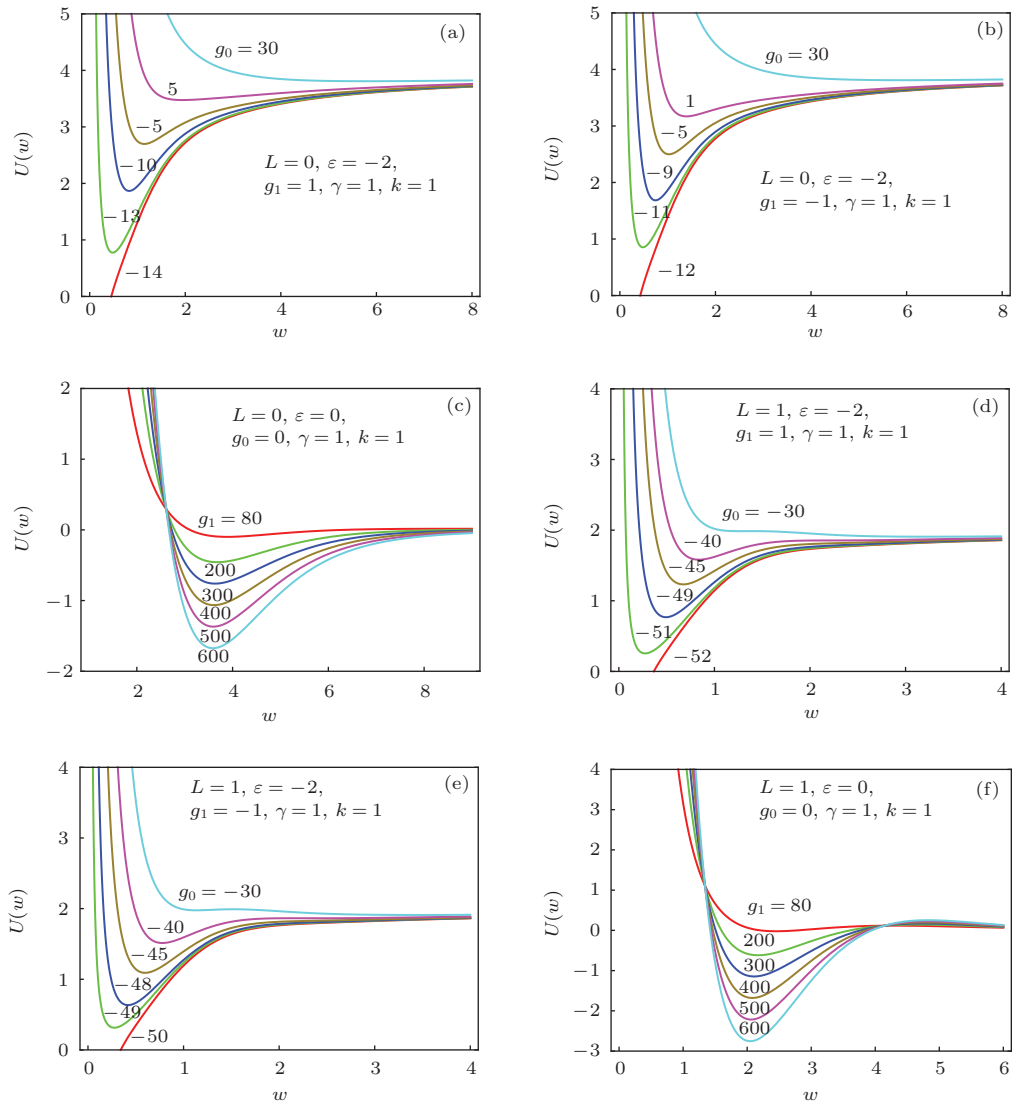


图 1 (网刊彩色) 不同参数组合下有效势能结构随  $w$  的变化

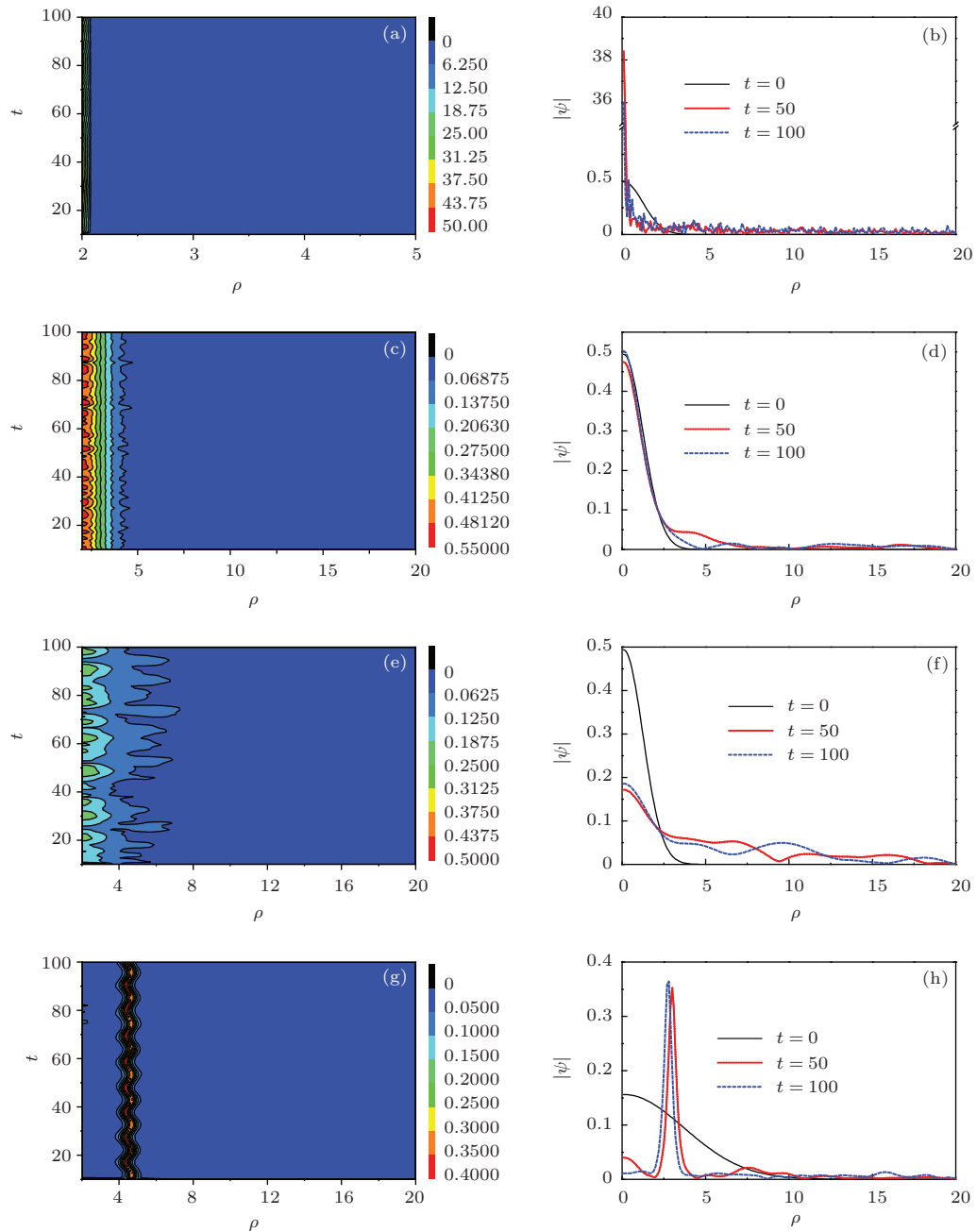


图2 (网刊彩色) 不同参数组合下波包随时间演化的三维投影图和  $t = 0, 50, 100$  时刻波函数  $|\psi|$  图形

## 4 结 论

利用变分法和数值计算方法研究了准二维圆对称BEC体系中涡旋和非涡旋孤立子的稳定性, 体系的稳定性由Bessel型光晶格和非线性光晶格共同决定, 根据有效势能是否具有局域最小值来判断体系是否具有稳定状态. 结果表明, 当有线性Bessel型光晶格约束时, 在调制强度为正负的情况下, 均能形成稳定的涡旋和非涡旋孤立子, 但是空间调制强度对稳定性的影响不是很显著. 当Bessel

型光晶格强度为0时, 即只有非线性光晶格时, 也能形成稳定的物质波孤立子. 另外, 我们给出了波包随时间的传播情况, 可以看出, 变分法所给出的结果和变分法分析的结果一致. 本文所用到的研究方法可以推广到其他类似的系统, 比如考虑三体相互作用下Bessel型光晶格中物质波孤立子的稳定性.

