

## 利用非稳定子态容错实现密集旋转操作\*

吴向艳 徐艳玲 於亚飞† 张智明

(华南师范大学, 广东省微纳光子功能材料与器件重点实验室信息光电子科技学院, 广东省量子调控工程与材料重点实验室, 广州 510006)

(2014年6月23日收到; 2014年9月8日收到修改稿)

Non-Clifford 操作不能在量子纠错码上自然横向实现, 但可通过辅助量子态和在量子纠错码上能横向实现的 Clifford 操作来容错实现, 从而取得容错量子计算的通用性. 非平庸的单量子比特操作是 Non-Clifford 操作, 可以分解为绕  $z$  轴和绕  $x$  轴非平庸旋转操作的组合. 本文首先介绍了利用非稳定子态容错实现绕  $z$  轴和绕  $x$  轴旋转的操作, 进而设计线路利用魔幻态容错制备非稳定子态集, 最后讨论了运用制备的非稳定子态集模拟任意非平庸单量子比特操作的问题. 与之前工作相比, 制备非稳定子态的线路得到简化, 成功概率提高, 且在高精度模拟任意单量子比特操作时所消耗的非稳定子态数目减少了 50%.

**关键词:** 容错量子计算, 非稳定子态, 魔幻态, Clifford 操作

**PACS:** 03.67.-a, 03.67.Pp, 03.67.Ac

**DOI:** 10.7498/aps.63.220304

## 1 引言

量子信息是一门新兴的交叉学科, 建造可靠的大规模量子计算机是其终极目标, 可扩展性与如何容错是实现量子计算机的两个关键技术<sup>[1-5]</sup>. 针对容错、抗退相干、保护目标数据的准确存储及正确的编码、运行等问题, 研究者们提出了各种解决方案, 主要有无消相干子空间(DFS)<sup>[6,7]</sup>、拓扑量子计算<sup>[8]</sup>以及基于量子纠错码的容错量子计算<sup>[9-19]</sup>等.

容错量子计算在量子纠错码的基础上通过级联的方式实现量子逻辑门, 以至于当物理操作的出错率低于容错阈值时, 量子逻辑门的错误率急剧降低, 从而实现可靠的量子计算. 量子纠错码与级联结合实现容错量子计算要求横向实现量子逻辑门, 使得错误的位数和传播控制在量子纠错码的纠错范围内. 量子纠错码上可以横向实现的量子逻辑门基本来自于 Clifford 群. Clifford 群指把 Pauli 群共

轭映射到 Pauli 群的操作形成的群, 包括 Hadamard 门  $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ , 相位门  $K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ , 和受控非门  $CX_2^1 = |0\rangle_1\langle 0| \otimes I_2 + |1\rangle_1\langle 1| \otimes X_2$  等. 在量子纠错码上实现通用量子计算需要增加 Non-Clifford 量子逻辑操作<sup>[12]</sup>, 而 Non-Clifford 操作不能在量子纠错码上自然横向实现, 不过可通过辅助量子态和量子纠错码上能横向实现的 Clifford 操作容错实现<sup>[13-18]</sup>. 辅助量子态的制备由于涉及不可容错的 Non-Clifford 操作而产生噪音, 如果一个辅助量子态的制备噪音能够被 Clifford 操作消除, 那么这个辅助量子态被称作魔幻态(magic state)<sup>[17-29]</sup>. 目前发现的魔幻态有 H 型和 T 型, 考虑在 Bloch 球上以三个 Pauli 算子的 6 个本征态为顶点的正八面体, H 和 T 型魔幻态分别指从八面体的棱中点和面心穿出的态矢量, 本文选取  $|T_0\rangle = \cos\beta|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{4}}\sin\beta|1\rangle$  (其中  $\beta$  满足  $\cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ) 和  $|H_0\rangle = \cos\frac{\pi}{8}|0\rangle + \sin\frac{\pi}{8}|1\rangle$

\* 国家自然科学基金(批准号: 61378012, 60978009)、高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 20124407110009)、国家重点基础研究发展计划(批准号: 2011CBA00200, 2013CB921804)和国家教育部留学回国人员科研启动基金资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: yfyuks@hotmail.com

(Hadamard 门  $H$  的本征态) 为代表进行研究. 以  $|H_0\rangle$  和  $|T_0\rangle$  为辅助态可以横向实现绕  $z$  轴旋转  $-\frac{\pi}{4}$  和  $-\frac{\pi}{6}$  的非平庸旋转操作<sup>[17]</sup>, 此旋转操作处于 Clifford 群外, 可用于辅助 Clifford 群操作实现通用量子计算.