## 参考文献

- [1] Morsh O, Oberthaler M 2006 *Rev. Mod. Phys.* **78** 179



- [2] Brazhnyi V A, Konotop V V 2004 *Mod. Phys. Lett. B* **18** 627
- [3] Yang H S, Xu Z J, Cheng C, Wu Q, Xiong H W 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2835 (in Chinese) [杨欢, 徐志君, 程成, 武强, 熊宏伟 2004 物理学报 **53** 2835]
- [4] Xi Y D, Wang D L, She Y C, Wang F J, Ding J W 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3720 (in Chinese) [奚玉东, 王登龙, 余彦超, 王凤姣, 丁建文 2010 物理学报 **59** 3720]
- [5] Vogels J M, Freeland R S, Tsai C C, Verhaar B J, Heinzen D J 2000 *Phys. Rev. A* **61** 043407
- [6] Modugno G, Modugno M, Riboli F, Roati G, Inguscio M 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 190404
- [7] da Luz H L F, Abdullaev F K, Gammal A, Sarlermo M, Tomio L 2010 *Phys. Rev. A* **82** 043618
- [8] Ji S T, Yan P G, Liu X S 2014 *Chin. Phys. B* **23** 030311
- [9] Li Z J, Hai W H, Deng Y 2013 *Chin. Phys. B* **22** 090505
- [10] Wang X M, Li Q Y, Li Z D 2013 *Chin. Phys. B* **22** 050311
- [11] Baizakov B B, Malomed B A, Salerno M 2006 *Phys. Rev. E* **74** 066615
- [12] Baizakov B B, Malomed B A, Salerno M 2003 *Europhys. Lett.* **63** 642
- [13] Trombettoni A, Smerzi A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2353
- [14] Abdullaev F K H, Baizakov B B, Darmanyan S A, Konotop V V, Salerno M 2001 *Phys. Rev. A* **64** 043606
- [15] Sakaguchi H, Malomed B A 2005 *Phys. Rev. E* **72** 046610
- [16] Abdullaev F K H, Garnier J 2005 *Phys. Rev. A* **72** 061605
- [17] Abdullaev F, Abdumalikov A, Galimzyanov R 2007 *Phys. Lett. A* **367** 149
- [18] Chen H J, Li X F 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 070302 (in Chinese) [陈海军, 李向富 2013 物理学报 **62** 070302]
- [19] Dong L W, Wang J D, Wang H, Yin G Y 2009 *Phys. Rev. A* **79** 013807
- [20] Kartashov Y V, Dholakia K, Egorov A E, Vysloukh V A, Torner L 2009 *Phys. Rev. E* **70** 065602
- [21] Kartashov Y V, Vysloukh V A, Torner L 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 093904
- [22] Kartashov Y V, Vysloukh V A, Torner L 2009 *Phys. Rev. E* **71** 036621
- [23] Adhikaria S K 2004 *Phys. Rev. E* **65** 016703
- [24] Adhikaria S K 2004 *Phys. Rev. A* **69** 3613-1

# Stabilization of matter-wave solitons in Bessel optical lattice by spatial modulation of the nonlinearity

Chen Hai-Jun<sup>†</sup> Zhang Yao-Wen

(Electrical Engineering College, Longdong University, Qingyang 745000, China)

( Received 24 April 2014; revised manuscript received 20 June 2014 )

## Abstract

Using variational and numerical solutions of the mean field Gross-Pitaevskii equation, we investigate the stabilities of nonrotating and vortex solitons in Bessel optical lattice by spatial modulation of the nonlinearity (nonlinear optical lattice). It is demonstrated that there exist the stable matter-wave solitons in a combination of optical lattices with linear Bessel optical lattices and nonlinear optical lattice. Using the time-dependent variational approach, we derive the ordinary differential equations for the time evolutions of the width and phase of solitons. Through an effective potential, we obtain the stable criteria for all kinds of combinations of the system parameters. We perform direct numerical simulations to support our analytical results, and find that they are in good agreement.

**Keywords:** Bessel optical lattice, nonlinear optical lattices, solitons, stability

**PACS:** 03.75.Lm, 03.75.Hh, 03.75.Nt

**DOI:** 10.7498/aps.63.220303

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: ldxychj@163.com