本文基于文献<sup>[17]</sup>的思想, 研究了借助魔幻态和 Clifford 操作在量子纠错码上容错实现 Non-Clifford 操作的问题, 与当前较好的研究方案<sup>[25]</sup>相比, 给出了更稠密的 Non-Clifford 门的实现手段. 本文在第 2 节介绍了需要以非稳定子态为辅助态的容错实现绕  $z$  轴和绕  $x$  轴非平庸旋转操作的量子线路; 进而在第 3 节由魔幻态  $|H_0\rangle$  出发制备非稳定子态集, 并实现了非稳定子态角度的调控; 在第 4 节计算了利用非稳定子态集模拟任意么正操作所需消耗的非稳定子态数目; 第 5 节简述本文结论.

## 2 Non-Clifford 旋转操作的量子线路设计

非平庸单量子比特么正操作是 Non-Clifford 操作, 其可以分解为绕  $z$  轴和绕  $x$  轴非平庸旋转操作

的组合<sup>[19]</sup>, 如

$$U = e^{i\alpha} R_z(\beta) R_x(\gamma) R_z(\delta), \quad (1)$$

其中  $R_x(\theta), R_z(\theta)$  分别为绕  $x$  轴和绕  $z$  轴的旋转算子, 具有如下形式:

$$R_x(\theta) = e^{-i\theta X/2} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix},$$

$$R_z(\theta) = e^{-i\theta Z/2} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

当  $\theta \neq n\pi$  时,  $R_x(\theta), R_z(\theta)$  为 Non-Clifford 操作, 不具备横向性. 找到  $R_x(\theta)$  和  $R_z(\theta)$  的横向实施方法, 就可以模拟任意么正操作.

### 2.1 容错实现旋转操作 $R_z(\theta)$

如图 1 所示, 输入携带辅助态  $|\psi_i\rangle = \cos \theta_i |0\rangle + \sin \theta_i |1\rangle$  的量子比特 1 和携带数据态  $|\phi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$  的量子比特 2, 经过相应操作后量子态的演化过程为

$$|\psi_i\rangle|\phi\rangle = a \cos \theta_i |00\rangle + a \sin \theta_i |01\rangle + b \cos \theta_i |10\rangle + b \sin \theta_i |11\rangle$$

$$\xrightarrow{K \otimes I, H \otimes I, CX_1^2} \frac{\cos \theta_i}{\sqrt{2}} (a|00\rangle + b|01\rangle + a|10\rangle + b|11\rangle) + i \frac{\sin \theta_i}{\sqrt{2}} (a|00\rangle - b|01\rangle - a|10\rangle + b|11\rangle)$$

$$\xrightarrow{Z \text{ 基测量}} \begin{cases} \xrightarrow{M_z=0} a|0\rangle + b e^{-i2\theta_i} |1\rangle = R_z(-2\theta_i)|\phi\rangle \\ \xrightarrow{M_z=1} a|0\rangle + b e^{i2\theta_i} |1\rangle = R_z(2\theta_i)|\phi\rangle \end{cases}. \quad (3)$$

该线路的结果是对任意数据态  $|\phi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$  实现了绕  $z$  轴旋转  $\pm 2\theta_i$  的操作. 其中  $I, X, Z$  分别为单位算符、Pauli  $X, Z$  算符;  $M_z = 0, 1$  分别表示在 Pauli  $Z$  算符的本征基  $|0\rangle$  和  $|1\rangle$  下的测量; 此外线路中涉及的相位门  $K$ , Hadamard 门  $H$ , 受控非门  $CX_1^2$  都属于 Clifford 群操作, 对大多数量子纠错码可以横向实现. 因此该线路完成的操作可以容错实现, 前提是需要  $|\psi_i\rangle = \cos \theta_i |0\rangle + \sin \theta_i |1\rangle$  作为辅助态.

### 2.2 容错实现旋转操作 $R_x(\theta)$

如图 2 所示, 与图 1 输入相同, 携带辅助态  $|\psi_i\rangle = \cos \theta_i |0\rangle + \sin \theta_i |1\rangle$  的量子比特 1 和携带数据态  $|\phi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$  的量子比特 2 通过图 2 所示操作, 量子态的演化为

$$|\psi_i\rangle|\phi\rangle = a \cos \theta_i |00\rangle + a \sin \theta_i |01\rangle + b \cos \theta_i |10\rangle + b \sin \theta_i |11\rangle$$

$$\xrightarrow{K \otimes I, Z \otimes I, CX_1^2} a \cos \theta_i |00\rangle + b \cos \theta_i |11\rangle - ia \sin \theta_i |10\rangle - ib \sin \theta_i |11\rangle$$

$$\xrightarrow{X \text{ 基测量}} \begin{cases} \xrightarrow{“+”} (a \cos \theta_i - ib \sin \theta_i) |0\rangle + (-ia \sin \theta_i + b \cos \theta_i) |1\rangle = R_x(2\theta_i)|\phi\rangle \\ \xrightarrow{“-”, Z} (a \cos \theta_i - ib \sin \theta_i) |0\rangle - (-ia \sin \theta_i + b \cos \theta_i) |1\rangle = R_x(-2\theta_i)|\phi\rangle \end{cases}. \quad (4)$$

即在量子态  $|\psi_i\rangle = \cos \theta_i|0\rangle + \sin \theta_i|1\rangle$  的辅助下该线路可实现绕  $x$  轴旋转  $\pm 2\theta_i$  的操作. 其中“+”, “-”分别表示在 Pauli  $X$  算符的本征基  $\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$ ,  $\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$  下的测量, 此外线路中涉及的  $K, Z$  以及  $CX_1^2$  均为 Clifford 群中的操作, 对大多数量子纠错码可以横向实现, 因此该线路完成的操作可以容错实现, 前提需要  $|\psi_i\rangle = \cos \theta_i|0\rangle + \sin \theta_i|1\rangle$  作为辅助态.

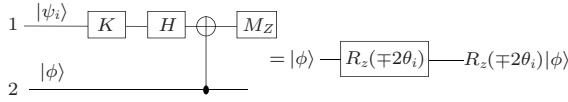


图1 对任意态  $|\phi\rangle$  容错实现绕  $z$  轴旋转  $\pm 2\theta_i$  的线路  $K, H, M_z$  分别为相位门, Hadamard 门及  $Z$  基下的测量

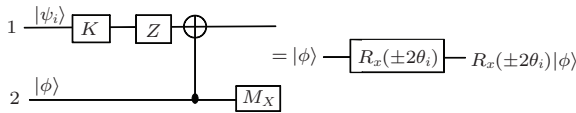


图2 对任意态  $|\phi\rangle$  容错实现绕  $x$  轴旋转  $\pm 2\theta_i$  的线路  $K, Z, M_x$  分别为相位门, Pauli  $Z$  门及  $X$  基下的测量

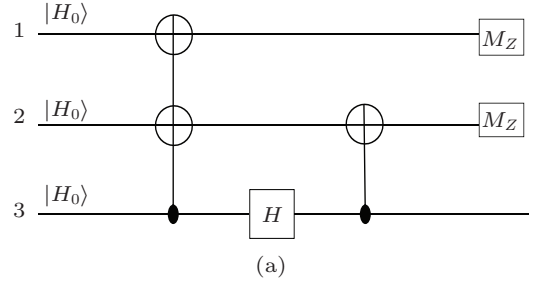
### 3 制备非稳定子态的量子线路

上面我们设计了容错实现非平庸旋转算子  $R_z(2\theta_i)$  和  $R_x(2\theta_i)$  的有效线路, 其中均用到非稳定子态  $|\psi_i\rangle = \cos \theta_i|0\rangle + \sin \theta_i|1\rangle$ , 下面构建制备该非稳定子态的量子线路.

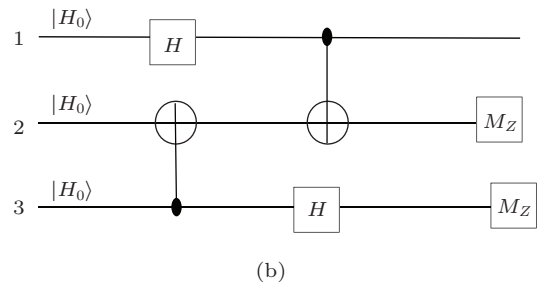
#### 3.1 基于魔幻态 $|H_0\rangle$ 制备非稳定子态

如图 3 所示, 三个量子线路均以魔幻态  $|H_0\rangle$  为输入, 通过相应 Clifford 群中的操作和  $Z$  基测量, 选取特定的测量结果, 可输出不同的非稳定子态. 其中图 3(a) 在  $Z$  基下测量第 1, 2 量子比特, 以  $p_1 = 0.375$  的概率得到测量结果 00, 第 3 量子比特相应输出态为  $|\psi_d\rangle = \cos d|0\rangle + \sin d|1\rangle$ , 其中  $d \approx \frac{0.446}{2}$  (以  $|\psi_d\rangle$  为辅助态可对任意态实现  $2d_0$  弧度的旋转); 图 3(b) 在  $Z$  基下测量第 2, 3 量子比特, 以  $p_2 = 0.463$  的概率得到 00, 第 1 量子比特输出量子态  $|\psi_f\rangle = \cos f|0\rangle + \sin f|1\rangle$ , 其中  $f \approx \frac{0.570}{2}$ ; 图 3(c) 在  $Z$  基下测量 1, 2, 3 量子比特, 以  $p_3 \approx 0.344$  的概率得到测量结果 000, 第 4 量子比特输出  $|\psi_h\rangle = \cos h|0\rangle + \sin h|1\rangle$ , 其中  $h \approx \frac{0.690}{2}$ . 于是, 我们制备了一组具有相同形式的非稳定子

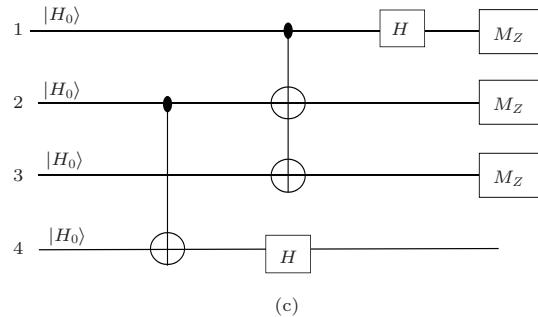
态  $\cos \theta_i|0\rangle + \sin \theta_i|1\rangle$  ( $\theta_i$  可取  $d, f, h$ ). 与之前工作<sup>[25]</sup>相比, 图 3(a), (b) 的成功概率由原来的 0.320, 0.232 分别提高到 0.375 和 0.463; 三个量子线路消耗的 Clifford 门的深度 (depth) 由原来的 7, 7, 5 减小为 3, 2, 3. 此外, 图 3 量子线路中涉及的操作均为 Clifford 群中的操作及 Pauli 基下的测量, 可以在量子纠错码上容错实现.



(a)



(b)



(c)

图3 制备非稳定子态  $|\psi_d\rangle, |\psi_f\rangle, |\psi_h\rangle$  的量子线路 (a)  $|\psi_d\rangle = \cos d|0\rangle + \sin d|1\rangle$ ; (b)  $|\psi_f\rangle = \cos f|0\rangle + \sin f|1\rangle$ ; (c)  $|\psi_h\rangle = \cos h|0\rangle + \sin h|1\rangle$

#### 3.2 非稳定子态的角度调控

如图 4 所示的量子线路, 量子比特 1 和 2 携带非稳定子态  $|\psi_i\rangle = \cos \theta_i|0\rangle + \sin \theta_i|1\rangle$  和  $|\psi_j\rangle = \cos \theta_j|0\rangle + \sin \theta_j|1\rangle$ , 通过反向受控非及  $Z$  基测量量子比特 1, 对于测量结果  $M_Z = 0$  和 1, 量子比特 2 可分别得到量子态:

$$\frac{\cos \theta_i \cos \theta_j |0\rangle + \sin \theta_i \sin \theta_j |1\rangle}{\sqrt{(\cos \theta_i \cos \theta_j)^2 + (\sin \theta_i \sin \theta_j)^2}} \quad (M_Z = 0), \quad (5a)$$

$$\frac{\sin \theta_i \cos \theta_j |0\rangle + \cos \theta_i \sin \theta_j |1\rangle}{\sqrt{(\sin \theta_i \cos \theta_j)^2 + (\cos \theta_i \sin \theta_j)^2}} \quad (M_Z = 1). \quad (5b)$$

引入  $\theta'$  和  $\theta''$ , 使得  $\tan \theta' = \tan \theta_i \tan \theta_j$ ,  $\tan \theta'' = \cot \theta_i \tan \theta_j$ , 则 (5a) 和 (5b) 式可分别简化为

$$\begin{aligned} \cos \theta' |0\rangle + \sin \theta' |1\rangle (M_Z = 0), \\ \cos \theta'' |0\rangle + \sin \theta'' |1\rangle (M_Z = 1), \end{aligned} \quad (6)$$

该量子线路分别以  $p_0 = (\cos \theta_i \cos \theta_j)^2 + (\sin \theta_i \sin \theta_j)^2$  和  $p_1 = 1 - p_0$  的概率制备出非稳定子态  $\cos \theta' |0\rangle + \sin \theta' |1\rangle$  和  $\cos \theta'' |0\rangle + \sin \theta'' |1\rangle$ .

$$j = 4n + 1 \text{ 时 } \begin{cases} (n \text{ 为奇}) |T_j\rangle = \cos \theta_j |0\rangle - i \sin \theta_j |1\rangle \xrightarrow{K} \cos \theta_j |0\rangle + \sin \theta_j |1\rangle \\ (n \text{ 为偶}) |T_j\rangle = \cos \theta_j |0\rangle + i \sin \theta_j |1\rangle \xrightarrow{K, Z} \cos \theta_j |0\rangle + \sin \theta_j |1\rangle \end{cases}, \quad (7a)$$

$$j = 4n + 3 \text{ 时 } \begin{cases} (n \text{ 为奇}) |T_j\rangle = \cos \theta_j |0\rangle + \sin \theta_j |1\rangle \\ (n \text{ 为偶}) |T_j\rangle = \cos \theta_j |0\rangle - \sin \theta_j |1\rangle \xrightarrow{Z} \cos \theta_j |0\rangle + \sin \theta_j |1\rangle \end{cases}, \quad (7b)$$

当  $j = 4n$  或  $4n + 2$  时, 不能得到非稳定子态, 可重新作为输入态再次操作.

一系列计算结果使能够离线容错制备的非稳定子态达到大约 3000 个不同的角度 ( $i, j$  分别取 1—10 时), 基于制备的非稳定子态使能够容错实现的 Non-Clifford 操作数目增多, 相比之前工作 [24,25], 形成的辅助态集有较大的扩充.

上面我们设计了不同的量子线路获得非稳定子态, 并基于非稳定子态实现具体不同角度的调控, 得到密集的非稳定子态集, 以这些非稳定子态作辅助态, 可在量子纠错码上容错实现的 Non-Clifford 操作更稠密.

#### 4 利用非稳定子态模拟任意么正操作

在通用容错量子计算中获取理想的非稳定子态需要消耗 90% 的量子比特资源 [30,31], 由此模拟一个任意么正操作的复杂度, 主要考虑 Non-Clifford 操作或者是非稳定子态的消耗.

如 (1) 式所示, 任意么正操作可分解为三个旋转算符的组合, 因此对任意么正操作的模拟可简化

参照  $|H_0\rangle$  和  $|T_0\rangle$  的定义, 设

$$\begin{aligned} |H_j\rangle &= \cos \theta_j |0\rangle + \sin \theta_j |1\rangle, \tan \theta_j = \tan^{j+1} \frac{\pi}{8}; \\ |T_j\rangle &= \cos \theta_j |0\rangle + e^{i\frac{\pi}{4}(j+1)} \sin \theta_j |1\rangle, \\ \tan \theta_j &= \tan^{j+1} \theta_0, \tan^2 \theta_0 = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}. \end{aligned}$$

表 1 列举了量子比特 1 和 2 携带初始信息根据不同的测量结果分别得到的非稳定子态, 以及利用该输出可以横向实现的具体旋转角度.  $\times$  号表示输出不是非稳定子态, 可抛掉. 在表 1 中, 当量子比特 1 和 2 均携带 T 型魔幻态输入时, 得到一系列输出  $|T_j\rangle$ , 针对  $|T_j\rangle$ , 需要再施加具体操作将其转化为非稳定子态  $\cos \theta_j |0\rangle + \sin \theta_j |1\rangle$ :

为任意单比特旋转的模拟. 下文具体介绍如何用前文制备的非稳定子态集容错实现任意单比特旋转的操作.

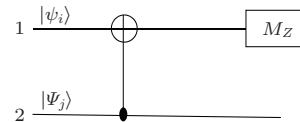


图 4 实现非稳定子态角度调控的线路 对输入  $|\psi_i\rangle$  和  $|\psi_j\rangle$  执行受控非操作, 然后进行 Z 基测量, 可得到不同角度的非稳定子态

设目标操作为: 对数据态  $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$  实现达到精度  $\epsilon$  的任意角度  $\phi$  的旋转.

实际操作过程如下:

1) 在所制备的非稳定子态中搜索 [32,33]  $|\theta_n\rangle = \cos \theta_n |0\rangle + \sin \theta_n |1\rangle$ , 使  $2\theta_n$  接近  $\phi$ ;

2) 运用图 1 或图 2 的线路对数据态  $|\psi\rangle$  实现旋转  $2\theta_n$ , 记为消耗了一次非稳定子态;

3) 搜索  $|\theta_m\rangle$ , 使  $2\theta_m$  接近  $\phi - 2\theta_n$ , 旋转  $2\theta_m$ , 记为第二次消耗, 重复此操作, 最后实现旋转角度之和与  $\phi$  之差小于  $\epsilon$ , 记录总共消耗的非稳定子态数目  $C_{\text{non}}$ .

表1 量子比特1和2携带不同非稳定子态的输入得到不同角度非稳定子态的输出以及可用于容错实现的旋转角度

量子比特1和2的初态	Z基测量输出	输出态的具体形式	实现 $R_z(\theta)$ 或 $R_x(\theta)$ 的具体旋转角度 $2\theta_n$
$ H_0\rangle,  H_0\rangle$	$m = 0,  H_1\rangle$	$\cos \theta_n  0\rangle + \sin \theta_n  1\rangle$	$2\arctan\left(\tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$
	$m = 1, \times$	$\times$	$\times$
$ H_i\rangle,  H_j\rangle$	$m = 0,  H_{j+i+1}\rangle$	$\cos \theta_{j+i+1}  0\rangle + \sin \theta_{j+i+1}  1\rangle$	$2\arctan\left(\tan^{i+j+2}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$
	$m = 1,  H_{j-i-1}\rangle$	$\cos \theta_{j-i-1}  0\rangle + \sin \theta_{j-i-1}  1\rangle$	$2\arctan\left(\tan^{j-i}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$
$ T_0\rangle,  T_0\rangle$	$m = 0,  T_1\rangle$	$\cos \theta_1  0\rangle + i \sin \theta_1  1\rangle$	$2\arctan\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$
	$m = 1, \times$	$\times$	$\times$
$ T_i\rangle,  T_j\rangle$	$m = 0,  T_{j+i+1}\rangle$	$\cos \theta_{j+i+1}  0\rangle + e^{i\frac{\pi}{4}(j+i+2)} \sin \theta_{j+i+1}  1\rangle$	分析见(7)式
	$m = 1,  T_{j-i-1}\rangle$	$\cos \theta_{j-i-1}  0\rangle + e^{i\frac{\pi}{4}(j-i)} \sin \theta_{j-i-1}  1\rangle$	
$ d_0\rangle,  d_0\rangle$	$m = 0,  d_1\rangle$	$\cos \theta_1  0\rangle + \sin \theta_1  1\rangle$	$2\arctan\left(\tan^2\left(\frac{0.446}{2}\right)\right)$
	$m = 1, \times$	$\times$	$\times$
$ d_i\rangle,  d_j\rangle$	$m = 0,  d_{j+i+1}\rangle$	$\cos \theta_{j+i+1}  0\rangle + \sin \theta_{j+i+1}  1\rangle$	$2\arctan\left(\tan^{j+i+2}\left(\frac{0.446}{2}\right)\right)$
	$m = 1,  d_{j-i-1}\rangle$	$\cos \theta_{j-i-1}  0\rangle + \sin \theta_{j-i-1}  1\rangle$	$2\arctan\left(\tan^{j-i}\left(\frac{0.446}{2}\right)\right)$
$ H_i\rangle,  d_j\rangle$	$m = 0,  t_{j+i}\rangle$	$\cos \theta_{j+i}  0\rangle + \sin \theta_{j-i}  1\rangle$	$2\arctan\left(\tan^{i+1}\left(\frac{\pi}{8}\right)g \tan^{j+1}\left(\frac{0.446}{2}\right)\right)$
	$m = 1,  t_{j-i}\rangle$	$\cos \theta_{j-i}  0\rangle + \sin \theta_{j-i}  1\rangle$	$2\arctan\left(\frac{\tan^{j+1}\left(\frac{0.446}{2}\right)}{\tan^{i+1}\left(\frac{\pi}{8}\right)}\right)$
...	...	...	...

使用该方案实现绕z轴或x轴旋转 $\pi/16, \pi/128, \pi/1024$ 角度, 达到确定精度 $\varepsilon$ 时所需消耗非稳定子态的数目 $C_{\text{non}}$ 如表2所示, 与之前相关研究[18,34]中的 $C_{\text{on}}$ 和 $C_{\text{sk}}$ 相比, 发现在高精度阶段, 本文所述方案优势明显, 特别是在 $\varepsilon = 10^{-12}$ 时, 比文献[18, 34]中较好的文献[18]方案的消耗降低了约50%.

图5对比了用本文方案、文献[18, 34]的方案模拟旋转 $\pi/16$ 角度到 $\varepsilon$ 精度所需消耗的非稳定子态的数目. 横轴表示目标精度在 $10^{-12} \leq \varepsilon \leq 10^{-4}$ 之间, 纵轴表示消耗的非稳定子态数目. 可以发现文献[18]和本文的方案与文献[34]方案相比, 优势明显, 消耗非稳定子态的数目有4个量级的减少. 而本文方案与文献[18]相比, 也有明显的降低(如小

图所示), 在精度 $10^{-10} \leq \varepsilon \leq 10^{-4}$ 范围内, 其消耗控制在10的范围内.

表2 模拟实现具体旋转到确定精度所消耗非稳定子态数目; 其中 $C_{\text{non}}$ 为本文所述方案的消耗,  $C_{\text{on}}$ 和 $C_{\text{sk}}$ 分别为文献[18]和[34]中方案模拟所需消耗

$\theta$	消耗	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-8}$	$\varepsilon = 10^{-12}$
$\pi/16$	$C_{\text{non}}$	4	6	10
	$C_{\text{on}}$	5.88	12.48	19.38
	$C_{\text{sk}}$	43.83	2646	29120
$\pi/128$	$C_{\text{non}}$	4	8	8
	$C_{\text{on}}$	3.32	9.27	16.91
	$C_{\text{sk}}$	53.84	2870	29530
$\pi/1024$	$C_{\text{non}}$	4	6	10
	$C_{\text{on}}$	3	8.37	15.23
	$C_{\text{sk}}$	128.1	2594	15075



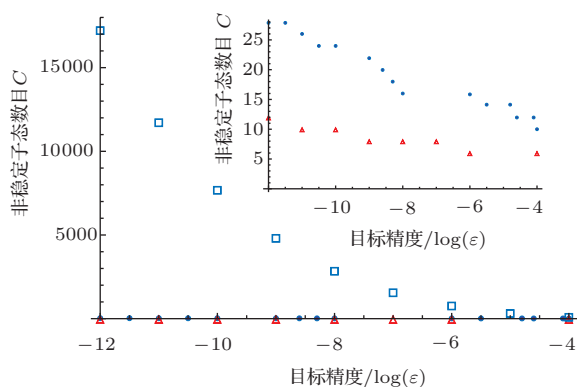


图5 (网刊彩色) 目标精度和消耗的非稳定子态数目 其中  $\Delta$ 、 $\bullet$  及  $\square$  分别表示用本文、文献 [18] 及 [34] 中方案模拟  $\pi/16$  旋转到确定精度所需消耗的非稳定子态数目, 实线为数值拟合

## 5 结 论

本文对量子纠错码上的 Non-Clifford 操作的容错实现进行了研究, 具体方案为: 为实现任意么正操作的模拟, 首先构建了容错实现  $R_z(\theta)$  和  $R_x(\theta)$  的量子线路, 该线路要求非稳定子态  $\cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1\rangle$  为辅助态, 进而利用魔幻态制备了该非稳定子态集, 并实现非稳定子态角度的调控, 最后分析了模拟任意旋转操作所需消耗的非稳定子态数目. 与之前的工作相比, 本方案具有如下优点: 1) 制备非稳定子态的量子线路得到简化, 步数减小, 且成功概率提高; 2) 使可以容错实现的 Non-Clifford 操作更稠密 (达到大约 3000 的扩充); 3) 模拟任意旋转所需消耗的非稳定子态数目减少到 10 的量级.

## 参考文献

[1] Sun J, Lu S F, Liu F, Yang L P 2012 *Chin. Phys. B* **21** 010306  
 [2] Chen W, Xue Z Y, Wang Z D, Shen R 2014 *Chin. Phys. B* **23** 030309  
 [3] Li T, Bao W S, Lin W Q, Zhang H, Fu X Q 2014 *Chin. Phys. Lett.* **31** 050301  
 [4] Li H Y, Wu C W, Chen Y B, Lin Y G, Chen P X, Li C Z 2013 *Chin. Phys. B* **22** 110305  
 [5] Wang X X, Zhang J Q, Yu Y F, Zhang Z M 2011 *Chin. Phys. B* **20** 110306

[6] Bacon D, Kempe J, Lidar D A, Whaley K B 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 1758  
 [7] Zhang Q, Zhang E Y, Tang C J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1675 (in Chinese) [张权, 张尔扬, 唐朝京 2002 物理学报 **51** 1675]  
 [8] Raussendorf R, Harrington J, Goyal K 2007 *New J. Phys.* **9** 199  
 [9] Gottesman D 1997 *Ph. D. Dissertation* (California: Caltech)  
 [10] Li Z, Xing L J 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 130306 (in Chinese) [李卓, 刑莉娟 2013 物理学报 **62** 130306]  
 [11] Xiao F Y, Chen H W 2010 *Acta Phys. Sin.* **60** 080303 (in Chinese) [肖芳英, 陈汉武 2010 物理学报 **60** 080303]  
 [12] Nielsen M A, Chuang I L 2000 *Quantum Computation and Quantum Information* (Vol.1) (Cambridge, England: Cambridge University Press) p179  
 [13] Eastin B 2013 *Phys. Rev. A* **87** 032321  
 [14] Landahl A J, Cesare C 2013 *Preprint arXiv*: 1302.3240  
 [15] Jochym-O'connor T, Laflamme R 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 010505  
 [16] Paetznick A, Reichardt B W 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 090505  
 [17] Bravyi S, Kitaev A 2005 *Phys. Rev. A* **71** 022316  
 [18] Duclos-Cianci G, Svore K M 2013 *Phys. Rev. A* **88** 042325  
 [19] Howard M, Wallman J, Veitch V, Emerson J 2014 *Nature* **510** 351  
 [20] Jochym-O'connor T, Yu Y, Helou B, Laflamme R 2013 *Quantum Inf. Comput.* **13** 361  
 [21] Yu Y F, Zhang Z M 2013 *Acta Sin. Quantum Opt.* **19** 330 (in Chinese) [於亚飞, 张智明 2013 量子光学学报 **19** 330]  
 [22] Reichardt B W 2005 *Quantum Inf. Process* **4** 251  
 [23] Campbell E T, Anwar H, Browne D E 2012 *Phys. Rev. X* **2** 041021  
 [24] Bravyi S, Haah J 2012 *Phys. Rev. A* **86** 052329  
 [25] Anwar H, Campbell E T, Browne D E 2012 *New J. Phys.* **14** 063006  
 [26] Meier A M, Eastin B, Knill E 2013 *Quantum Inf. Comput.* **13** 195  
 [27] Reichardt B W 2009 *Quantum Inf. Comput.* **9** 1030  
 [28] Jones C 2013 *Phys. Rev. A* **87** 042305  
 [29] Campbell E T, Browne D E 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 030503  
 [30] Jones N C, Van M R, Fowler A G, McMahon P L, Kim J, Ladd T D, Yamamoto Y 2012 *Phys. Rev. X* **2** 031007  
 [31] Fowler A G, Mariantoni M, Martinis J M, Cleland A N 2012 *Phys. Rev. A* **86** 032324  
 [32] Sun J G, He Y G 2003 *J. Software* **14** 334 (in Chinese) [孙吉贵, 何雨果 2003 软件学报 **14** 334]  
 [33] Grover L K 1996 *Proc. 28th ACM Symp. Theory of Comp.* May 22-24, 1996, p212-219  
 [34] Bocharov A, Svore K M 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 190501

# Fault-tolerantly implementing dense rotation operations based on non-stabilizer states\*

Wu Xiang-Yan Xu Yan-Ling Yu Ya-Fei<sup>†</sup> Zhang Zhi-Ming

(Laboratory of Nanophotonic Functional Materials and Devices (SIPSE) Laboratory of Quantum Engineering and Quantum Materials, South China Normal University, Guangzhou 510006, China)

( Received 23 June 2014; revised manuscript received 8 September 2014 )

## Abstract

Based on the quantum error-correction codes and concatenation, quantum logical gates can be implemented transversally, which is called the fault-tolerant quantum computation. Clifford gates can be directly and fault-tolerantly performed, but they cannot reach universal quantum computation. How to implement the non-Clifford gate fault-tolerantly is a vital technique in fault-tolerant universal quantum computation. Here the magic state is selected to help the implementing of the non-Clifford gate transversally. Based on the non-stabilizer state  $\cos\theta_i|0\rangle + \sin\theta_i|1\rangle$ , circuits which can execute  $2\theta_i$  rotation around  $X$ -axis and  $Z$ -axis fault-tolerantly are proposed. Then new non-stabilizer states in this form are developed and produced from the distilled magic state. By using these states, a number of non-Clifford gates can be performed transversally, which makes profound implication in fault-tolerant quantum computation. We calculate the number of the non-stabilizer states needed for simulating the desired rotation operations, which is less than that in previous protocols.

**Keywords:** fault-tolerant quantum computation, non-stabilizer states, magic state, Clifford gate

**PACS:** 03.67.-a, 03.67.Pp, 03.67.Ac

**DOI:** 10.7498/aps.63.220304

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61378012, 60978009), the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20124407110009), the National Basic Research Program of China (Grant Nos. 2011CBA00200, 2013CB921804) and Scientific Research Staring Foundation for the Returned Overseas Chinese Scholars, Ministry of Education of China.

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [yfyuks@hotmail.com](mailto:yfyuks@hotmail.com)